

*Dem Assistenten der Lehr-
kanzlei Prof. Barov
herzlichst R. Ledersteger*

*Institut für Landes-
und Katastervermessung*

Sonderheft 24

**der Österreichischen Zeitschrift
für Vermessungswesen**

Hundertjahrfeier

**der Österreichischen Kommission
für die Internationale Erdmessung**

23. bis 25. Oktober 1963



Herausgeber: Österreichische Kommission für die Internationale Erdmessung
Verleger: Österreichischer Verein für Vermessungswesen, Wien VIII, Friedrich-
Schmidt-Platz 3

Wien 1964

Institut für Landes-
und Katastr Vermessung

Sonderheft 24
der Österreichischen Zeitschrift
für Vermessungswesen

Hundertjahrfeier
der Österreichischen Kommission
für die Internationale Erdmessung
23. bis 25. Oktober 1963



Herausgeber: Österreichische Kommission für die Internationale Erdmessung
Verleger: Österreichischer Verein für Vermessungswesen, Wien VIII, Friedrich-
Schmidt-Platz 3

Wien 1964

Vorwort

Vorliegende Festschrift, die der Erinnerung an den hundertsten Geburtstag der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung gewidmet ist, bietet eine willkommene Gelegenheit, den Fachkollegen des In- und Auslandes, die unserer Einladung leider nicht Folge leisten konnten, einen Eindruck von dem glanzvollen Ablauf der festlichen Tage und einen Einblick in den wahrhaft nicht zu geringen Anteil Österreichs an der Internationalen Erdmessung im Verlauf der letzten hundert Jahre zu geben. Den Festgästen aber und insbesondere den zahlreichen prominenten Fachkollegen des Auslandes möge diese Schrift eine bleibende Erinnerung an die schönen Tage in Wien sein, die in würdiger und doch herzlich-kollegialer Weise nur zu schnell zu Ende gingen!

In erster Linie aber gilt der Dank der Kommission dem Herrn Bundesminister *Dr. Fritz Bock*, der die Feier durch eine großzügige Unterstützung ermöglichte und ihren Ehrenschatz übernahm sowie dem Herrn Staatssekretär *Dr. Vinzenz Kotzina*, der in Vertretung des Herrn Ministers als Gastgeber fungierte.

Schließlich gebührt mein persönlicher Dank meinen Herren Kollegen in der Kommission, die auf eigene Beiträge zur Festschrift verzichteten, um mir Raum für eine breitere Darstellung der Theorie der sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren und des Normalsphäroides zu lassen.

K. Ledersteger

Festprogramm

Mittwoch, 23. Oktober

19.30 Uhr OPERNAUFFÜHRUNG in der Staatsoper, Wien I, Opernring;
Rigoletto, Oper von G. Verdi

Donnerstag, 24. Oktober

FESTAKT im Palais Auersperg, Wien VIII, Auerspergstraße 1,
Festsaal

10 Uhr BEGRÜSSUNG DER FESTGÄSTE

o. Prof. Hofrat Dr. Dr. h. c. Karl Ledersteger. Sinfonie in C-Dur
(Jupiter-Sinfonie) von W. A. Mozart, erster Satz, allegro vivace;
dritter Satz, menuetto

ERÖFFNUNG DER HUNDERTJAHRFEIER

Staatssekretär im Bundesministerium für Handel und Wiederaufbau
Dr. Vinzenz Kotzina in Vertretung des Herrn Bundesministers
Dr. Fritz Bock

FESTANSPRACHE

o. Prof. Hofrat Dr. Dr. h. c. Karl Ledersteger: Hundert Jahre Öster-
reichische Kommission für die Internationale Erdmessung
Ouvertüre zu „Cosi fan tutte“ von W. A. Mozart. Musikalische Um-
rahmung: Wiener Rundfunkorchester, Dirigent Franz Interholzinger

COCKTAIL im Wintergarten

BANKETT im Festsaal

18 Uhr VORTRAG im Hörsaal VII der Technischen Hochschule, Wien IV,
Karlsplatz 13, 2. Hof, links

o. Prof. Hofrat Dr. Dr. hc. Karl Ledersteger: Neue Ergebnisse und
Probleme der Wiener Schule der Höheren Geodäsie

20 Uhr Über besondere Einladung:

ABENDESSEN im Palais Pallavicini, Wien I, Josefsplatz 5, veran-
staltet vom Bundesminister für Handel und Wiederaufbau Dr. Fritz
Bock

20 Uhr Für alle sonstigen Festgäste:

THEATERAUFFÜHRUNG in den Wiener Kammerspielen, Wien I,
Rotenturmstraße 20: „Sonntag in New York“, Lustspiel von N. Krasna

Freitag, 25. Oktober**TAGESAUSFLUG AUF DEN SEMMERING**

- 8.30 Uhr Abfahrt mit Autobussen vom Heldenplatz, Wien I; Sammelpunkt beim Prinz-Eugen-Denkmal (Neue Hofburg). Fahrt über Wr.-Neustadt, Gloggnitz nach Reichenau
- 10 Uhr Gabelfrühstück in Reichenau
- 11 Uhr Weiterfahrt über Breitenstein auf den Semmering
- 12 Uhr Mittagessen am Semmering, Hotel Panhans
- 15.30 Uhr Rückfahrt über Schottwien, Bad Vöslau, Baden nach Gumpoldskirchen
- 17.30 Uhr Heurigenabend in Gumpoldskirchen, Turmhof
- 21 Uhr Rückfahrt nach Wien
- 22 Uhr Ankunft in Wien, Heldenplatz

Organisation und Verlauf der Hundertjahrfeier der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung

Von *F. Hauer*, Wien

Die Österreichische Kommission für die Internationale Erdmessung, Mitgliedsorganisation Österreichs bei der Internationalen Union für Geodäsie und Geophysik, konnte am 2. Juni 1963 auf ihren hundertjährigen Bestand zurückblicken. Die Kommission hätte die Feier dieses Jubiläums gerne zeitgerecht durchgeführt; mit Rücksicht auf eine Reihe großer geodätischer Veranstaltungen in anderen Ländern im Sommer und Frühherbst 1963, insbesondere wegen der Generalversammlung der Internationalen Union für Geodäsie und Geophysik in Berkeley, mußte jedoch die geplante Veranstaltung auf Ende Oktober 1963 verlegt werden.

Die Hundertjahrfeier, für deren Durchführung das Bundesministerium für Handel und Wiederaufbau in großzügiger Weise die erforderlichen Mittel bereitgestellt hat, stand unter dem Ehrenschatze seines Ressortchefs, des Herrn Bundesministers *Dr. Fritz Bock*.

Der Einladung des Organisationskomitees zur Teilnahme an der Veranstaltung folgten rund 130 Gäste aus dem Inland, aus der Deutschen Bundesrepublik, den Niederlanden, der Schweiz und Ungarn. Die Gäste und die Veranstalter waren im Rahmen der Feier zum ersten Mal vereinigt bei der Aufführung der Oper *Rigoletto* von G. Verdi als festlichem Auftakt, Mittwoch, den 23. Oktober, in der Staatsoper. Ein zwangloses Beisammensein der Teilnehmer, in Gruppen verteilt über renommierte Gaststätten der Innenstadt, beendete den schönen Abend.

Im Mittelpunkt der gesamten Feier stand der Festakt im Palais Auersperg, zu dem sich die Festgäste Donnerstag, den 24. Oktober, vormittags, versammelten. Der Präsident der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung, Professor *Dr. Dr. h. c. K. Ledersteger*, begrüßte die Teilnehmer der Veranstaltung mit herzlichen Worten; an ihrer Spitze als Vertreter des Staates und der Wissenschaft

Herrn Staatssekretär *Dr. Vinzenz Kotzina* in Vertretung des Herrn Bundesministers für Handel und Wiederaufbau, *Dr. Fritz Bock*,

Herrn Sektionsrat *Dr. Walter Hafner* in Vertretung des Herrn Bundesministers für Unterricht, *Dr. Heinrich Drimmel*,

Herrn Professor *Dr. h. c. Erich Schmidt*, Präsident der Österreichischen Akademie der Wissenschaften und

Se. Magnifizienz *Dipl.-Ing. Dr. Jaro Zeman*, Rektor der Technischen Hochschule Wien.

Einen besonders lieben Gruß entbot der Kommissionspräsident allen Gästen aus dem Ausland, im besonderen den Beauftragten und Vertretern der ausländischen staatlichen und wissenschaftlichen Institutionen.

Die Eröffnung der Hundertjahrfeier nahm Staatssekretär *Dr. Vinzenz Kotzina* vor. Er erinnerte daran, daß Österreich durch seinen Beitritt zur Mitteleuropäischen

Gradmessung neben Preußen und Sachsen zu den eigentlichen Begründern dieser seit dem Jahre 1886 weltweiten internationalen Organisation gehört. Der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung, seit dem Jahre 1919 dem Bundesministerium für Handel und Wiederaufbau beziehungsweise dessen Vorgängern zugehörig, obliegt die Auswahl und Beratung jener Arbeiten, die Österreich aus seiner Beteiligung an der Internationalen Erdmessung zufallen. Gerade in dieser Richtung, führte Staatssekretär *Kotzina* weiter aus, war die Kommission immer um die Durchführung jener Arbeiten bemüht, die den größten Nutzen im Aufgabenbereich der Internationalen Erdmessung versprochen. Staatssekretär *Kotzina* schloß seine mit herzlichem Beifall aufgenommenen Ausführungen mit der Feststellung, daß die Tagung, die zu eröffnen er die Ehre habe, als Jubelveranstaltung ihren Sinn über den Austausch fachlicher Erkenntnisse vor allem in der menschlichen Begegnung besitze.

Den Höhepunkt des Festaktes bildete die Festansprache des Kommissionspräsidenten Professor *Ledersteger*, in der er die geschichtliche Entwicklung und den Aufgabenbereich der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung darstellte und im besonderen auch des Anteils unserer Hohen Schulen an den Leistungen der österreichischen Erdmessung gedachte.

Ausgehend von den Gedanken *Joseph Herrs* über die Wichtigkeit der Zusammenarbeit der Geodäten und Astromomen mit dem Militärgeographischen Institut bot er einem interessierten Auditorium einen reichgegliederten Einblick in die Entwicklung der internationalen Erdmessung und des österreichischen Anteiles daran. Wenn im Jahre 1959 die Erneuerung des Hauptdreiecksnetzes des ehemaligen Militärgeographischen Institutes abgeschlossen werden konnte, wenn durch Polhöhen- und Azimutbeobachtungen auf einem Großteil der Punkte erster Ordnung die beiden Lotabweichungskomponenten bestimmt worden sind und die Anzahl der Laplaceschen Punkte erheblich vermehrt werden soll, wenn das österreichische Präzisionsnivellement in das europäische Höhennetz eingebaut und durch zahlreiche Schweremessungen auf den Hauptnivellementlinien sämtliche geopotentiellen Koten ermittelt worden sind, so hat damit Österreich einen Anteil zur Internationalen Erdmessung beigetragen, der sich den Leistungen aller an einer großräumigen Zusammenarbeit interessierten Länder würdig zur Seite stellen kann.

Einen wesentlichen Teil seiner Ausführungen widmete der Festredner der engen Verbundenheit der Lehrkanzel für Höhere Geodäsie an der Technischen Hochschule Wien mit der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und der Wiener Schule der Höheren Geodäsie. Beginnend mit *Joseph Herr*, einem der Hauptreformatoren bei der Umwandlung des Polytechnischen Institutes zur Technischen Hochschule in Wien, der sich um den Beitritt Österreichs zur Mitteleuropäischen Gradmessung besondere Verdienste erwarb und durch sein Lehrbuch der Sphärischen Astronomie weithin bekannt geworden ist, würdigte Professor *Ledersteger* der Reihe nach die Professoren der Technischen Hochschule Wien *Wilhelm Tinter*, *Richard Schumann* und *Friedrich Hopfner* und den Wiener Universitätsprofessor *Adalbert Prey*. Alle waren sie nicht nur hervorragende Forscher und Lehrer der Höheren Geodäsie, sondern auch mit der Tätigkeit der Kommission auf das engste verbunden.

Es ist verständlich, daß der Festredner, dessen Vortrag vom Auditorium mit größtem Interesse aufgenommen und durch starken Beifall bedankt wurde, seine Ausführungen zur Wiener Schule der Höheren Geodäsie mit der Würdigung der Leistungen und des Werkes seines Vorgängers im Lehramte *Dr. Friedrich Hopfner* abschloß. Diese Ausführungen wären aber unvollständig, würde ihnen nicht noch ein Absatz über die Person des Vortragenden selbst angeschlossen werden.

Dr. phil. Karl Ledersteger wurde im Jahre 1957 als Ordinarius an die Lehrkanzel für Höhere Geodäsie der Technischen Hochschule Wien berufen. Vorher Leiter der wissenschaftlichen Abteilung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen und mehrfach auch Mitarbeiter der Triangulierungsabteilung dieses Amtes, waren für ihn seit jeher enge Kontakte zur Internationalen Erdmessung gegeben. Er führte eine Reihe astronomischer Polhöhen- und Azimutbestimmungen auf Punkten erster Ordnung durch und nahm an Drehwaagenmessungen im Steinfeld und auf der Hohen Wand teil. Im Jahre 1933 war er Mitarbeiter der Weltlängenbestimmung, 1937 erneuerte er den Laplac'schen Punkt Pfänder. Schon in seiner Assistentenzeit bei *Schumann* beschäftigte er sich mit dem Problem der Polhöhenchwankung, später folgten Untersuchungen über die Figur der Erde und die damit zusammenhängenden Fragen, Arbeiten über Lotabweichungen, Schwere und Schwerestörungen und Studien zum geometrischen und astronomischen Nivellement. Von besonderer Bedeutung sind *Lederstegers* grundlegende Arbeiten zur Neubegründung der Astronomischen Geodäsie, der Theorie des Normalsphäroides der Erde und der Theorie der Gleichgewichtsfiguren sowie die Bearbeitung der 10. Ausgabe des fünften Bandes des Handbuches der Vermessungskunde von *Jordan-Eggert-Kneißl* „Astronomische und Physikalische Geodäsie“. Über seine jüngste größere Arbeit „The Multi-Parameter Theory of Spheroidal Figures in Hydrostatic Equilibrium and the Normal Spheroids of the Earth and the Moon“ berichtete er in seinem Fachvortrag am Abend des Festtages.

Die besonderen dienstlichen Leistungen *Lederstegers* im Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen wurden durch die Verleihung des Titels Hofrat ausgezeichnet; seine außerordentlich fruchtbare und umfangreiche wissenschaftliche Tätigkeit hat in zahlreichen weiteren Ehrungen sichtbaren Ausdruck gefunden. So hat ihm u. a. die Technische Hochschule Graz das Ehrendoktorat der Technischen Wissenschaften verliehen und ihn die österreichische Akademie der Wissenschaften zum wirklichen Mitglied gewählt. Er ist korrespondierendes Mitglied der Bayerischen Akademie der Wissenschaften und schon seit langem korrespondierendes Mitglied der Deutschen Geodätischen Kommission.

Der Festakt wurde musikalisch umrahmt durch das Wiener Rundfunkorchester mit dem Dirigenten *Franz Interholzinger*. Es spielte nach der Begrüßung der Festgäste den ersten und dritten Satz der Jupiter-Sinfonie und nach der Festansprache die Ouvertüre zu „Cosi fan tutte“ von W. A. Mozart.

Nach dem Festakt wurden die Festgäste zu einem Cocktail in den Wintergarten und die anschließenden Räume des Palais Auersperg gebeten, während dessen der Festsaal für das Bankett vorbereitet und zusätzlich geschmückt wurde.

Während des Bankettes überbrachte *Professor Dr. Toperczer* zur Hundertjahrfeier die Glückwünsche des Generalsekretärs der Internationalen Union für

Geodäsie und Geophysik, *G. D. Garland*. Namens der ausländischen Delegationen gratulierten zum Jubeltage die Professoren *Dr. e. h. Dr. M. Kneißl*, aus München, *Dr. e. h. F. Kobold* aus Zürich, *R. Roelofs* aus Delft und *Dr. h. c. Dr. A. Tarczy-Hornoch* aus Sopron in herzlichen Worten. *Prof. Roelofs* überreichte außerdem ein schönes Blumenarrangement als besonderen Gruß seines Landes. Der Österreichischen Kommission sind darüber hinaus aus dem In- und Auslande durch Botschaften weiterer Delegierter sowie in Telegrammen und Briefen zahlreiche Glückwünsche zu ihrem hundertjährigen Bestand und für eine erfolgreiche Zukunft übermittelt worden.

Donnerstag nachmittags hielt *Prof. Ledersteger* im Hörsaal VII der Technischen Hochschule Wien einen wissenschaftlichen Vortrag über „Neue Ergebnisse und Probleme der Wiener Schule der Höheren Geodäsie“, bei dem er in gedrängter Form einen Überblick über die wichtigsten Resultate seiner eigenen Forschungen auf dem Gebiete der hydrostatischen Gleichgewichtsfiguren sowie deren Anwendung auf das Problem der Normalfigur der Erde und auf die Mondfigur gab. Der Vortragende streifte auch das für die Geodäsie so wichtige Problem der Regularisierung der Erdkruste und zeigte den Weg auf, der zu einer Vertiefung des Problems der Isostasie führt. Der Hauptteil des Vortrages, die Neubegründung der Theorie der sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren auf dem Außenraumpotential, ist in wesentlich erweiterter Form in dieser Festschrift dargelegt, so daß sich an dieser Stelle ein näheres Eingehen auf den Inhalt erübrigt.

Der Vortrag *Professor Lederstegers* wurde von einem großen Zuhörerkreis mit Aufmerksamkeit verfolgt und mit starkem Beifall bedacht.

Der Festtag schloß mit einer durch den Bundesminister für Handel und Wiederaufbau für einen engeren Kreis der Tagungsteilnehmer veranstalteten Abendtafel im Palais Pallavicini, bei der nach Grußworten von *Staatssekretär Dr. Kotzina*, als dem Vertreter des Bundesministers für Handel und Wiederaufbau, die ausländischen Delegationsführer in kurzen Ansprachen ihrer Freude über ihren Aufenthalt in Österreich Ausdruck gaben. Allen sonstigen Festgästen wurde zur gleichen Zeit eine Aufführung des Lustspiels „Sonntag in New York“ von N. Krasna in den Wiener Kammerspielen geboten.

Freitag, den 25. Oktober, unternahmen alle Festgäste über Einladung der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung einen Tagesausflug auf den Semmering. Die Abfahrt erfolgte mit Autobussen vom Heldenplatz in Wien und führte über Wr.-Neustadt und Gloggnitz zunächst durch das liebliche Schwarzatal nach Reichenau, wo eine Frühstückspause gehalten wurde. Von da ging es weiter über Breitenstein auf den Semmering zum Mittagessen im Hotel Panhans. Die Planung der Reiseroute durch das Gebiet schönster landschaftlicher Bilder und die herbstlich gefärbten Wälder des Semmeringgebietes kam aber wegen einer dichten Nebeldecke über 800 Meter Seehöhe leider nicht zur Wirkung und die Landschaft schien rau und kalt, so daß der Aufenthalt auf dem Semmering mit Ausnahme kurzer Spaziergänge in der Nähe des Hotels nur auf dieses beschränkt war, wo jedoch die angenehme Atmosphäre der schönen Gesellschaftsräume die Bildung persönlicher Beziehungen unterstützte. Die Rückfahrt erfolgte über Schottwien und die Weinstraße nach Gumpoldskirchen zu einem Heurigenbesuch im

Turmhof, der die Hunderjahrfeier in einer typisch österreichischen Form zu einem fröhlichen Ausklang führte.

Die festliche und die heitere Note der Veranstaltungen, die Auffrischung alter Kontakte, die Anknüpfung neuer Bekanntschaften und die den Damen zum Abschlusse überreichte Damenspende — eine Augartenvase — werden, so hoffen die Veranstalter, dazu beitragen, daß alle Teilnehmer die Hundertjahrfeier der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung in guter Erinnerung behalten.

Begrüßung der Festgäste durch den Präsidenten der ÖKIE

Hochansehnliche Festversammlung!

Als dem derzeitigen Präsidenten der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung obliegt mir die angenehme Pflicht, Sie alle, meine Damen und Herren, die sich hier zur Feier des hundertsten Geburtstages unserer Kommission versammelt haben, auf das herzlichste willkommen zu heißen: Ich freue mich ganz besonders, auch viele illustre Gäste aus dem Ausland auf dem Boden unserer ehrwürdigen Stadt begrüßen zu können. Manche von Ihnen haben sogar nach den anstrengenden Tagen, welche die 13. Generalversammlung der Internationalen Union für Geodäsie und Geophysik in Berkeley mit sich brachte, eine nochmalige, wenn auch wesentlich kleinere Reise nicht gescheut, um damit unserer Kommission, aber sicherlich auch nicht zuletzt unserem geliebten Wien, einen eindrucksvollen Beweis ihrer Sympathie und Zuneigung zu geben, wofür wir vom ganzen Herzen danken.

Im besonderen darf ich als Vertreter des Staates und der Wissenschaft begrüßen:

Herrn Staatssekretär *Dr. Vinzenz Kotzina* in Vertretung des Herrn Bundesministers für Handel und Wiederaufbau *Dr. Fritz Bock*, der in dankenswerter Weise den Ehrenschatz über unser Jubiläumfest übernommen hat.

Herrn Sektionsrat *Dr. Hafner* in Vertretung des Herrn Bundesminister für Unterricht *Dr. Heinrich Drimmel*,

den Präsidenten der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Herrn Prof. *Dr. h. c. Dr. Erich Schmid*,

Se. Magn. *Dipl.-Ing. Dr. Jaro Zeman*, Rektor der Technischen Hochschule Wien,

Se. Spekt. Prof. *Dr. Franz Lihl*, Dekan der Fakultät für Naturwissenschaften der Technischen Hochschule Wien,

das Kommissionsmitglied Prof. *Dr. Rinner* in Vertretung des Rektors der Technischen Hochschule Graz,

Herrn Ministerialrat *Dr. Schipper* von der Präsidialabteilung des BMfHuW, von der für die Kommission zuständigen Sektion im BMfHuW. die Herren Sektionsleiter Ministerialrat *Dr. Helmreich*, Ministerialrat *Dipl.-Ing. Nagy* und Sektionsrat *Dipl.-Ing. Hofbauer*,

Herrn Univ.-Prof. *Dr. Bobek* als Präsidenten der Geographischen Gesellschaft Wien,

die Kommissionsmitglieder

Herrn Univ.-Prof. *Dr. Steinhauser* als Direktor der Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik,

Herrn *Dr. h. c. Neumaier* als Präsidenten des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen,

Herrn Prof. *Dr. Barvir* als Obmann des Österr. Vereines für Vermessungswesen,

Herrn Prof. *Dr. Ackerl* als Vorsitzenden der Österr. Gesellschaft für Photogrammetrie,

ferner als Vertreter des Stadtbauamtes Herrn Senatsrat *Dipl.-Ing. Kling* und mehrere Kollegen unserer Technischen Hochschule, denen ich gleichfalls herzlichst für ihr Erscheinen danke.

Eine ganz besondere Freude und Ehre ist es mir, die ausländischen Gäste begrüßen zu dürfen:

Herrn Prof. *Dr. h. c. Dr. Max Kneißl* als Vertreter der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, des Rektors der Techn. Hochschule München und der Deutschen Geodätischen Kommission,

Herrn Prof. *Dr. h. c. Dr. Anton Tarczy-Hornoch* als Vertreter der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und als Präsidenten des Ungar. Nationalkomitees für Geodäsie und Geophysik,

Herrn Prof. *Dr. h. c. Dr. Walter Großmann* in Vertretung des Rektors der Technischen Hochschule Hannover,

Herrn Prof. *Dr. Lichte* als Vertreter der Technischen Hochschule Karlsruhe, den Präsidenten der Schweizerischen Geodätischen Kommission Herrn Prof. *Dr. Fritz Kobold*,

den Präsidenten des Bayerischen Landesvermessungsamtes, Herrn *Dipl.-Ing. Hamns Veit*,

den leitenden Vermessungsdirektor, Herrn *Dipl.-Ing. Dräger* in Vertretung des Deutschen Vereins für Vermessungswesen

sowie die Herren Professoren

Dr. Bachmann von der Universität Lausanne,

Dr. Finsterwalder und *Dr. Sigl* von der Technischen Hochschule München,

Dr. Roloefs von der Technischen Hochschule Delft,

Dr. Schermerhorn, den Leiter des Internat. Training Center für Photogrammetrie in Delft,

und schließlich Herrn *Dr. Regöczy*, Budapest.

Darüber hinaus begrüße ich herzlichst alle Damen und die zahlreich erschienenen österreichischen Fachkollegen, die uns mit ihrer Anwesenheit beehren. Über unser Geburtstagskind brauche ich an dieser Stelle nicht zu sprechen; habe ich doch die Ehre, Ihnen in meinem späteren Festvortrag seine Lebensgeschichte in großen Zügen zu schildern. So will ich mir nur noch einige kurze Bemerkungen zum Programm erlauben. Manchem von Ihnen wird es vielleicht überladen dünken und ich gestehe, daß ich selbst des öfteren ähnlich gedacht habe, wenn ich als geistig und

physisch übersättigter Gast müde die Heimreise antreten mußte. Ganz anders aber der Standpunkt des Gastgebers! Er genießt durch Wochen hindurch die Vorfreude der festlichen Tage und des Wiedersehens mit liebgewonnenen Freunden und bemüht sich fast instinktiv, all diese Freude in wenige Tage zusammenzupressen, teils um das Fest erstrahlen zu lassen, teils um den Gästen möglichst viel von den Schönheiten seiner Heimat zu zeigen, auf die er im Innersten seines Herzens so stolz ist. So bitte ich Sie denn, diese kurzen Festtage, die wir gestern mit einer Aufführung in der weltberühmten Wiener Staatsoper einleiten durften, frohgemut und zwanglos zu genießen. Dies gilt in erster Linie für die Damen, die dazu berufen sind, dem Fest ihren Glanz zu leihen, während die Herren die Freude erst erkaufen müssen, indem sie gebeten werden, heute abends noch einen Fachvortrag über sich ergehen zu lassen. Ferner bitte ich jene Herren, welche ihre Glückwünsche aussprechen wollen, sich auf das Festbankett zu gedulden.

Ich darf mit dem Wunsche schließen, daß unsere Feier dazu beitragen möge, die sprichwörtlichen Bande der Freundschaft unter den Geodäten bei harter Arbeit und bei frohen Festen zu stärken!

Eröffnungsansprache des Herrn Staatssekretärs Dr. Vinzenz Kotzina

100-Jahr-Feiern rechtfertigen eine Rückschau, rechtfertigen eine festliche Stunde.

Sie, meine sehr verehrten Damen und Herren, haben sich heute hier versammelt, um der hundertsten Wiederkehr des 2. Juni 1863 festlich zu gedenken, des Tages, an dem Kaiser Franz Josef den Beitritt Österreichs zu der vom preußischen Generalleutnant *Baeyer* angeregten „mitteleuropäischen Gradmessung“ genehmigte und gleichzeitig 3 Gradmessungskommissäre ernannte. Mit dieser kaiserlichen Verfügung wurde die heutige österreichische Kommission für die Internationale Erdmessung begründet. Österreich darf sich mit Stolz neben Preußen und Sachsen zu den Begründern dieser seit 1886 weltweiten internationalen wissenschaftlichen Organisation zählen.

In der ersten Republik wurde das gesamte staatliche Vermessungswesen mit Vollzugsanweisung der Staatsregierung vom 6. 7. 1919 dem Staatsamt für Handel und Gewerbe, Industrie und Bauten unterstellt. Seither blieben sich die Kommission und das Bundesministerium für Handel und Wiederaufbau treu.

Vor 35 Jahren erhielt die Kommission das noch heute gültige Statut, demzufolge ihr „die Auswahl und Beratung jener Arbeiten obliegt, die Österreich aus seiner Beteiligung an der Erdmessung zufallen“.

Ausführende Behörde ist das Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen, das an Stelle des ruhmreichen Militärgeographischen Institutes der alten Donaumonarchie getreten war. Während in der Monarchie die Kommission alle astronomischen Arbeiten für die Zwecke der internationalen Erdmessung in Österreich durchzuführen hatte, hat sie seit 1919 nur mehr alle zwischenstaatlichen Verhandlungen auf dem Gebiete der Höheren Geodäsie zu führen.

Die Leistungen der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung im einzelnen zu würdigen, muß ich dem berufenen Fachmann überlassen.

Es ist mir jedoch eine große Freude, als Staatssekretär im Bundesministerium für Handel und Wiederaufbau namens des Herrn Bundesministers *Dr. Bock* bezeugen zu können, daß die Kommission in den seit ihrer Gründung verflossenen 100 Jahren stets treu und erfolgreich dem Vaterland gedient hat, daß sie immer bestrebt war, jene Arbeiten durchzusetzen, welche den größten Nutzeffekt im Rahmen der Internationalen Erdmessung versprachen, und daß ihre Mitglieder vielfach durch ihre eigenen wissenschaftlichen Leistungen zur Mehrung des Ansehens Österreichs beigetragen haben. Daß dem so ist, bezeugt auch der Umstand, daß sich die Internationale Assoziation für Geodäsie an erster Stelle unter den Gratulanten befindet und daß sich so viele prominente Gelehrte aus dem Auslande zu unserer 100-Jahrfeier eingefunden haben. Österreich ist stolz darauf, daß Sie, meine verehrten Gäste, durch Ihr Kommen die Anerkennung, der sich die österreichische Kommission für die Internationale Erdmessung erfreut, unterstreichen. Mit dem Worte Geodäsie verbindet sich für den Nichtfachmann eine erhabene Vorstellung: „Die Erde ist der gesamten Menschheit geschenkt und ihre Ausmessung und Erforschung ist eine der ersten und größten Gemeinschaftsaufgaben.“

Freilich lehrt die mehrtausendjährige, bewußte Geschichte der Menschheit, daß sich diese Erkenntnis erst in der jüngsten Zeit langsam durchzusetzen beginnt. Rückwärts schauend müssen wir leider feststellen, daß der Boden unseres Planeten bei den zahlreichen Versuchen einer Neuaufteilung immer wieder mit Blut durchtränkt wurde. Letztlich waren die Kriege die Gründer aller Militärgeographischen Institute. Sie haben die Geodäsie in den Dienst der Landesverteidigung gestellt. Überlegungen auf höherer und edlerer Ebene waren es, die zur Gründung der „Internationalen Erdmessung“ führten. Es ist dieser Institution, der heutigen „Internationalen Assoziation für Geodäsie“ mit ihren nationalen Kommissionen (zu denen auch die österreichische Kommission zählt), vergönnt, bei der Beratung und Durchführung der gemeinsamen geodätischen, rein wissenschaftlichen Zwecke — wie etwa bei der Herstellung eines einheitlichen Weltkartenwerkes — bewußt oder unbewußt, im Sinne der Völkerverständigung zu wirken.

Die gewaltigen Fortschritte der Naturwissenschaften und der Technik, die wir in den letzten Jahrzehnten und besonders in den letzten Jahren miterleben durften, haben auch vor der Geodäsie nicht Halt gemacht. So spielt — um mich nur eines Hinweises zu bedienen — bei dem geplanten Vorstoß in den interplanetaren Raum auch die Satellitengeodäsie eine nicht unbedeutende Rolle. Bei der Projektierung dieser gigantischen Vorhaben ist die Kenntnis des Schwerefeldes der Erde in großen Höhen eine wesentliche Voraussetzung. Für die Vorbereitungen, den ersten Menschen auf dem Mond landen zu lassen, spielt die Ausmessung der Mondoberfläche und die theoretische Erforschung der Gestalt des Mondes eine ungemein wichtige Rolle.

Die Tagung, welche ich zu eröffnen heute die Ehre habe, ist keine Fachtagung im üblichen Sinne, sondern ein Jubeltag, welcher Sie, meine sehr geehrten Damen und Herren, hier als Wissenschaftler zu einer menschlichen Begegnung zusammengeführt hat. Wesen und Zweck solcher Festveranstaltungen ist es, über den rein fachlichen Austausch von Erkenntnissen hinaus, die menschlichen Kontakte zwischen den einzelnen Wissenschaftlern auch auf persönlicher Ebene zu vertiefen und da-

mit wieder das Klima für eine weitere erfolgreiche gemeinsame Tätigkeit vorzubereiten.

Namens des Herrn Bundesministers *Dr. Fritz Bock* eröffne ich hiemit die 100-Jahr-Feier der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und wünsche der Kommission ein erfolgreiches Wirken im zweiten Jahrhundert ihres Bestehens im Dienste der Wissenschaft und zur Ehre des Vaterlandes.

Festansprache des Präsidenten Karl Ledersteger

Sehr geehrter Herr Staatssekretär!

Eure Magnifizienz, meine Herren Präsidenten!

Hochverehrte Festversammlung!

Bereits am 2. Juni dieses Jahres konnte die Österreichische Kommission für die Internationale Erdmessung auf das ehrwürdige Alter von 100 Jahren zurückblicken. Selbstverständlich hätten wir zur Feier dieses Geburtstages unsere Gäste schon gerne im Sommer nach Wien gebeten, mußten uns aber mit Rücksicht auf die 13. Generalversammlung unserer Dachorganisation, der Internationalen Union für Geodäsie und Geophysik, welche in der zweiten Augushälfte in Berkeley stattfand, auf den Herbst gedulden. Die Österreichische Kommission für die Internationale Erdmessung ist, fast möchte ich sagen leider, nicht die erste der geodätischen Landeskommissionen. In dieser Hinsicht hat uns die Schweizerische Geodätische Kommission den Rang abgelaufen, die schon im Herbst 1961 auch eine Anzahl österreichischer Kollegen zur Feier ihres hundertjährigen Bestehens nach Zürich einladen konnte, die damals zum letztenmal Gelegenheit hatten, den Altmeister der europäischen Geodäsie, Prof. *Dr. Fritz Baeschlin*, zu sprechen. Ich benütze gerne die Gelegenheit, der Schweizerischen Geodätischen Kommission und insbesondere ihrem Präsidenten, meinem lieben Freund Professor *Dr. Kobold*, auf Wiener Boden noch einmal in unser aller Namen für die erhebenden und glanzvollen Tage in Zürich zu danken. Möge unsere eigene Feier ebenso festlich und ebenso herzlich verlaufen und mögen alle unsere Gäste ebenso schöne Erinnerungen wie seinerzeit wir, mit auf ihre Heimreise nehmen!

Sie erwarten von mir mit Recht und vermutlich auch mit einigem Bangen einen kurzen Überblick über die Geschichte der Kommission und über ihre Leistungen. Was die Geschichte betrifft, werde ich mich bemühen, Sie nicht allzusehr durch trockene Aufzählung zu ermüden. Was aber die direkten Leistungen betrifft, müssen wir auch in dieser Hinsicht unserem westlichen Nachbarn neidlos den Vorrang lassen. Denn unsere Kommission spielt seit ihrer Neuorganisation nach dem 1. Weltkriege vorwiegend eine nur administrative Rolle, indem sie den österreichischen Anteil an den internationalen geodätischen Arbeiten anzuregen, zu beraten und zu begründen hat, während deren Durchführung dem Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen obliegt. In diesem Sinne ist auch unsere Kommission die österreichische Mitgliedskörperschaft bei der Internationalen Union für Geodäsie und Geophysik. Aber zu den Mitgliedern der Kommission zählten seit eh und je die

besten Fachkräfte des Landes, vielfach Hochschulprofessoren, die eine Wiener und eine derzeit aufstrebende Grazer Schule der Höheren Geodäsie begründet haben, die beide in der ganzen Fachwelt Ansehen und Achtung genießen. Gerade weil es sich beim Studium der Erdfigur und der damit zusammenhängenden geophysikalischen Probleme um stille Gelehrtenarbeit handelt, die nicht in die Spalten der Tageszeitungen eingeht, scheint es mir notwendig zu betonen, daß die wissenschaftlichen Leistungen der großen Geodäten an sich keineswegs geringer zu veranschlagen sind als etwa die von Medizinern, Atomphysikern oder Technikern. Darüber hinaus darf ich auch auf eine große kulturelle Aufgabe der Höheren Geodäsie hinweisen. Denn das Problem der Erdfigur schreit förmlich nach internationaler Zusammenarbeit und so ist denn auch die ehemalige Internationale Erdmessung oder die heutige Assoziation für Geodäsie, die erste und noch immer die größte wissenschaftliche Organisation, die in den 100 Jahren ihres Bestehens unendlich viel zur Völkerverständigung beigetragen hat.

Die Gradmessungsarbeiten zur Bestimmung der Erdgestalt nahmen im 17. Jh. ihren Ausgang von Frankreich, dem klassischen Lande der Höheren Geodäsie. Um die Mitte des 19. Jhs. bedeckten sie bereits große Teile Europas, Amerikas und Indiens. In Österreich maß der aus Graz stammende Jesuitenpater *Liesganig* unter Maria Theresia einen 30^{ten} langen Bogen im Wiener Meridian und einen 20^{ten} langen Bogen im Szegeđiner Meridian und es ist ein bemerkenswerter Zufall, daß wir unsere 100-Jahr-Feier mit einer 200-Jahr-Feier der ersten österreichischen Gradmessung verbinden könnten, worauf bereits Herr Präsident *Lego* in seiner Festrede anläßlich der 90-Jahr-Feier unserer Kommission im Dezember 1953 hingewiesen hat.

Im Frühjahr 1861 gewann der energiegeladene preußische Generalleutnant *Baeyer*, der in seiner Jugend unter dem berühmten Königsberger Astronomen *Bessel* an der Gradmessung in Ostpreußen teilgenommen hatte, seine Regierung für den Plan eines Zusammenschlusses der mitteleuropäischen Dreiecksketten. Anfangs August 1861 schlug die preußische Regierung den in Betracht kommenden Staaten die Gründung der mitteleuropäischen Gradmessung vor. An dieser Stelle darf ich nochmals das rühmliche Beispiel der Schweiz erwähnen. Noch im gleichen Monat beschloß der Schweizer Bundesrat über Vorschlag General *Dufours* den Beitritt und gründete gleichzeitig die Schweizerische Geodätische Kommission, deren erste Mitglieder bereits am 22. August 1861 gewählt wurden. Im damals großen und mächtigen Österreich vollzog sich dieser Prozeß aus politischen und militärischen Gründen naturgemäß langsamer. Als Berater des Staatsministeriums fungierte der Geodäsieprofessor des Wiener Polytechnischen Institutes, *Dr. Herr*, der auf die notwendige Zusammenarbeit der Geodäten und Astronomen mit dem Militärgeographischen Institut hinwies. So wurde denn zur Gründungsversammlung, auf der übrigens außer Preußen und Österreich nur noch Sachsen vertreten war, im April 1862 eine dreiköpfige Delegation nach Berlin entsendet, bestehend aus dem Direktor des MGI, Generalmajor *v. Fligely*, dem Direktor der Universitäts-Sternwarte *C. v. Littrow* und Prof. *Dr. Herr*. Damit hatte die Geburtsstunde der weltweiten Organisation der Internationalen Erdmessung geschlagen, ein überaus wichtiges Ereignis, das im Oktober vorigen Jahres unter der Patronanz der Bayerischen Staatsregierung und der Bayerischen Akademie der Wissenschaften in München

glanzvoll gefeiert wurde. Der langjährige Generalsekretär der Internationalen Assoziation für Geodäsie, Herr Prof. *Dr. Tardi*, hielt in der gewohnten, temperamentvollen und launigen Weise den Festvortrag: „Hundert Jahre Internationale Erdmessung“ und Herr Prof. *Dr. Max Kneißl* würdigte am Vorabend in seinem Vortrag „Die geodätische Integration Europas“ die große Gemeinschaftsarbeit der Assoziation.

Am 2. Juni 1863 genehmigte Kaiser Franz Josef den Beitritt Österreichs zur Mitteleuropäischen Gradmessung und ernannte gleichzeitig die drei erwähnten Delegierten zu bevollmächtigten Gradmessungskommissären und betraute sie mit der Leitung der durchzuführenden Gradmessungsarbeiten. Nach dem hierfür vorgesehenen Statut hatten die drei Kommissäre die gemeinsame und ungeteilte Verantwortung für alle Gradmessungsarbeiten zu tragen. Die Arbeiten konnten von den Kommissären selbst oder von Gehilfen durchgeführt werden, die einverständlich heranzuziehen waren. Außerdem war im Statut die weitgehende Mitarbeit des Militär-geographischen Institutes verfügt und den beiden zivilen Kommissären die Einsichtnahme in die einschlägigen Arbeiten des MGI gestattet.

Damit war die Österreichische Kommission für die Mitteleuropäische Gradmessung gegründet, was wegen der zentralen Lage und großen Ausdehnung Österreichs sowie wegen des großen politischen Einflusses des Staates für das Gesamtwerk von größter Bedeutung war. Tatsächlich gaben nach dem Beitritt Österreichs viele Staaten ihre abwartende Haltung auf und auf der 1. Allgemeinen Konferenz, welche im Oktober 1864 in Berlin stattfand, waren bereits 16 Staaten vertreten. Unbestritten gebührt Prof. *Herr* das Hauptverdienst an dem Beitritt Österreichs. Fast gleichzeitig vollzog sich die Umwandlung des Wiener Polytechnischen Institutes zur Technischen Hochschule, an der *Herr* gleichfalls maßgeblich beteiligt war. So setzte er auch die Systemisierung einer Lehrkanzel für Höhere Geodäsie und Sphärische Astronomie durch, womit die erste Speziallehrkanzel für dieses Fach geschaffen wurde, die der große *Helmert* scherzweise als geodätische Luxuslehrkanzel bezeichnete. Mit ihr wurde die Wiener Schule der Höheren Geodäsie begründet. Im Juni 1866 wurde *Herr* mit dem neuen Ordinariat betraut und bald darauf zum ersten Rektor der Technischen Hochschule gewählt.

Die Gradmessungsarbeiten wurden mit großem Eifer in Angriff genommen, wobei dem MGI unter *Fligelys* Leitung die Triangulierungen 1. O. mit den Anschlüssen an die Netze der Nachbarstaaten, den beiden zivilen Kommissären jedoch die astronomischen Arbeiten zufielen. In diese Arbeiten wurden auch jüngere Fachkräfte eingeführt, die sich später fast durchwegs klangvolle Namen erwarben. Es seien nur die späteren Geodäsieprofessoren *Schell* und *Tinter*, der nachmalige Sternwartendirektor *Weiss* und die Offiziere *R. v. Sterneck* und *Hartl* genannt. Bald aber litt der Fortschritt der astronomischen Arbeiten an der unzureichenden Dotation von bloß 5000 Gulden für die beiden zivilen Kommissäre sowie an dem Umstand, daß diesen nur die Sommermonate für Feldarbeiten zur Verfügung standen. Dies hatte schon 1866 *Littrows* Rücktritt zur Folge. Auch der unglückselige Krieg von 1866, der die Umwandlung des österreichischen Kaiserstaates in eine auf dualistischer Grundlage aufgebaute Monarchie zur Folge hatte, wirkte sich recht abträglich aus. Während das nunmehr k. u. k. gewordene MGI zu den gemeinsamen

Angelegenheiten der beiden Reichshälften gehörte, war dies bei der Gradmessungskommission umstritten.

Für die Vereinheitlichung der Erdmessungsarbeiten war die 1875 unterzeichnete internationale Meterkonvention von fundamentaler Bedeutung. In Österreich war es wieder Prof. *Herr*, der seit 1864 die Vorarbeiten für die Einführung des metrischen Maß- und Gewichtssystems vorantrieb. Auf der 1867 abermals in Berlin abgehaltenen 2. Allgemeinen Konferenz der nunmehrigen „Europäischen Gradmessung“ war diese Frage das Hauptthema. Es wurde die allgemeine Einführung des metrischen Systems, die Gründung eines Internationalen Büros für Maß und Gewichte sowie die Herstellung eines neuen Normalmeters und von Kopien für die beteiligten Staaten empfohlen. Schon im Sommer 1871 wurde die neue Maß- und Gewichtsordnung in Österreich eingeführt und *Herr* 1872 zum ersten Direktor der neu geschaffenen Normaleichungskommission ernannt.

Auf der 1871 in Wien abgehaltenen 3. Allgemeinen Konferenz der Europäischen Gradmessung führte *Fligely*, seit 1868 Präsident der Österreichischen Kommission und gleichzeitig Vizepräsident der Permanenten Kommission für die Europäische Gradmessung, den Vorsitz. Diese Tagung wirkte sich sehr fruchtbringend für die österreichischen Gradmessungsarbeiten aus. Zunächst wurde die Kommission auf die doppelte Mitgliederzahl erweitert. Zu neuen Kommissären wurden der Leiter der Triangulierungsabteilung des MGI, Oberst *Ganahl*, der Geodäsieprofessor der Technischen Militärakademie *Wilhelm Tinter* und der berühmte Astronom Prof. *Dr. Theodor R. v. Oppolzer* ernannt. Ferner war beabsichtigt, sämtliche Gradmessungsarbeiten vom MGI ausführen zu lassen, jedoch der Kommission eine weitgehende Einflußnahme auf die Feld- und Kanzleiarbeit zu sichern. Dies scheiterte aber am Einspruch der ungarischen Delegation, welche die Gradmessung als getrennte Angelegenheit beider Reichshälften bezeichnete. So blieben die astronomischen Arbeiten weiterhin der Gradmessungskommission vorbehalten; dafür wurde aber die jährliche Dotation beträchtlich, nämlich auf 22000 Gulden erhöht. Schließlich wurde Ende 1873 ein eigenes Gradmessungsbüro unter *Oppolzers* Leitung gegründet. Dieser, ein hochbegabter Theoretiker, Beobachter und Organisator, der durch sein in jungen Jahren geschriebenes „Lehrbuch der Bahnbestimmung der Planeten und Kometen“ und durch seinen „Kanon der Finsternisse“ (von 1207 v. Chr. bis 2161 n. Chr.) weithin bekannt wurde, trieb die astronomischen Arbeiten, in erster Linie die Längenbestimmungen, energisch voran. Die Arbeiten waren im wesentlichen bereits 1876 abgeschlossen, so daß das Gradmessungsbüro nur mehr die Reduktion der Beobachtungen und die Publikation der Beobachtungs- und Rechnungsergebnisse zu besorgen hatte.

Fligelys geschickten Bemühungen als Präsident der Permanenten Kommission der Europäischen Gradmessung war vor allem auch der so wichtige Beitritt Frankreichs zu danken, das 1873 in Wien erstmals durch eine Delegation vertreten war, darunter der damalige Generalstabshauptmann *Perrier*. 1881 übernahm der hochverdiente Prof. *Herr* den Vorsitz in der Kommission. Unter den neuen Kommissionsmitgliedern ragen besonders zwei hervor, nämlich *Robert Daublebsky v. Sterneck* und *Heinrich Hartl*. Ersterer wurde weltberühmt durch die Erfindung der relativen Schwermessung mit invariablen Halbsekundenpendeln und die Kon-

struktion seines Konizidenzapparates. Er wurde Ehrendoktor der Universität Göttingen und Mitglied der Akademie der Wissenschaften in Wien. Letzterer, bekannt durch zahlreiche wissenschaftliche und praktische Arbeiten, wurde nach vorheriger Verleihung des Ehrendoktorates als Professor für Geodäsie an die Universität Wien berufen.

Nach *Herr's* Tode wurde 1885 *Oppolzer* zum 4. Präsidenten der Österreichischen Gradmessungskommission gewählt. Er hatte bereits 1884 seine absolute Schwere-messung im Keller der Universitäts-Sternwarte durchgeführt, welche zusammen mit der vorhergehenden absoluten Schwere-messung *Orff's* in München und mit den wenige Jahre darauf einsetzenden relativen Schwere-messungen das Wiener Schwere-system begründete, das 1911 durch das heute noch gültige Potsdamer Schwere-system abgelöst wurde. Erst 45 Jahre alt, starb *Oppolzer* im denkwürdigen Jahre 1886, in welchem auf der in Berlin abgehaltenen 8. Allgemeinen Konferenz die Europäische Gradmessung zur Internationalen Erdmessung erweitert und der größte deutsche Geodät nach *Gauß*, *Friedrich Robert Helmert* als Nachfolger *Baeyers* mit der Leitung des Geodätischen Institutes Potsdam und des Zentralbüros der Internationalen Erdmessung betraut wurde.

Herr's Nachfolger im Lehramt an der Wiener Technischen Hochschule, Prof. *Dr. Wilhelm Tinter*, präsierte der nunmehrigen Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung durch ein Vierteljahrhundert von 1887—1912. Zum Leiter des Gradmessungsbüros wurde der älteste Observator, der bekannte Chronologe Dozent *Dr. Schram* ernannt, während der Direktor der Sternwarte, Prof. *Dr. Weiss*, mit der Oberleitung betraut wurde. Es beginnt damit eine Zeit ruhiger Entwicklung und rastloser Arbeit. Einige später namhafte Gelehrte haben gegen Ende dieser Periode im Gradmessungsbüro gewirkt. Es sind dies der nachmalige Univ.-Prof. *Dr. Adalbert Prey* sowie drei spätere Professoren der Technischen Hochschule Wien, der bekannte Physiker *Ludwig Flamm*, der Mechaniker *Karl Wolf* und mein Vorgänger im Lehramt, Hofrat *Friedrich Hopfner*.

Nach *Tinters* Emeritierung 1911 wurde über Vorschlag *Helmerts* der Aachener Professor *Dr. Richard Schumann*, ein Großneffe des berühmten Komponisten, an die Lehrkanzel für Höhere Geodäsie berufen. Gemeinsam mit dem Hauptmann des MGI, *Leopold Andres*, wurde *Schumann* bald in die Kommission gewählt. Ihn folgte schon im nächsten Jahre nach *Tinters* Tode der Professor für Niedere Geodäsie an der Wiener Technischen Hochschule, *Dr. Eduard Doležal*. Als 6. Präsident legte bald darauf *Eduard Weiss* die Oberleitung des Gradmessungsbüros nieder, weil er seine Arbeit für abgeschlossen erachtete. 15 stattliche Bände der „Astronomischen Arbeiten des k. k. Gradmessungsbureau“ wurden von 1889—1917 publiziert. 13 davon enthielten insgesamt 41 Bestimmungen von Längendifferenzen, einer 6 Breiten- und 3 Azimutmessungen und einer 11 Pendelmessungen, an erster Stelle die schon erwähnte *Oppolzersche* Fundamentalmessung, sowie zehn weitere, vorhergehende Messungen, die noch ohne Rücksicht auf das Mitschwingen des Pendelstativs berechnet worden waren. Der neue Oberleiter des Büros, Hofrat *Schumann* (1914—22), nahm sofort die Berechnung des Prager Meridianbogens in Angriff, an welcher der damalige Adjunkt *Hopfner* durch zahlreiche neue Entwicklungen in hervorragendem Maße beteiligt war. Während des 1. Weltkrieges lag die ganze Arbeit in den

Händen der zwei ältesten Beamten, des Hofrates *Dr. Schram* und des Regierungsrates *Dr. Kühnert*, der übrigens durch einige gediegene Arbeiten zum Problem der Polhöhen-schwankung bekannt wurde. Gleich nach dem Kriege haben neben *Hopfner* vorübergehend der bedeutende spätere Münchner Mathematikprofessor *Dr. Josef Lense* und der spätere Leiter der wissenschaftlichen Abteilung des Bundesvermessungsamtes, Hofrat Prof. *Dr. Karl Mader*, am Gradmessungsbüro gewirkt. Der 16. Band der Gradmessungsarbeiten erschien als 1. Band einer geplanten neuen Folge unter dem Titel: „Der Meridianbogen Großenhain-Kremsmünster-Pola“ im Jahre 1922. Leider folgten ihm keine weiteren Bände. Jedoch können diesen Publikationen die 24 Bände der „Astronomisch-geodätischen Arbeiten des k. u. k. Militärgeographischen Institutes“ würdig an die Seite gestellt werden.

Im Jahre 1917 starb Präsident *Weiss*, nur sechs Tage nach dem großen *Helmert*. *Weiss'* Nachfolger wurde Professor *Doležal*, der die Kommission durch 20 Jahre, von 1917–37, leitete und als glänzender, zielbewußter und energischer Organisator in den ersten Nachkriegsjahren nicht nur der Kommission, sondern dem gesamten staatlichen Vermessungswesen sowie dem geodätischen Unterricht seinen Stempel aufdrückte. In die erste Zeit seiner Tätigkeit, noch während des Krieges, fallen die Verhandlungen in Berlin über einheitliche Vermessungs- und Kartenunterlagen für Deutschland und Österreich, die nach dem Kriege nur teilweise verwirklicht werden konnten. Geplant war ein für beide Staaten einheitliches Vermessungs- und Kartenwerk in Gauß-Krüger-Projektion mit dem Fundamentalpunkt Potsdam, dessen Streifensystem von Ferro aus gezählt werden sollte. Das Besselsche Ellipsoid sollte als Referenzfläche beibehalten werden und das internationale Meter als Maßeinheit dienen. Serbien und Bulgarien, womöglich auch die Türkei sollten in das System einbezogen werden und zu diesem Zweck eine Dreieckskette von Potsdam bis an die türkische Grenze nach Vornahme der notwendigen Ergänzungsmessungen einheitlich ausgeglichen werden.

Nach dem verlorenen Kriege und der Auflösung der Donaumonarchie wurde im neuen Österreich im Zuge der von *Doležal* angeregten Reform des staatlichen Vermessungswesens, mit Vollzugsanweisung der Staatsregierung vom 6. Juli 1919, die Unterstellung des gesamten staatlichen Vermessungswesens unter das Staatsamt für Handel und Gewerbe, Industrie und Bauten verfügt. Damit wurde auch die Österreichische Kommission für die Internationale Erdmessung dem heutigen Ministerium für Handel und Wiederaufbau unterstellt, während das Gradmessungsbüro dem im Jahre 1921 geschaffenen Bundesvermessungsamt als Abteilung III eingegliedert wurde. Aufgabe dieser Abteilung waren: „Wissenschaftliche, geodätische, astronomische und geophysikalische Arbeiten, insbesondere für Zwecke der Internationalen Erdmessung, Zeitbestimmungen und Uhrendienst“. Zum Vorstand dieser Abteilung wurde der vom Gradmessungsbüro übernommene Adjunkt *Dr. Hopfner* ernannt, der 1931 zum wirklichen Hofrat befördert wurde.

Es zeugt vom gesunden Lebenswillen, wenn damals die Österreichische Kommission für die Internationale Erdmessung nicht aufgelöst wurde. Denn die letzte Konvention der Erdmessung war unglückseligerweise Ende 1916 erloschen. Sechs neutrale Staaten versuchten die Erdmessung schlecht und recht über das Kriegsende hinaus am Leben zu erhalten. Als aber im September 1922 in Rom die Internationale

Union für Geodäsie und Geophysik gegründet wurde, zu deren sieben Assoziationen die eigentliche Nachfolgerin der Erdmessung, die Internationale Assoziation für Geodäsie zählt, wurden die im Kriege unterlegenen Nationen von der Mitgliedschaft ausgeschlossen. Dies kann man bei nüchterner Betrachtung politisch und menschlich begreiflich finden; es war aber ein Fehler, wie Herr *Tardi* in seiner vorjährigen Festrede betonte, und es ist überaus erfreulich, daß sich die Wissenschaft ihrer großen Rolle bei der Erhaltung des Weltfriedens immer mehr bewußt wird! In Österreich blieb nach dem ersten Weltkriege trotz aller politischen Schwierigkeiten der Gedanke einer geodätischen Zusammenarbeit wenigstens mit den Nachbarstaaten wach. Im Jahre 1928 erhielt die Kommission ihr derzeitiges Statut, demzufolge sie sich alle fünf Jahre neu zu konstituieren hat. Die Wahlen unterliegen der einvernehmlich mit dem Bundesministerium für Unterricht erteilten Genehmigung des Bundesministeriums für Handel und Wiederaufbau. Die Zahl der Mitglieder ist nicht beschränkt und hält derzeit bei 12. Der jeweilige Präsident des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen, zu welchem das Bundesvermessungsamt 1923 nach Auflösung der Normaleichungskommission erweitert wurde, gehört der Kommission als Träger einer Virilstimme an, zumal ja dieses Amt seither das ausführende Organ für den österreichischen Anteil an allen zwischenstaatlichen und internationalen geodätischen Gemeinschaftsarbeiten ist. Aber selbstverständlich kann der Präsident des Bundesamtes auch wirkliches Kommissionsmitglied sein, wie dies z. B. bei Herrn Präsidenten *Dipl.-Ing. Lego* der Fall war und wie es auch auf den derzeitigen Präsidenten Herrn *Dr. Neumaier* zutrifft. Wesentlichste Aufgabe der Kommission ist die Vertretung der österr. Interessen bei allen zwischenstaatlichen, geodätischen Verhandlungen sowie die Publikation von Arbeiten der Kommissionsmitglieder. Für diese Aufgaben steht der Kommission eine jährliche Dotation von 40000 S zur Verfügung. Darüber hinaus aber hat sie in den seither verflossenen 35 Jahren beim vorgesetzten Bundesministerium für Handel und Wiederaufbau, insbesondere beim zuständigen Sektionsleiter und dessen Fachreferenten in allen sonstigen Belangen und Sorgen stets vollstes Verständnis gefunden und es ist mir ein Bedürfnis, hierfür an dieser Stelle unseren herzlichsten Dank auszusprechen.

Es würde viel zu weit führen, wollte ich auf die Neutriangulierung Österreichs und auf die Einführung der Gauß-Krüger-Koordination sowie auf die bedeutende Rolle, die dabei der Erdmessungskommission zufiel, näher eingehen. Wer sich dafür interessiert, kann die Details in einem Aufsatz des leider viel zu früh verstorbenen Triangulierungsleiters *Dr. Levasseur* nachlesen, der unter dem Titel: „50 Jahre Gauß-Krüger-Koordinaten in Österreich“ 1960 in der *Öst. Zeitschr. f. Verm.-Wesen* erschienen ist, die übrigens auch das offizielle Organ der Kommission ist. In aller Kürze sei nur erwähnt, daß die Anfänge der Neutriangulierung in das Jahr 1910 zurückreichen und daß sich alle Triangulierungsleiter, Hofrat *Winter*, der nachmalige Hochschulprofessor *Dr. Rohrer*, die Hofräte *Krauland*, *Eberwein* und *Reibhorn* dabei große Verdienste erworben haben. Prof. *Rohrer* hat sich sehr um die wissenschaftliche Durchdringung der Aufgabe bemüht. Ein beträchtlicher Anteil an der 1. Ordnung, die hier im Vordergrund des Interesses steht, fällt in die Amtsperiode Hofrat *Kraulands*, der mit seiner glühenden Begeisterung sein ganzes Personal anspornte. Die Erneuerung des Hauptdreiecksnetzes des ehemaligen MGI

war im Jahre 1959 abgeschlossen. Das neue Netz umfaßt einschließlich der im Ausland gelegenen Grenzpunkte 158 Punkte 1. O. Aber auch die Abteilung Erdmessung, die Nachfolgerin des Gradmessungsbüros, hat unter ihren Leitern Hofrat *Hopfner*, Hofrat *Mader*, meiner Wenigkeit und Oberrat *Mitter*, ganze Arbeit geleistet. Durch zahlreiche Polhöhen- und Azimutmessungen liegen bereits auf dem Großteil der Punkte 1. O. die beiden Lotabweichungskomponenten beobachtet vor, während eine Vermehrung der Laplacepunkte im Programm steht. Das österreichische Präzisionsnivelement ist in das Europäische Höhennetz eingebaut und durch Schwere-messungen auf den Hauptlinien konnten bereits sämtliche geopotentielle Knoten ermittelt werden. Eine wichtige Rolle spielte die Österreichische Kommission f. d. Internationale Erdmessung besonders bei den zwischenstaatlichen Arbeiten, so bei den von der Bodenseekonferenz angeregten Arbeiten im Bodenseegebiet und vor allem bei der Messung der Basis Heerbrugg, einer idealen Gemeinschaftsarbeit zwischen Deutschland, der Schweiz und Österreich. Die Schaffung mehrerer Pendelstationen und damit eines Schwerefundamentalnetzes war der Kommission und dem Bundesamt nur durch die großzügige Unterstützung durch das Deutsche Geodätische Forschungsinstitut in München möglich, wofür dem anwesenden Direktor dieses Institutes, Herrn Prof. *Kneißl*, herzlichst gedankt sei. Andere wichtige Arbeiten, wie die Studien zur elektronischen Entfernungsmessung im Grazer Testnetz, die gediegenen Refraktionsuntersuchungen *Mitters*, die vielversprechende Errichtung einer Erdzeitenstation im Grazer Schloßberg durch Prof. *Rinner*, die gravimetrischen Messungen meines Institutes auf dem Buschberg, mit denen Dozent *Dr. Embacher* das schwierige Problem der Lotkrümmungsbestimmung fördern soll, sind nicht im Schoße der Erdmessungskommission geplant worden, sondern verdanken ihren Ursprung persönlicher Initiative. Dennoch darf ich sie hier erwähnen, weil unsere Kommission sofort ihre Bedeutung erkannt und sie mit ihrem ganzen Gewicht unterstützt hat.

Mit dieser knappen Aufzählung der wichtigsten Arbeiten bin ich im Interesse einer strafferen Zusammenfassung der äußeren Geschichte der Kommission vorausgeeilt. Diese sei daher kurz nachgeholt. Im Jahre 1937 traten Hofrat *Doležal* und Hofrat *Schumann* aus Altersgründen aus der Kommission aus. *Schumann* starb knapp vor dem Ende des zweiten Weltkrieges, während Hofrat *Doležal* noch in voller Rüstigkeit seinen 90. Geburtstag feiern konnte. Eine umfangreiche Festschrift zeugt von der hohen Achtung, die dem hochverdienten Manne allseits entgegengebracht wurde. Sein treuester Freund und ehemaliger Schüler, Präsident *Lego*, setzte ihm in einem von tiefster Ehrfurcht zeugenden Lebensbild ein bleibendes Denkmal. *Doležal* starb im 94. Lebensjahre im Jahre 1955. Nach *Doležals* Rücktritt 1937 wurde Generalmajor *Andres*, der sich um die Publikation der Gradmessungsarbeiten des MGI besondere Verdienste erworben hatte, achter Präsident. Nach dem zweiten Weltkriege, 1946, wurde die Kommission neu konstituiert und an ihre Spitze trat Hofrat *Hopfner*, der bereits 1936 nach *Schumanns* Emeritierung an die Lehrkanzel für Höhere Geodäsie und Sphärische Astronomie berufen worden war. In die Zeit seiner Präsidentschaft fällt die Aufnahme Österreichs in die Internationale Union f. Geodäsie und Geophysik auf der Generalversammlung in Oslo 1948. Nach *Hopfners* tragischem Tode im Hintersteinersee im September 1949

wurde der Universitätsprofessor *Dr. Adalbert Prey* einstimmig zum Präsidenten gewählt; aber schon acht Tage nach seiner Wahl ereilte auch ihn der Tod. Im nächsten Dezennium, 1950–60, leitete Präsident *Dipl.-Ing. Karl Lego* die Geschicke der Kommission. *Lego*, der 1938 pensioniert worden war, stellte sofort nach Kriegsende seine ganze Arbeitskraft wieder dem Bundesamt f. Eich- u. Vermessungswesen zur Verfügung, an dessen Spitze er berufen wurde. Daß dieses Amt sobald wieder aktionsfähig war, ist in erster Linie seinem großen Eifer, seinem diplomatischen Geschick und nicht zuletzt seiner strengen Sachlichkeit und reinen Menschlichkeit zu danken. Im gleichen Sinne war er auch als 11. Kommissionspräsident stets bestrebt, das Ansehen und den Einfluß dieser Körperschaft zu heben. So organisierte er 1953 auch die 90-Jahr-Feier der Kommission, die einen glänzenden Verlauf nahm. Der Festakt fand im Festsaal der Technischen Hochschule statt, um die enge Verbundenheit der Kommission mit der Wiener Geodätenschule zu unterstreichen. Das prominenteste Kommissionsmitglied war damals der emeritierte Universitätsprofessor und Direktor der Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik, *Dr. Heinrich Ficker*, später Präsident der Österreichischen Akademie der Wissenschaften. Nach Ablauf der letzten Amtsperiode, Ende 1960, legten Präsident *Lego* und Prof. *Rohrer* aus Altersgründen ihre Funktion nieder. Die gegenwärtigen Kommissionsmitglieder sind außer mir:

1. *Dipl.-Ing. Dr. Franz Ackerl*, o. Professor für Geodäsie und Photogrammetrie an der Hochschule für Bodenkultur, Vorsitzender d. Österr. Gesellschaft für Photogrammetrie.

2. *Dipl.-Ing. Dr. Alois Barvir*, o. Prof. f. Landes- u. Katastervermessung an der TH Wien, Obmann des Österr. Vereins für Vermessungswesens.

3. *Dipl.-Ing. Dr. Friedrich Hauer*, o. Prof. f. Allgemeine Geodäsie an der TH Wien, korr. Mitglied der Deutschen Geodätischen Kommission.

4. *Dr. Josef Hopmann*, emer. Univ.-Prof. u. Direktor der Universitäts-Sternwarte Wien; K. Mitgl. d. Öst. Akad. d. Wiss., der päpstl. Adak. Rom; o. Mitgl. der Sächs. Akad. d. Wiss. Leipzig.

5. *Dipl.-Ing. Dr. Karl Hubeny*, o. Prof. am I. Institut f. Geodäsie der TH Graz.

6. *Dr. phil. Karl Mader*, Wirkl. Hofrat i. R. u. tit. a. o. Prof. der TH Wien, ehem. Leiter der Abteilung Erdmessung des Bundesamtes f. Eich- u. Vermessungswesen, korr. Mitglied der Akad. d. Wiss. Wien.

7. *Dipl.-Ing. Dr. Josef Mitter*, Leiter der Abteilung Erdmessung des BAFEuV., Sekretär der Kommission.

8. *Dr. h. c. Karl Neumaier*, Präsident des BAFEuV.

9. *Dipl.-Ing. Dr. Karl Rinner*, o. Prof. am II. Institut f. Geodäsie der TH Graz, Korr. Mtgl. der DGK.

10. *Dr. Ferdinand Steinhauser*, Univ.-Prof. u. Direktor der Zentralanstalt für Meteorologie u. Geodynamik Wien, Wirkl. Mitglied der Österreich. Akademie d. Wissenschaften u. der New York Academy of Sciences, Vorsitzender der Geophysik. Komm. der Akad. d. Wiss.

11. *Dr. Max Toperczer*, a. o. Univ.-Prof. u. Abteilungsleiter der Zentralanstalt f. Meteorologie u. Geodynamik, korr. Mitglied d. Österr. Akad. d. Wiss.

Sie ersehen daraus, daß unsere Kommission so wie auch in anderen Ländern nicht engstirnig geodätisch ausgerichtet ist. Sie hat sozusagen einen Januskopf. Nach rückwärts gerichtet spiegelt sie noch den Glanz der großen Astronomen wider, die seinerzeit die geodätische Wissenschaft begründet haben. Heute aber, im Zeitalter der gigantischen astrophysikalischen Forschungen, überlassen die Astronomen gerne die Erdmessung den berufenen Geodäten. Nach vorwärts gerichtet, ist aber die Erdmessung und die Physikalische Geodäsie nur ein Zweig der viel umfassenderen Geophysik. Darum haben sich die Geodäten und Geophysiker in vielen Staaten bereits in einem Nationalkomitee für Geodäsie und Geophysik zusammengefunden und bilden so ein nationales Abbild der Internationalen Union für Geodäsie und Geophysik. Aus ähnlichen Erwägungen heraus ist in Österreich bereits 1952 bei der Akademie der Wissenschaften eine Geophysikalische Kommission ins Leben gerufen worden und der Einfluß der übergeordneten internationalen Organisation kommt darin zu Ausdruck, daß fünf Mitglieder gleichzeitig beiden Kommissionen angehören.

Habe ich bisher die enge Wechselwirkung zwischen Kommission einerseits und dem Militärgeographischen Institut oder dem heutigen Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen andererseits aufgezeigt, so obliegt es mir nun, die ebenso enge Beziehung der Kommission und der Wiener Schule der Höheren Geodäsie zu schildern. Von meinen vier Vorgängern an der Lehrkanzel waren ja drei Präsidenten und einer durch 8 Jahre Oberleiter des Gradmessungsbüros.

Der Begründer der Lehrkanzel, Prof. *Dr. Josef Herr*, war ein erstaunlich vielseitiger Mann. Ursprünglich Philosoph und Jurist, war er in jungen Jahren als Ingenieur bei der ungarischen Zentralbahn und bei der hydrographischen Aufnahme der Donau tätig. Mit 33 Jahren wurde er 1852 als Professor der Höheren Mathematik und Praktischen Geometrie ans Joanneum in Graz berufen. Seit 1856 wirkte er am Polytechnischen Institut Wien als Professor der Praktischen Geometrie, war einer der führenden Männer bei der Umwandlung des Institutes zur Technischen Hochschule, wurde im November 1866 feierlich als erster Rektor inauguriert und nahm noch im gleichen Jahre die Lehrtätigkeit an seiner neuen Lehrkanzel auf. Dies alles neben seinen bereits gewürdigten großen organisatorischen Leistungen! Überdies redigierte er 8 Jahre hindurch die Zeitschrift des Österr. Ingenieur- und Architektenvereines. Als Gradmessungskommissär bestimmte er die Längenunterschiede Wien—Fiume und Wien—Kremsmünster. 1864 veröffentlichte er ein zweibändiges Lehrbuch der höheren Mathematik, das drei Auflagen erlebte. Schließlich fand er neben seiner dreifachen Beschäftigung als Ordinarius, als Präsident der Gradmessungskommission und als Direktor der Normaleichungskommission noch die Zeit, sein klassisch zu nennendes „Lehrbuch der sphärischen Astronomie mit besonderer Berücksichtigung der geographischen Ortsbestimmung“ zu schreiben, das dem Helmertschen Werk würdig an die Seite gestellt werden darf. Leider war es *Herr* nicht mehr vergönnt, dieses Buch selbst zu veröffentlichen. Er starb Ende September 1884 an einem Herzleiden als Folge seiner Überarbeitung. Erst sein Nachfolger *Tinter* konnte das Werk an Hand der Herrschen Manuskripte vollenden. Es erschien 1887 und erlebte noch 1922 einen unveränderten Neudruck.

Im Gegensatz zum Theoretiker *Herr* war *Dr. Wilhelm Tinter* mehr Praktiker. Der Schwerpunkt seiner wissenschaftlichen Tätigkeit lag auf instrumentellem Gebiete und im Felde der Präzisionsbeobachtungen. Ab 1870 war er Professor für Höhere Geodäsie und Sphärische Astronomie an der k. k. Militärakademie, wurde 1873 Ordinarius für Praktische Geometrie an der Technischen Hochschule und rückte nach *Herr*'s Tode zur Höheren Geodäsie auf. *Tinter* war nicht nur ein glänzender Pädagoge, sondern stellte auch seine ganze Arbeitskraft in den Dienst der Hochschule. Für das Studienjahr 1884/85 wurde er zum Rektor gewählt. Er schrieb zahlreiche Monographien über geodätische Instrumente und mehrere seiner muster-gültigen astronomischen Beobachtungen und Reduktionen wurden in den Denkschriften und Sitzungsberichten der Akademie veröffentlicht.

Tinters Nachfolger im Lehramt, *Dr. Richard Schumann*, ein Schüler von *Heinrich Bruns*, hatte während seiner 11jährigen Dienstzeit am Geodätischen Institut Potsdam unter *Helmerts* Leitung reichlich Gelegenheit, sich mit allen Problemen der Erdmessung vertraut zu machen. Als Ordinarius an der Technischen Hochschule Aachen kam er dann auch mit der Praktischen Geodäsie in Berührung. So wurde er schon ein Jahr nach seiner Berufung nach Wien mit der Oberleitung des Gradmessungsbüros betraut, welcher Tätigkeit eine Reihe beachtlicher geodätischer Arbeiten zu verdanken ist, neben dem schon erwähnten Meridianbogen Großhain—Kremsmünster—Pola das Astronomische Nivellement bei Laibach in Krain und einige Lotabweichungsuntersuchungen. Mehrere Jahre widmete sich *Schumann* den relativen Pendelmessungen und der Eötvösschen Drehwaage. Weiters beschäftigte er sich mit der Frage der Geoidbestimmung, mit dem Problem der Isostasie und mit der vektoriellen Ausgleichung geodätischer Figuren. Sein Hauptarbeitsgebiet war aber das Problem der Polhöenschwankung, dem er zahlreiche numerische Untersuchungen widmete. Diese Arbeiten waren teilweise umstritten. Denn trotz der theoretischen Schwierigkeiten war er fest überzeugt, daß nur der Mond als Energiequelle für die Breitenvariation in Frage kommt. *Schumann* war innig mit *Doležal* befreundet und beteiligte sich daher tatkräftig an dessen organisatorischen Bestrebungen, voran an der Reform des geodätischen Studiums, die schließlich 1924 zur Errichtung einer Abteilung für Vermessungswesen führte. Auch war er im Kollegium hoch geachtet und wurde bereits zwei Jahre nach seiner Berufung zum Rektor gewählt. Zahlreiche sonstige Ehrungen wurden ihm zuteil. Er war wirkl. Mitglied der Österr. Akad. d. Wiss., auswärtiges Mitglied der Ungar. Akad. d. Wiss. und Mitglied der Akademie der Naturforscher in Halle. Die Technische Hochschule Berlin verlieh ihm 1926 das Ehrendoktorat.

Wie schon erwähnt, wurde nach *Schumanns* Emeritierung 1936 Hofrat *Dr. Friedrich Hopfner* sein Nachfolger im Lehramt. Wie *Herr* war auch *Hopfner* ein sehr vielseitiger Mann. Vor seiner Ernennung zum Adjunkten am Gradmessungsbüro im Jahre 1912 war er Assistent am Meteorologischen Institut Berlin, am Institut für Kosmische Physik in Innsbruck und am Maritimen Observatorium in Triest. Als Leiter der wissenschaftlichen Abteilung des Bundesvermessungsamtes organisierte er den astronomisch-geodätischen Dienst neu. Aus dieser Zeit verdanken wir ihm die ersten drahtlosen Längenbestimmungen, die Ausgestaltung des Zeitdienstes, die Durchführung von Pendelmessungen mit drahtloser Fernsteuerung

der Koinzidentapparate sowie eine magnetische Landesaufnahme in Zusammenarbeit mit der Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik. Aus politischen Gründen pensioniert, widmete sich *Hopfner* von 1938 bis 1945 in stiller Zurückgezogenheit ganz seinen Studien. Nach dem Kriege rehabilitiert, war er im Studienjahr 1948/49 Rektor der Hochschule. Gerade am Ende seiner Amtstätigkeit ereilte ihn am 5. September 1949 auf ungewöhnlich tragische Weise im Hintersteinersee am Fuße des Wilden Kaisers der Tod, womit die internationale Geodäsie einen ihrer bedeutendsten Gelehrten verlor. *Hopfners* Lebenswerk ist ungewöhnlich vielseitig. Über Bahnbestimmungen und Ephemeridenrechnungen für eine Reihe von Planetoiden führte seine Tätigkeit in Triest zum Gezeitenproblem, das er im Handbuch der Experimentalphysik klar schilderte. Aus seinen jüngeren Jahren ist noch eine umfassende Studie „Mathematische Grundlage zu einer astronomischen Theorie der Klimaschwankungen“ erwähnenswert. Gefesselt von *Brunns'* klassischer Abhandlung: „Die Figur der Erde“ veröffentlichte er 1927 unter dem gleichen Titel eine Einführung, die viele Studenten und jüngere Beamte für die Höhere Geodäsie begeisterte. Ein Grundlagenfanatiker, hat er mit seinem kritischen Geist in einer wahren Flut von Zeitschriftenartikeln das geodätische Gewissen wachgerüttelt, ohne darüber zu vergessen, seine Gedankengänge von Zeit zu Zeit in geschlossener Form niederzulegen. So erschienen 1931 seine „Neuen Wege zur Bestimmung der Erdfigur“, 1933 sein Buch: „Physikalische Geodäsie“ und der große Artikel: „Die Figur der Erde, Dichte und Druck im Erdinnern“ in Gutenbergs Handbuch der Geophysik und als reifste Frucht im Todesjahr seine „Grundlagen der Höheren Geodäsie“. Temperamentvoll hat er manchenmal übers Ziel geschossen, so daß nicht alles von bleibendem Wert ist. Aber wer könnte das schon von seiner eigenen Leistung behaupten? Von bleibendem Wert ist aber, daß sein kritischer Geist wie ein Sauerteig wirkte, der viele fast erstarrte Probleme, wie die Schwerereduktionen, die Isostasie, die Elliptizität des Erdäquators und die Abplattung des Niveausphäroides wieder in Fluß brachte.

Zur Wiener Schule zählt aber *noch* ein großer Toter, *Adalbert Prey*. Denn dieser ist nicht nur ein gebürtiger Wiener, sondern hat auch von den 40 Jahren seines akademischen Lehramtes fast die Hälfte, von 1930 bis knapp vor seinem Tode, als Ordinarius für Theoretische Astronomie an der Universität Wien gewirkt. Außerdem hat er sich in reiferen Jahren immer mehr der Physikalischen Geodäsie und sonstigen geophysikalischen Problemen zugewandt. *Prey* ist jedem Geodäten durch die nach ihm benannte Schwerereduktion und durch seine wichtige Entwicklung der Höhen- und Tiefenverhältnisse der Erde nach Kugelfunktionen bis zur 16. O. bekannt. Diese große Arbeit, die *Prey* in 13 Jahren während seines Prager Lehramtes bewältigte, hat sich für viele geophysikalische Untersuchungen und insbesondere für die Abklärung des Problems der Isostasie überaus fruchtbringend ausgewirkt. Sie wurde erst in jüngster Zeit durch die neue Delfter Entwicklung bis einschließlich der 32. O. abgelöst. *Preys* geophysikalisches Lebenswerk gruppiert sich um drei große Probleme, nämlich synthetische Untersuchungen zur Isostasie, die Bestimmung der Elastizitäts- und Viskositätskonstante der Erde und die Möglichkeit von Kontinentalverschiebungen. Darüber hinaus verdanken wir ihm eine sehr originelle Methode des astronomischen Nivellements. An Büchern sind zu nennen: „Die An-

wendung der Methoden der Erdmessung auf geophysische Probleme“, „Die Theorie der Isostasie, ihre Entwicklung und ihre Ergebnisse“ und eine „Einführung in die sphärische Astronomie“.

Ich bin am Ende angelangt. 100 Jahre ist die Österreichische Kommission für die Internationale Erdmessung alt, nur drei Jahre jünger die Speziallehrkanzel an unserer Technischen Hochschule. In dieser langen Zeit waren beide stets in irgendeiner Form in einer Art Personalunion verbunden. Ihre Vertreter haben beiden Institutionen im gesamten deutschen Sprachraum, ja in ganz Europa eine geachtete Position zu verschaffen gewußt und es liegt an den derzeitigen Mitgliedern der Kommission, diese Position im edlen Wettstreit der Geister zu behaupten und zu mehren!

Bankettansprachen

Prof. Dr. h. c. Dr. Max Kneißl, München

Sehr verehrter Herr Staatssekretär, Magnifizienz, meine Herren Präsidenten! Hochverehrte Festversammlung, meine sehr verehrten Damen und Herren!

Die deutsche Geodäsie freut sich aufrichtig, der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung zum Feste ihres hundertjährigen Geburtstages die herzlichsten Glückwünsche übermitteln zu dürfen. Ich habe die große Freude und Ehre als Vertreter der Deutschen Geodätischen Kommission, des Deutschen Geodätischen Forschungsinstituts und der Arbeitsgemeinschaft der Vermessungsverwaltungen der Länder der Bundesrepublik Deutschland die Glückwünsche zu ihrem heutigen Festtage zu übermitteln. Dieser Festtag ist nicht nur für Sie, sondern für uns alle von ganz wesentlicher Bedeutung, weil gerade die Österreichische Kommission für die Internationale Erdmessung zu den Gründungsmitgliedern der von General von *Bayer* ins Leben gerufenen Internationalen Erdmessung zählt. Sie ist aber auch für uns alle von wesentlicher Bedeutung, weil die Österreichische Kommission für die Internationale Erdmessung von den ersten Gründungsjahren bis heute ganz wesentliche Beiträge zur Entwicklung der Erdmessung geleistet hat. Als Vertreter der Bayerischen Kommission für die Internationale Erdmessung ist es für mich etwas schmerzlich, daß die Schweizerische Geodätische Kommission schon im Jahre 1861, die Österreichische Kommission für die Internationale Erdmessung im Jahre 1863 und die Bayern erst im Jahre 1864 der von General von *Bayer* gebildeten internationalen Kommission beigetreten sind. Unsere freundschaftlichen Beziehungen zu Wien und Zürich sind aber so eng, daß wir Gelegenheit haben, die hundertsten Geburtstage auf einige Jahre zu verteilen.

Die Geodäsie verbindet nicht nur ausgewählte Punkte der Erdoberfläche zu einem mehr oder weniger homogenen Dreiecks-, Höhen- und Schwerenet, sondern sie hat auch die schöne Eigenschaft als eine der ältesten Wissenschaften, die Herzen der Geodäten besonders eng miteinander zu verbinden. Wir dürfen Ihnen versichern, daß wir alle gerne Ihrer Einladung gefolgt sind und daß wir uns freuen, in Ihrem Land herzlicher Neutralität so viele Freunde aus Ost und West begrüßen zu können. Wir genießen die Atmosphäre wirklicher internationaler Verbundenheit,

die durch wissenschaftliche Diskussion gestärkt, durch die schöne Tradition Ihrer Stadt gefestigt, durch die sprichwörtliche österreichische Gastfreundschaft geistig beschwingt wird und eine herzliche Aussprache von Mensch zu Mensch möglich macht.

Unser Kollege, Herr Professor Hofrat *Dr. Karl Ledersteger*, hat es in freundlicher Weise auf sich genommen, sämtliche wissenschaftlichen Reden zu übernehmen. Er entbindet uns damit von der Verpflichtung, ein Loblied auf unsere Wissenschaft anzustimmen. Die österreichische Geodäsie blickt auf eine jahrhundertealte Tradition, auf eine wundervolle zentrale Organisation, die niemals zentralistisch, sondern im wahren Sinn des Wortes stets föderalistisch war und trotzdem zentral und von einer Stelle aus wirkt. Wir bewundern in Österreich die Leistungen für die Entwicklung der Erdmessung, wir bewundern aber auch in gleicher Weise die Leistungen Ihres Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen, die Entwicklung und den hohen Stand Ihrer geodätischen und kartographischen, vor allem aber auch Ihre photogrammetrischen Arbeiten. Wir bewundern die Automation im Vermessungswesen, in der gerade das Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen eine führende Rolle in der Welt hat und die Leistungen Ihrer Lehrstühle und Institute für Geodäsie, Photogrammetrie und Kartographie. Wenn hier nicht auf die Leistungen Einzelner eingegangen werden soll, so darf doch erinnert werden an Herrn *Dr. Eduard Doležal*. Für jeden von uns, der diesen einmaligen Mann noch erleben durfte, bleibt jede Begegnung mit ihm eine schöne und unvergeßliche Erinnerung. Weiter klingen auf die Namen des Hofrats *Schumann*, des Professors *Hopfner* und die Namen unserer derzeitigen Kollegen, von denen stellvertretend vor allem unser Gastgeber, Herr *Karl Ledersteger* genannt werden darf, der mit seinen eigenwilligen Theorien in aller Welt bekannt und angesehen ist. Er macht es uns wirklich schwer ihm zu folgen, denn seine Bezugsflächen, seine Ellipsoide, Geoide, Cogeoiden, Niveau- und Normalsphäroide oder wie er sie sonst noch nennen mag, streben völlig „hypothese-frei“ immer mehr der Zahl „Unendlich hoch drei“ zu. Wir haben volles Verständnis, daß er sich selber seine Theorien und seine Ansichten so schwer macht, er möchte aber dafür Verständnis haben, daß im Schlepptau seines Schwunges eine ganze Generation von mehr oder weniger begabten Geodäten ungeduldig auf die endgültige Form seiner Theorien wartet. Wir denken aber auch an die Präsidenten des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen, denen wir eine Reihe von wissenschaftlichen und praktischen Erkenntnissen verdanken und denen wir im Laufe der letzten Jahrzehnte in treuer Verbundenheit und Freundschaft so oft die Hände drücken durften. Ich denke hierbei an den Präsidenten *Dipl.-Ing. Lego*, Präsident *Dipl.-Ing. Dr. Franz Schiffmann* und den derzeitigen Präsidenten *Dr. h. c. Neumaier*.

Wir möchten am heutigen Festtag der Bundesrepublik Österreich und allen Vertretern unseres Faches zu den Leistungen der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen herzlich gratulieren. Wir sind sicher, daß die große Tradition der österreichischen Geodäsie sich zum Nutzen Ihres schönen Landes und zur Freude der internationalen Geodäsie auch im kommenden Jahrhundert behaupten und weiter entwickeln wird. Hierzu ein herzliches „Glück Auf!“

Kneißl

Prof. Dr. h. c. F. Kobold, Zürich

Hohe Festversammlung!

Im Namen der Schweizerischen Geodätischen Kommission, der Eidgenössischen Landestopographie und der Fachkollegen der Schweiz habe ich die große Ehre, der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung zu ihrem hundertsten Geburtstag aufrichtig und von Herzen zu gratulieren.

Zwischen der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und der Schweizerischen Geodätischen Kommission bestehen seit hundert Jahren die freundschaftlichsten Beziehungen. Unsere schweizerische Kommission hat außerordentlich viele und wertvolle Anregungen von den österreichischen Kollegen empfangen können. Mehrere Arbeiten im Grenzgebiet zwischen den beiden Staaten wurden gemeinsam durchgeführt und den schweizerischen Geodäten sind etwa die Punkte Pfänder und Hoher Freschen ebensogut bekannt wie den österreichischen Kollegen die Punkte Säntis und Gäbris. Wenn die internationale Basis Heerbrugg, die im Jahre 1959 gemessen worden ist, auf schweizerischem Gebiet liegt, so ist das fast ein Zufall, denn bei den ersten Projekten wurde eine Basis auf österreichischem Gebiet studiert. Die schweizerischen Geodäten sind für die vielen Anregungen, die ihnen die österreichischen Kollegen boten, äußerst dankbar, und als Zeichen dieser Dankbarkeit waren sie gelegentlich in der Lage, der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung mit Instrumenten auszuhelfen, an denen die Österreichische Kommission nach den Kriegen arm war.

Nachdem heute morgen der derzeitige Präsident der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung, Herr Prof. *Ledersteger*, den wir in der Schweiz als unsern Freund betrachten dürfen, in seiner Festansprache auf die vielen bedeutenden Männer hingewiesen hat, die Mitglieder der Österreichischen Kommission waren, und mit denen die Schweizerische Kommission in früheren Jahrzehnten in Verbindung stand, so ist es mehr als nur ein Zeichen der Höflichkeit, sondern ein Zeichen aufrichtiger Dankbarkeit, wenn ich darauf hinweise, daß die Beziehungen besonders eng sind, seitdem Prof. *Ledersteger* die Österreichische Kommission leitet.

In dieser Festansprache hatte der Präsident der Österreichischen Kommission die Liebenswürdigkeit, das Hundertjahr-Jubiläum der Schweizerischen Geodätischen Kommission, das vor zwei Jahren stattfand, zu erwähnen und er drückte die Hoffnung aus, daß das Fest in Wien einen ebenso würdigen Verlauf nehme wie seinerzeit das Fest in Zürich. Ich möchte ihm und allen österreichischen Kollegen versichern, daß alle Ausländer hier, speziell die Schweizer, aufs höchste beeindruckt sind, wie wohlüberlegt die Vorbereitungen getroffen wurden und in welchem feierlichem Rahmen Ansprachen und Bankette gehalten werden. Ich darf gleich beifügen, daß ohne Zweifel die Festlichkeiten in Wien diejenigen von Zürich weit übertreffen werden. Denn hier in Wien werden nach Programm nicht nur Festansprachen gehalten und Bankette gefeiert, sondern hier wird erst noch ein Fachvortrag gehalten. Und zwar ist es der Präsident der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung selbst, der uns in seine neuesten Studien über die Erdfigur blicken lassen wird. Wir alle sind immer wieder erstaunt über die Tiefe seines Wissens,

die Fülle seiner Gedanken, und wir schätzen es sogar, wenn er, wie es zu einem Wissenschaftler von Rang gehört, seine Meinung über ein derart kompliziertes Problem wie dasjenige der Erdfigur, nicht allzu selten ändert.

Wir freuen uns alle auf diesen Festvortrag und wir freuen uns auf die weiteren Veranstaltungen, die mit der Jubiläumsfeier verbunden sind. Wir danken der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung herzlich für die Einladung und wir werden uns alle noch lange an diese schöne Feier erinnern.

Der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung wünschen wir beim Eintritt in das zweite Jahrhundert, daß es ihr gelingen möge, den ausgezeichneten Ruf, den sie sich in den vergangenen hundert Jahren erworben hat, noch zu festigen.

Prof. Dr. h. c., Dr. A. Tárzy-Hornoch, Oedenburg

Hohe Festversammlung!

Es ist mir eine besondere Ehre, daß ich als Vertreter der Ungarischen Akademie der Wissenschaften an dieser erhabenen Feier teilnehmen und als Vorsitzender der Ungarischen Kommission der Union für Geodäsie und Geophysik die besten Wünsche der ungarischen Kollegen überbringen kann.

Hundert Jahre sind in der Wissenschaft, besonders bei der stürmischen Entwicklung der Gegenwart, sehr viel und erst recht viel, wenn man die großen Erfolge der österreichischen Geodäten mitberücksichtigt. Für die Geodäten aus Ungarn besteht noch ein besonderer Anlaß mitzufeiern: Bis 1896, also im ersten Drittel der hundert Jahre vertrat die Österreichische Kommission auch Ungarn und sie hatte so auch ungarische Mitglieder. Wohl wurde Ungarn dann selbstständiges Mitglied der Internationalen Erdmessung und später der Union für Geodäsie und Geophysik, die freundschaftliche Zusammenarbeit hörte aber damit nicht auf, besonders nicht im Jahre 1906, als die Internationale Erdmessung ihre Sitzung in Budapest abgehalten hat. Es gereicht uns zum Vergnügen feststellen zu dürfen, daß zwischen den österreichischen und ungarischen Geodäten auch in der Gegenwart ein fruchtbringendes, herzliches Verhältnis besteht.

Wir erachten den so hohen Stand der geodätischen und verwandten Wissenschaften in Österreich als ein günstiges Omen für das kommende zweite Jahrhundert. Wir wünschen der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung weitere würdige Erfolge zum Ruhme des eigenen Landes und zum Wohle der gesamten Menschheit!



Feldmarschall-Leutnant Ritter von Fligely

Direktor des Militärgeographischen Institutes
Präsident 1871 — 75



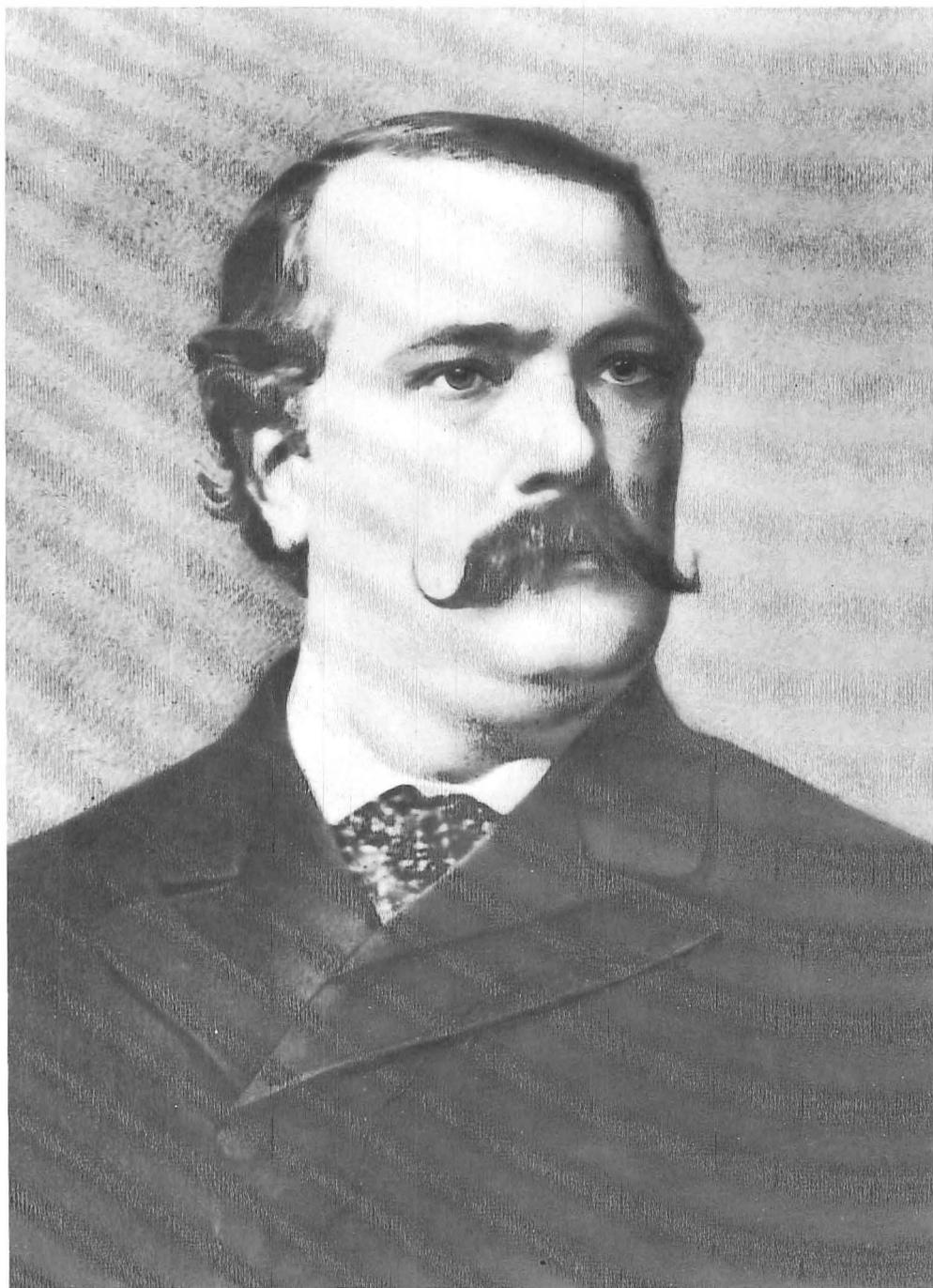
Oberst Johann Ritter von Ganahl

Leiter des Triangulierungs- und Kalkülbüros im Militärgeogr. Institut
Präsident 1876—79



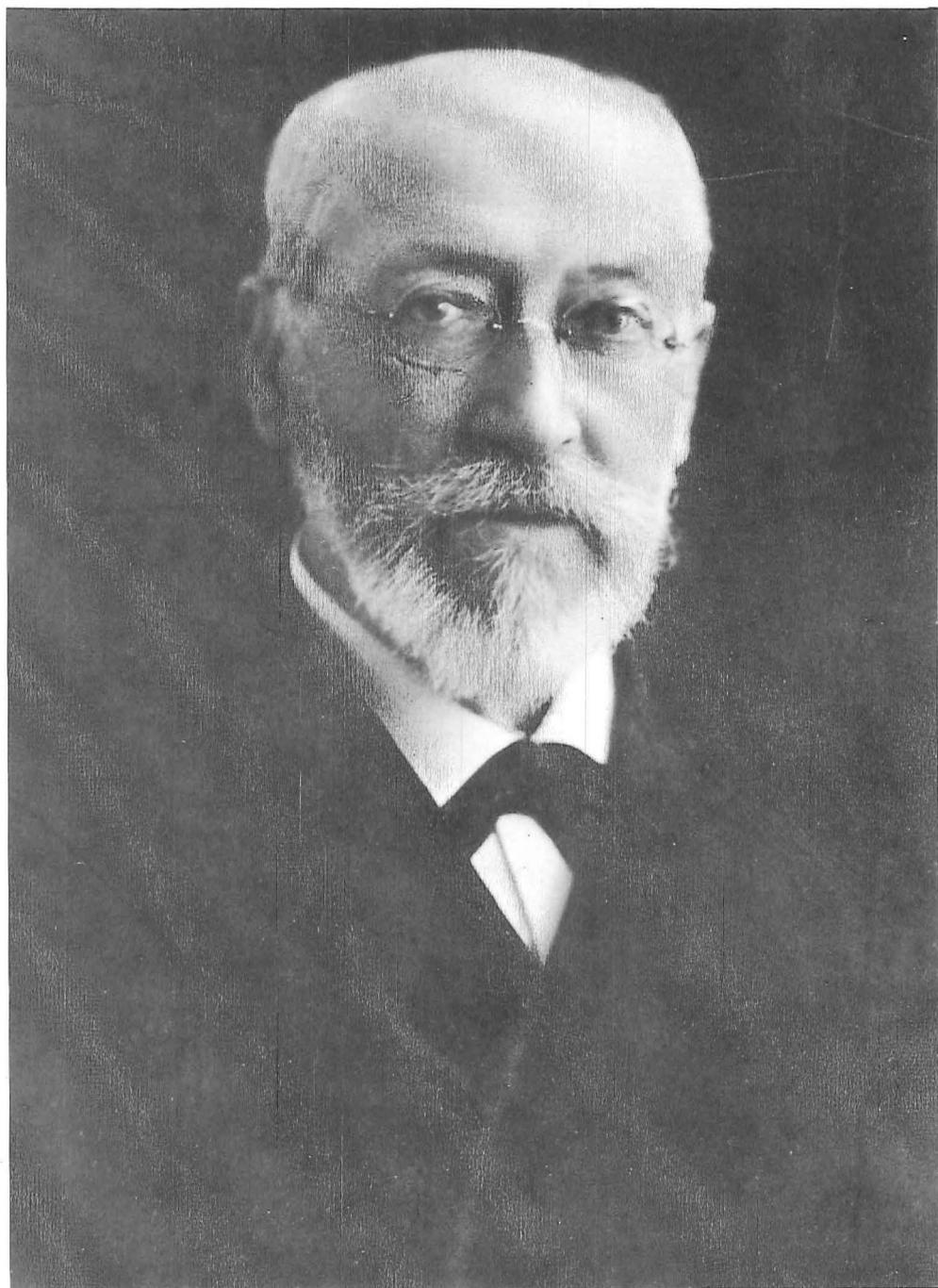
Ministerialrat o. Prof. Dr. Josef Herr

Vorstand der Lehrkanzel für Höhere Geodäsie und Sphärische Astronomie
an der Technischen Hochschule Wien
Präsident 1881 — 84

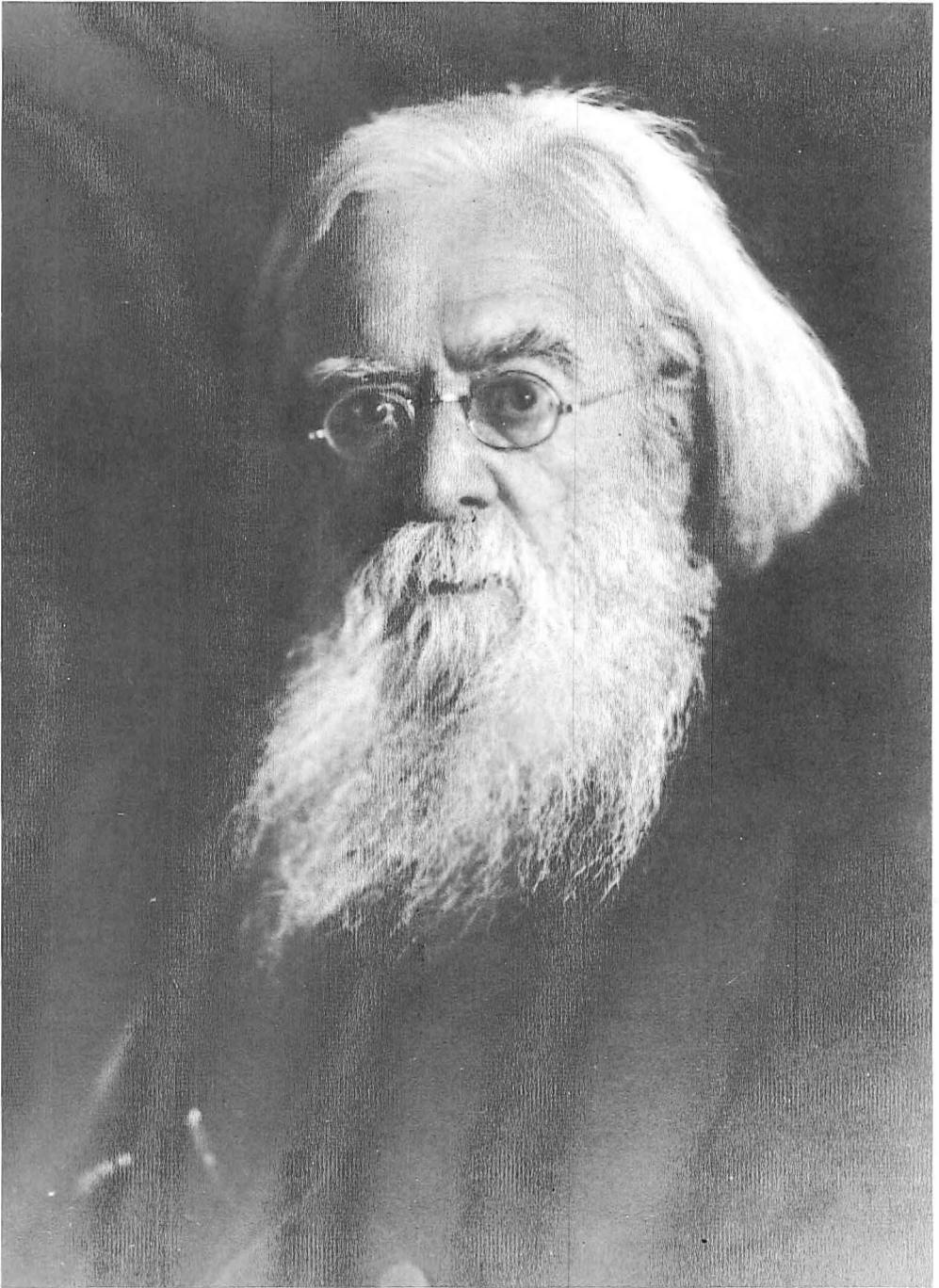


Hofrat o. Prof. Dr. Theodor Ritter von Oppolzer

o. ö. Professor der Astronomie an der Universität Wien, Leiter des Gradmessungsbüros
Präsident 1885 — 86



Ministerialrat o. Prof. Dr. Wilhelm von Tinter
Vorstand der Lehrkanzel für Höhere Geodäsie und Sphärische Astronomie
an der Technischen Hochschule Wien
Präsident 1887 — 1912



Hofrat o. Prof. Dr. Edmund Weiß

Direktor der Universitätssternwarte in Wien, Leiter des Gradmessungsbüros
Präsident 1913—17



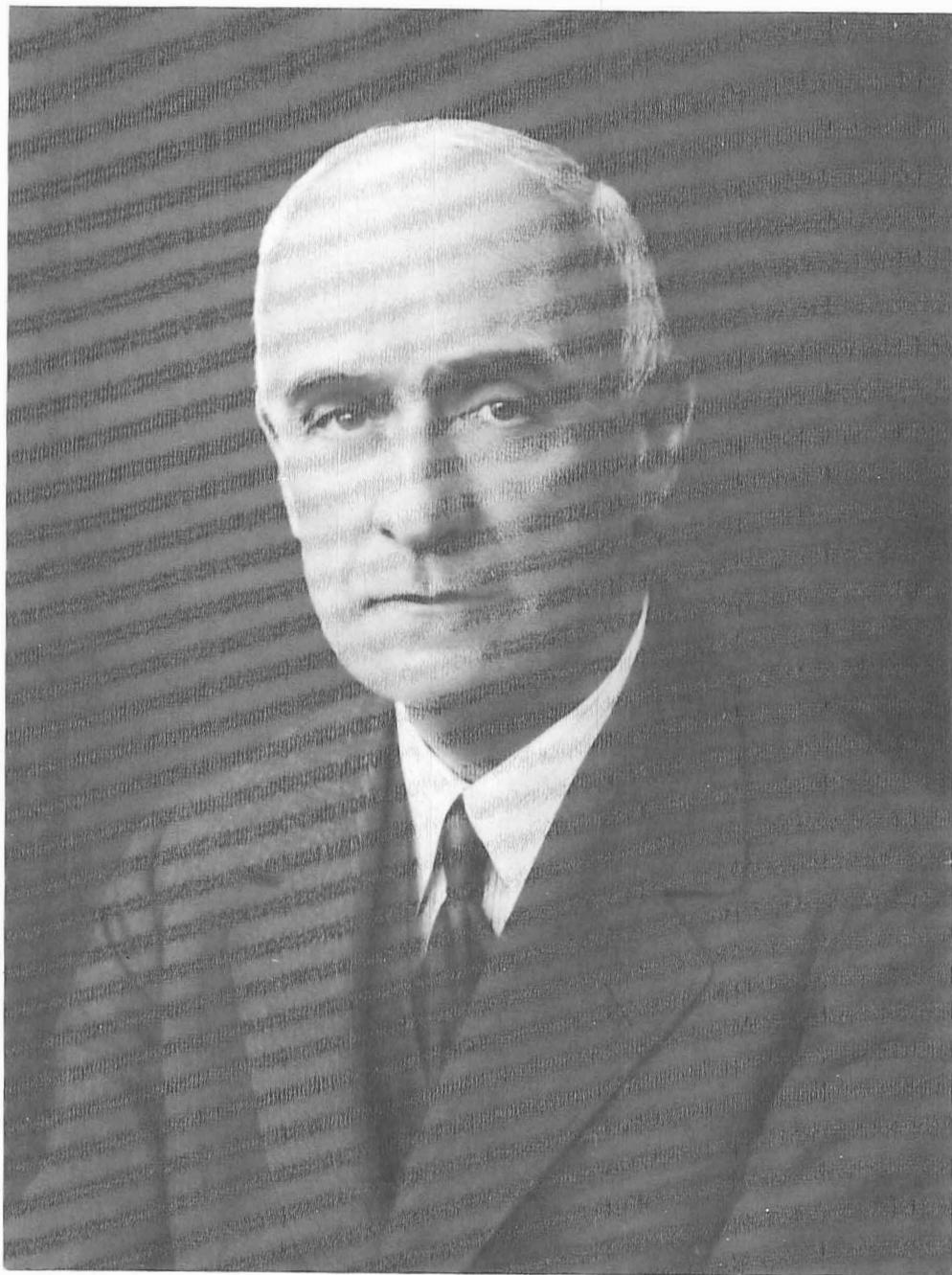
Hofrat o. Prof. Dr. h.c. mult. Eduard Dolezal

Vorstand der Lehrkanzel für Geodäsie I an der Technischen Hochschule in Wien
Präsident 1917 — 37



Generalmajor Ing. Leopold Andres

Vorstand der Geodätischen Gruppe im Militärgeographischen Institut
Präsident 1937 — 46



Hofrat o. Prof. Dr. Friedrich Hopfner

Vorstand der Lehrkanzel für Höhere Geodäsie und Sphärische Astronomie
an der Technischen Hochschule Wien
Präsident 1946 — 49



o. Prof. Dr. Adalbert Prey

Vorstand der Lehrkanzel für Theoretische Astronomie an der Universität Wien
Präsident 1949



Dipl.-Ing. Karl Lego

Präsident i. R. des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen
Präsident 1950 — Ende 1960



Hofrat Dr. phil., Dr. techn. h.c. Karl Ledersteger

o. Professor und Vorstand des Institutes für Höhere Geodäsie
der Techn. Hochschule Wien
Präsident seit Jänner 1961

Die Neubegründung der Theorie der sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren und das Normalsphäroid der Erde

Von K. Ledersteger, Wien

Seit der großartigen Leistung *Molodenskij's* scheint eine völlig hypothesenfreie Lösung des Problems der Erdfigur ermöglicht zu sein. Ja, die dadurch angebahnte neue Richtung, die *Hirvonen* als „Reformation der Geodäsie“ bezeichnet hat, findet ihren würdigen Abschluß in der *Hotineschen* Methode der Ausgleichung der Triangulation im Raume, die auf der von *Marussi* begründeten „Geodesia Intrinseca“ aufgebaut ist und nicht ganz glücklich als „dreidimensionale Geodäsie“ bezeichnet wird. Denn selbstverständlich gibt es überhaupt nur eine dreidimensionale Geodäsie, auch wenn die klassischen Methoden der natürlichen Sonderstellung der Höhen bewußt Rechnung tragen. Als drittes Glied in der Kette der modernen Bestrebungen darf man das streng geozentrische System polarer Koordinaten der Oberflächenpunkte der Erde nennen, das wohl in naher Zukunft aus den Bahnen der künstlichen geodätischen Satelliten abgeleitet werden kann. Dieses mit großem mathematischen Scharfsinn errichtete Gebäude verspricht ohne Zweifel die Lösung des Fundamentalproblems der Geodäsie, wenn man deren Aufgabe in der bereits klassisch gewordenen Formulierung *Helmerts* erblickt, derzufolge die Geodäsie die Wissenschaft von der Ausmessung und Abbildung der Erdoberfläche ist. In diesem Sinne darf man die moderne Theorie der Erdfigur als geometrische Richtung bezeichnen, obwohl auch in ihr natürlich die Potentialtheorie und die astronomische Geodäsie eine wichtige Rolle spielen.

Bisher sind weder das Verfahren *Molodenskij's* noch die *Hotinesche* Raumtriangulation oder das geometrische Problem der Satellitengeodäsie in größerem Maßstab praktisch erprobt worden. Dennoch beginnt man sich bereits gelegentlich auf eine kritische Gegenüberstellung der klassischen und der neuen Methoden zu besinnen. Hinsichtlich der Satellitengeodäsie handelt es sich in erster Linie um die Frage der erreichbaren Genauigkeit, in welchem Punkte derzeit noch kein abschließendes Urteil möglich ist. Die Methode *Hotines* hat eine völlige Beherrschung der terrestrischen Refraktion zur Voraussetzung, die derzeit weder für die Messung der Zenitdistanzen noch für die elektronische Entfernungsmessung garantiert werden kann. Die *Hotinesche* Methode geht übrigens in ihrem Grundgedanken auf *Brun's* berühmten Polyeder (1877) und seine fünf Messungsgruppen zur hypothesenfreien Bestimmung der Gestalt der Erdoberfläche zurück. Derselbe *Brun* hat aber in streng physikalischem Sinne die Aufgabe der Geodäsie in der Ermittlung der Kräftefunktion, d. h. in der Bestimmung der ganzen Schar der äußeren Niveauflächen erblickt. Hingegen wird die völlige Hypothesenfreiheit bei der Bestimmung der physischen Erdoberfläche aus den Normalhöhen h' und den Oberflächenundulationen ξ' bei *Molodenskij* nur mit dem Verzicht auf das Geoid erkauft: an Stelle des Geoides

treten die geopotentiellen Knoten der Oberflächenpunkte und das „Quasigeoid“, das durch Auftragung der Oberflächenundulationen auf das Referenzellipsoid entsteht. In Anbetracht der wesentlich höheren Unsicherheit der Undulationen, gleichgültig, ob man an die Oberflächenundulationen oder an die Geoidundulationen ξ denkt, die teils in der gegenwärtig noch beträchtlichen Lückenhaftigkeit des Schwere-materials, teils in der mäßigen Genauigkeit der Schwere-messungen auf dem Meere begründet ist, dürfte die Einführung des Geoides vermöge $\xi = h' + \xi' - h$ dem bloß rein geometrisch definierten Quasigeoid vorzuziehen sein, auch wenn dabei die wahren Meereshöhen h durch die Helmert-Höhen, d. h. durch die auf einfachste Weise orthometrisch reduzierten Ergebnisse des geometrischen Nivellements ersetzt werden.

Grundsätzlicher Natur sind aber die mit der Bezugsfläche, bzw. mit dem Bezugskörper zusammenhängenden Bedenken. An sich ist natürlich eine Beschreibung des irdischen Schwerefeldes nicht an ein bestimmtes Vergleichssystem gebunden. Dies gilt sowohl für die Lotabweichungen, wie auch für die Schwerestörungen und für die Geoidhöhen, und insoferne sind alle drei Gruppen von Größen relativ. Eine exakt physikalische Auffassung des Problemes Erdfigur verlangt aber eine absolute Lösung, bei der die genannten Größen selbst einen klaren physikalischen Sinn haben, d. h. eindeutige Funktionen der Massenstörungen in der Erdkruste werden. Die ist aber nur möglich, wenn an Stelle des bisher fast allgemein verwendeten fiktiven Niveauellipsoides das als hydrostatische Gleichgewichtsfigur definierte Normalsphäroid der Erde tritt und überdies das Gesetz für die Regularisierung der Erdkruste möglichst scharf erfaßt wird.

Im einfachsten Falle kann man die gesamte Kruste aus einem homogenen Weltmeer und einer einparametrischen festen Kruste aufbauen, was einem Dichtegesetz mit 5 Konstanten entspricht. Da der Gesamtradius des Normalsphäroides sowie die mittlere Tiefe des Meeres und die Dichte des Meerwassers als gegeben angesehen werden dürfen, kann man über die beiden restlichen Parameter derart verfügen, daß die Trägheitsmomente C und $\frac{1}{2}(A + B)$ des wirklichen Erdkörpers und damit sowohl der Drehimpuls des in sich geschlossenen Massensystems der Erde wie auch die statische Abplattung J_2 erhalten bleiben. Diese Forderungen stellen bereits zwei wichtige Zusätze zu den bisherigen Regularisierungsversuchen auf Grund der Hypothese der Isostasie dar. Der bisherige, etwas vage Kompromiß zwischen Massenausgleich und Druckausgleich genügt aber nicht. Vielmehr muß bei strenger Erhaltung der Erdmasse in der Ausgleichsfläche, als welche bei der physikalisch wertvolleren Hypothese des Schwimmgleichgewichtes nach *Airy* die Basis der mächtigsten Sialscholle zu gelten hat, vollständige Druckgleichheit herrschen. Dies ist aber nur möglich, wenn man neben den üblichen Massenverschiebungen in vertikalen Säulen auch horizontale Massenverschiebungen heranzieht. Überdies muß auf die maximale Meerestiefe und auf die merkwürdige Rolle des Luftdruckes geachtet werden.

Es wäre völlig müßig, bei einer vergleichenden Gegenüberstellung der klassischen Gedankengänge zur Lösung des Problemes der Erdfigur und der modernen Bestrebungen in dieser Richtung einen definitiven Wertmaßstab anlegen zu wollen.

Im Widerstreit der mehr mathematisch-geometrischen oder mehr physikalischen Auffassungen kommen nicht allein die Neigungen und Veranlagungen der einzelnen Forscher zum Ausdruck. Vielmehr kristallisieren sich bei beiden Richtungen Vorzüge und Nachteile heraus, die leidenschaftslos gegeneinander abzuwägen sind. Die moderne, von *Molodenskij* eingeleitete Reformation der Geodäsie hat die Hypothesenfreiheit auf ihr Banner geschrieben, ohne Zweifel ein überaus gewichtiges Argument. Dem kann man allerdings entgegenhalten, daß die physikalische Geodäsie ein fundamentaler Teil der Geophysik ist, und daß sie in diesem Sinne auch die Aufgabe hat, die notwendigerweise hypothetischen Charakter tragenden Forschungsmethoden der Lehre vom inneren Aufbau der Erde mit ihren eigenen, ganz anders gearteten Mitteln zu prüfen und zu bekräftigen. Hierbei scheint aber dem Problem der Normalfigur der Erde oder allgemeiner gesagt, der heute vielfach abgelehnten Theorie der Gleichgewichtsfiguren eine wichtige Rolle zuzufallen.

Nach Meinung des Verfassers läßt sich eine in jeder Hinsicht befriedigende Lösung des gesamten Fragenkomplexes in folgenden Schritten erzielen:

1. Auffindung einer dem inneren Aufbau des Erdkörpers möglichst nahekommenden mehrparametrischen hydrostatischen Gleichgewichtsfigur, die wir mit gutem Rechte als Normalsphäroid bezeichnen dürfen. Dieses Normalsphäroid soll mit der wirklichen Erde die statische Abplattung und, falls überhaupt möglich, auch das Hauptträgheitsmoment C und damit den Drehimpuls gemeinsam haben.

2. Ersatz des allgemeinen Niveauellipsoides, dem überhaupt keine physikalisch mögliche Massenordnung entspricht, durch das Normalsphäroid als generellen Bezugskörper der Geodäsie.

3. Bestimmung der Oberflächenundulationen (Höhenanomalien) nach *Molodenskij*, aus denen unter Verwendung der Helmerthöhen die freilich nicht mehr hypothesenfreien Geoidhöhen ermittelt werden.

4. Aufsuchung des eindeutigen Gesetzes für die Regularisierung der Erdkruste und Berechnung der Schwerewerte auf dem Co-Geoid sowie Berechnung des zugehörigen indirekten Effektes. Als Kontrolle, wieweit dieses Cogeoid bereits mit dem Normalsphäroid übereinstimmt, stehen dann zwei Kriterien zur Verfügung:

- a) Die Schwerewerte auf dem Cogeoid müssen identisch sein mit den theoretischen Schwerewerten auf dem Normalsphäroid: die scheinbaren Schwerestörungen verschwinden identisch.

- b) Der indirekte Effekt muß mit den nach 3. abgeleiteten Geoidhöhen entgegengesetzt gleich sein.

Sind diese beiden Bedingungen erfüllt, so ist der Kreis geschlossen; die eingeführten Hypothesen sind einwandfrei zur Theorie verifiziert.

So gesehen, betreffen alle bisherigen Lösungsversuche immer nur Teilgebiete oder stellen nur Teillösungen eines viel umfassenderen Problems dar, dessen endgültige Lösung dazu berufen ist, die Physikalische Geodäsie zur grundlegenden Disziplin der Geophysik zu machen.

Vorliegende Arbeit ist nur dem ersten Teile dieses Programmes gewidmet, nämlich der Bestimmung der Normalfigur der Erde. Die Aufgabe besteht darin, vom Außenraum her eine hydrostatische Gleichgewichtsfigur zu bestimmen, also vorerst die klassische Theorie der Gleichgewichtsfiguren, die naturgemäß mit dem

Innenraumpotential operiert, auf dem Außenraumpotential zu begründen, was selbstverständlich nur möglich ist, wenn gewisse unabdingbare Voraussetzungen erfüllt sind.

Abschließend sei noch bemerkt, daß sich die folgenden Ausführungen, abgesehen von der Erweiterung, auch stofflich nicht ganz mit dem Vortrag vom 24. Oktober 1964: „Neue Ergebnisse und Probleme der Wiener Schule der Höheren Geodäsie“ decken. In diesem Vortrag wurde nämlich auch das Problem der Mondfigur gestreift, um die Tragfähigkeit der neuen Theorie zu beleuchten. Ferner wurde die Richtung aufgezeigt, in welcher eine Vertiefung der Lehre von der Isostasie und damit möglicherweise eine ausreichende Regularisierung der Erdkruste zu erzielen sind. Doch sollen diese beiden Themen gesonderten Bearbeitungen vorbehalten bleiben. Schließlich sind noch einige neuere, in der Zwischenzeit gewonnene Erkenntnisse einbezogen worden.

I. Die klassische Theorie

1. Definition und allgemeine Eigenschaften der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten

Die Beschreibung des irdischen Schwerefeldes verlangt ein „theoretisches“ oder „normales“ Vergleichsfeld. Nach *Bruns* und *Helmert* kann ein solches auf Grund einer Kugelfunktionsentwicklung der Kräftefunktion W der Schwere und auf Grund der rein formalen Zerlegung $W = U + T$ gewonnen werden. U enthält einige der ersten Glieder der Entwicklung, während alle übrigen in der Restfunktion T zusammengefaßt sind. Im allgemeinen ist also U nicht das Potential einer physikalisch möglichen Massenanzordnung; denn schon das Potential des homogenen Rotationsellipsoides enthält unendlich viele Glieder. Die Theorie beruht dann auf dem Vergleiche der „Niveausphäroide“ $U = W_0$ mit den Niveauflächen $W = W_0$ desselben Potentialwertes. Die zugehörigen Höhendifferenzen (Geoidhöhen) haben keinen selbständigen physikalischen Sinn. Wir können aber auch gedanklich durch eine Regularisierung der Massen in der Erdkruste das für die tiefer gelegenen Schichten postulierte hydrostatische Gleichgewicht auch in der Kruste herstellen und gewinnen so das hydrostatische „Normalsphäroid“ der Erde. Jedoch darf nicht übersehen werden, daß dieses Postulat an die Voraussetzung eines starren Körpers gebunden ist. Leider ist das Regularisierungsgesetz nicht bekannt; es kann aber voraussichtlich durch die Hypothese der Isostasie befriedigend approximiert werden, wenn nur verschiedene, bisher nicht beachtete Gesichtspunkte berücksichtigt werden. Denn es dürfte keinem Zweifel unterliegen, daß wenigstens im großen und ganzen in der Erdkruste das isostatische Gleichgewicht bis zu etwa 90% vorherrscht. Für das Normalsphäroid, dessen Kugelfunktionsentwicklung natürlich unendlich viele Glieder enthalten muß: $U = W_0$, verschwindet mit den Massenunregelmäßigkeiten die Restfunktion T . Beschränkt man sich wieder ähnlich auf einige Glieder am Anfang der Reihe, so erhält man in Näherung 2., 4. oder 6. Ordnung die Niveausphäroide der regularisierten Erde vom 2., 4. oder 6. Range. Aus diesen wenigen Vorbemerkungen erhellt bereits die Wichtigkeit der Theorie der hydrostatischen Gleichgewichtsfiguren, wobei wir uns natürlich auf sphäroidische Figuren be-

schränken dürfen; es wird also vorausgesetzt, daß die Abplattung eine kleine Größe 2. O. ist.

Ein Flüssigkeitskörper möge unbeeinflusst von äußeren Kräften frei im Raume rotieren. Auf seine Teilchen wirke, abgesehen vielleicht von einem äußeren Druck, allein die Eigengravitation und die Zentrifugalkraft ein, so daß der Schwerpunkt in einem Inertialsystem ruht. Ist die Flüssigkeit ursprünglich von gewissen Strömungen durchzogen, so wird die Reibung allmählich die gegenseitige Bewegung der Teilchen zum Verschwinden bringen, bis sie sich schließlich im „relativen Gleichgewicht“ befindet: die Flüssigkeit rotiert wie ein fester Körper um eine im Raume feste Achse. Ist der Druck an der Oberfläche, senkrecht zu dieser nach außen wirkend, Null, so ist die Oberfläche „frei“. Ist der Oberflächendruck aber größer als Null, so muß ihm zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichtes ein gleich großer Außendruck entgegenwirken. Man spricht von „freier Oberfläche“ auch dann, wenn ein konstanter Außendruck auf der Flüssigkeit lastet. Im Innern der Flüssigkeit, im senkrechten Abstand h von der Oberfläche, ist der Druck gleich dem Außendruck, vermehrt um das Gewicht einer Flüssigkeitssäule vom Querschnitt 1 und der Höhe h ; dieser Druck ist eine skalare Ortsfunktion. Gleichgewicht herrscht in der Flüssigkeit, wenn die Summe der in jedem Volumelement angreifenden Kräfte, nämlich Druckkraft und Schwere, verschwindet. Dann aber fallen die Flächen gleicher Dichte und gleichen Druckes mit den Niveauflächen zusammen. Der Druck nimmt nach innen stets zu und erreicht sein Maximum im Schwerpunkt. Aus Stabilitätsgründen wird noch gefordert, daß die Dichte nach innen niemals abnimmt.

Wir setzen eine beliebige, inhomogene (heterogene), kompressible oder inkompressible Flüssigkeit voraus und fordern, daß die Einheitskräfte ein Potential besitzen, was nach obigem der Fall ist. Die Dichte sei eine stetige oder abteilungsweise stetige Ortsfunktion und die inneren Niveauflächen haben stetige Normalen, umschließen sich schalenartig und konvergieren gegen einen Punkt. Dann ist für das Gleichgewicht notwendig und hinreichend, daß die Niveauflächen mit den Flächen gleicher Dichte und damit auch mit den Flächen gleichen Druckes zusammenfallen. Die Oberfläche, die unter konstantem Druck steht, ist selbst eine Niveaufläche. Ist die Flüssigkeit homogen und inkompressibel, so ist für das relative Gleichgewicht notwendig und hinreichend, daß die Oberfläche eine Niveaufläche ist.

Folgende allgemein gültige Sätze lassen sich für das relative Gleichgewicht beweisen:

1. Das Schwerezentrum liegt in der Rotationsachse.
2. Die durch den Schwerpunkt gehende Ebene senkrecht zur Rotationsachse ist eine Symmetrieebene der Gleichgewichtsfigur [Theorem von Lichtenstein¹⁾]. Der Beweis dieses Satzes konnte mit Hilfe des „Prinzipes der Entblätterung“ wesentlich vereinfacht werden.
3. Nur ein System konzentrischer, homogener Kugelschalen repräsentiert eine ruhende Gleichgewichtsfigur.
4. Die Schwerkraft kann nur in Punkten der Symmetrieebene, also nur in den Punkten des Äquators der Gleichgewichtsfigur verschwinden.

5. Aus jeder Gleichgewichtsfigur gewinnt man eine unendliche Reihe weiterer Gleichgewichtsfiguren, wenn man die Dichten mit der Konstante λ^2 und die Rotationsgeschwindigkeit mit λ multipliziert.

6. Die Winkelgeschwindigkeit erfüllt die Poincarésche Schranke $\omega^2 < 2 \pi k^2 \rho_m$, unter ρ_m die mittlere Dichte der Figur verstanden.

7. Ist die Oberfläche eine Niveaufläche, so herrscht in der Flüssigkeit durchwegs Druck. Im Grunde haben wir also nur eine einzige Gleichgewichtsbedingung: die Flächen gleicher Dichte müssen mit den Niveauflächen zusammenfallen. Damit muß eo ipso die Oberfläche als *die* oder *eine* der Flächen geringster Dichte der Schar der Niveauflächen angehören.

Bemerkt sei noch, daß *Wavre*²⁾ die Sätze 1–6 auf „barotrope“ Rotationen ausgedehnt hat, bei denen die Winkelgeschwindigkeit nicht mehr konstant, sondern eine Funktion des Abstandes q von der Rotationsachse ist: $\omega = \omega(q)$.

2. Die Ellipsoide von *MacLaurin* und *Jacobi*

Das allgemeine Problem des relativen Gleichgewichtes einer homogenen Flüssigkeit ist noch nicht gelöst. Da jedoch die Kugel die einzig mögliche homogene Gleichgewichtsfigur des Ruhefalles darstellt, lag die Frage nahe, ob nicht wenigstens langsam rotierende, schwach abgeplattete Rotationsellipsoide homogene Gleichgewichtsfiguren sein können. Schon *Newton* hat dieses Problem diskutiert und sich dazu des Prinzipes der Kanäle bedient. Sei vom Pol bis zum Schwerpunkt und von da bis zu einem beliebigen Äquatorpunkt je ein Kanal von gleichem Querschnitt gelegt und mit Wasser gefüllt. Dann muß in beiden Kanälen das Wasser dasselbe Gewicht haben. Im Ruhefalle ist dies offensichtlich nur möglich, wenn beide Kanäle gleich lang sind, die Figur also keine Abplattung besitzt. Bei Rotation ist die Fliehkraft im Äquator am größten und in der Rotationsachse Null, was besagt, daß der Äquatorkanal länger sein muß als der Polkanal. Damit war bereits die Unmöglichkeit des verlängerten Rotationsellipsoides als Gleichgewichtsfigur gezeigt, die später von *Laplace*³⁾ streng bewiesen wurde.

Die klassische Potentialtheorie zeigte, daß die inneren Niveauflächen eines homogenen, ruhenden Rotationsellipsoides homothetische, d. h. ähnliche und ähnlich liegende Ellipsoide sind, deren konstante Abplattung kleiner ist als die Abplattung der Oberfläche. Versetzt man dieses Ellipsoid in langsame Rotation, so wird infolge der Fliehkraft die stets konstante Abplattung der inneren Niveauflächen allmählich größer, bis schließlich für einen bestimmten Wert von ω der Fall eintritt, daß die Abplattung der Oberfläche erreicht ist und damit diese zur Niveaufläche wird, womit eine homogene Gleichgewichtsfigur vorliegt. Da die Gleichgewichtsbedingung:

$$\Omega = \frac{\omega^2}{2 \pi k^2 \rho} = \frac{(3 + \eta^2) \arctg \eta - 3 \eta}{\eta^3} = \frac{8}{15} e - \frac{4}{35} e^2 - \frac{16}{105} e^3, \quad \dots \quad (1)$$

in welcher e die geometrische Abplattung $e = (a - c) : a$ und η die zweite Exzentrizität $\eta^2 = (a^2 - c^2) : c^2$ des Ellipsoides darstellt, von *MacLaurin*⁴⁾ gefunden wurde,

bezeichnet man diese homogenen Gleichgewichtsfiguren als *MacLaurinsche* Ellipsoide. Die Gleichgewichtsbedingung wird übrigens vorteilhafter in die Form gebracht:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\omega^2 a^3}{k^2 E} = \frac{3}{2} \frac{(3 + \eta^2) \arctg \eta - 3 \eta}{\eta^3} \sqrt{1 + \eta^2} = \frac{4}{5} e + \frac{22}{35} e^2 + \frac{2}{5} e^3 \dots \quad (1a)$$

Hierin bedeuten $k^2 = 66,7 \cdot 10^{-9} g^{-1} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-2}$ die Gravitationskonstante und E die (Erd-) Masse. Setzt man abkürzend:

$$\psi(\eta) = \frac{1}{\eta^3} (\eta - \arctg \eta) = \frac{1}{3} - \frac{\eta^2}{5} + \frac{\eta^4}{7} - \frac{\eta^6}{9} \dots \quad (2)$$

so findet man für die Schwere:

$$\gamma = 3 \psi(\eta) \frac{k^2 E}{a^2} \frac{1 + \eta^2}{\sqrt{1 + \eta^2 \cos^2 \varphi}} \dots \quad (3)$$

und speziell im Äquator und Pol:

$$\gamma_0 = 3 \psi(\eta) \frac{k^2 E}{a^2} \sqrt{1 + \eta^2}; \gamma_P = 3 \psi(\eta) \frac{k^2 E}{a^2} (1 + \eta^2). \dots \quad (3a)$$

In der wohlbekannten Formel

$$\gamma = \gamma_0 (1 + \beta \sin^2 \varphi - \frac{1}{4} \beta_4 \sin^2 2 \varphi) \dots \quad (4)$$

finden wir für die „Schwereabplattung“

$$\beta = \frac{\gamma_P - \gamma_0}{\gamma_0} = \sqrt{1 + \eta^2} - 1 = \frac{e}{1 - e} = e + e^2 + e^3 \dots \quad (4a)$$

und für den Koeffizienten β_4

$$\beta_4 = 2 \left[1 + \sqrt{1 + \eta^2} - 2 \frac{\sqrt{1 + \eta^2}}{\sqrt{1 + \eta^2/2}} \right] = \frac{3}{2} e^2 + \frac{9}{4} e^3 + \dots \dots \quad (4b)$$

Von besonderem Interesse ist noch das Trägheitsmoment um die Rotationsachse

$$C = \frac{2}{5} E a^2, \dots \quad (5)$$

die statische Abplattung

$$(K:a^2) = \frac{C - A}{E a^2} = \frac{1}{5} (2 e^2 - e^2) = J_2 \dots \quad (6)$$

und die dynamische Abplattung oder mechanische Elliptizität:

$$H = \frac{C - A}{C} = e - \frac{1}{2} e = \frac{5}{2} (K:a^2). \dots \quad (7)$$

Wir diskutieren die *MacLaurinsche* Bedingung (1). Für $\eta = e = 0$ ist $\Omega = 0$. Für $\eta \rightarrow \infty$ oder $e = 1$ gilt

$$\lim_{\eta = \infty} \arctg \eta = \frac{\pi}{2}$$

und Ω verschwindet wie $1 : \eta$. Die wesentlich positive Größe Ω hat daher ein durch $d\Omega/d\eta = 0$ bestimmtes Maximum:

$$\eta = 2,5293\ 0986; \quad e_0 = 0,6323\ 283; \quad \Omega_{max} = 0,2246\ 657. \quad \dots (8)$$

Eine Darstellung des Verlaufes der Funktion $\Omega(\eta)$ ist in Fig. 1. gegeben. Für jeden Ω -Wert existieren zwei Abplattungen $e_1 \leq 0,6323\ 283 \leq e_2$. Aus $\Omega = \Omega(\omega, \rho)$ können sofort zwei Reihen von Ellipsoiden der gegebenen Masse E abgeleitet werden.

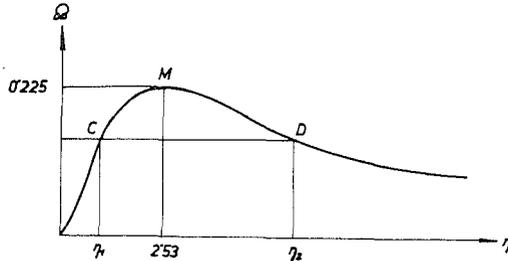


Fig. 1

Für eine konstante Dichte resultiert die Reihe der volumgleichen Ellipsoide — übrigens die einzige, die in der klassischen Theorie behandelt wird —, welche von einer ruhenden Kugel von endlichem Radius ausgeht und in einer unendlich dünnen und unendlich großen ruhenden Scheibe endet. Das Ellipsoid mit der Abplattung e_0 hat die maximale Rotationsgeschwindigkeit ($\omega^2 = 0,44933 \cdot \pi k^2 \rho$), die weit unter der *Poincaréschen* Schranke liegt. Hält man umgekehrt ω fest, so erhält man eine lineare Reihe von Ellipsoiden, welche mit dem Massenpunkt beginnt und in einer rotierenden Scheibe von endlichem Radius endet. Diese beiden Grenzfiguren sind natürlich bereits physikalische Fiktionen ($\rho = \infty$). Das Ellipsoid mit der Abplattung e_0 hat die minimale Dichte $\rho_{min} = \omega^2 / (0,44933 \pi k^2)$. Es ist also die gleichzeitige Wahl von ω und ρ gestattet, wenn nur die Bedingung (1) beachtet wird. Dies aber besagt, daß jedes Rotationsellipsoid eine mögliche homogene Gleichgewichtsfigur ist. In der (a, e) -Ebene repräsentiert jeder Punkt des unendlichen Streifens $0 < a < \infty, 0 \leq e < 1$ ein *MacLaurinsches* Ellipsoid; die Punkte der a -Achse sind die ruhenden Kugeln, die Punkte der Geraden $e = 1$ die fiktiven, rotierenden Scheiben.

Hält man außer dem internationalen Näherungswert für die Erdmasse $E = 5976,5 \cdot 10^{24} \text{ g}$ irgendein Bestimmungsstück fest, so ergeben sich verschiedene Reihen *MacLaurinscher* Ellipsoide⁵⁾. Wir tabulieren vorerst einige der reinen Funktionen von η oder e :

e	0	0,2	0,4	0,6323 283	0,8	1,0
η	0	0,7500 000	1,3333 333	2,5293 101	4,8989 795	∞
β	0	0,2500 000	0,6666 667	1,7198 179	4,0000 000	∞
β_4	0	0,0827 390	0,4826 208	2,1302 761	6,4529 980	∞
Ω	0	0,1006 762	0,1815 795	0,2246 657	0,1894 774	0
\bar{e}	0	0,1887 679	0,4539 487	0,9165 748	1,4210 804	$3\pi/4$
J_2	0	0,072	0,128	0,1729 635	0,192	0,2
H	0	0,180	0,320	0,4324 088	0,480	0,5

Ferner greifen wir noch die Reihe jener *MacLaurinschen* Ellipsoide heraus, die wie die Erde in einem Sterntag rotieren ($\omega^2 = 5,317496 \cdot 10^{-9} \text{ sec}^{-2}$):

e	0	0,2	0,4	0,6323 283	0,8	1,0
a	0	24187,890	32405,913	40958,554	47405,446	56108,108 km
ζ	∞	0,1260 302	0,0698 771	0,0564 761	0,0669 644	∞
C	0	1398 631	2510 474	4010 481	5372 343	$7525 901 \cdot 10^{40}$
K	0	42 124	134 418	290 164	431 477	$629 624 \cdot 10^{13}$
γ_0	∞	64,502	32,512	15,997	7,988	0,000 gal
γ_P	∞	80,627	54,187	43,508	39,937	37,988 gal

Mit wachsendem ω wird die Reihe $\omega = \text{const}$ immer steiler. Während die a -Achse die Reihe $\omega = 0$ darstellt, nähert sich die Kurve für sehr großes ω immer mehr der e -Achse. Die Rotationsgeschwindigkeit der scheibenförmigen Grenzfiguren nimmt mit wachsendem Äquatroradius a ab. Am Rande der Scheibe gilt jedesmal $\gamma_0 = 0$; dort hält die Anziehung der Fliehkraft das Gleichgewicht. Fig. 2 zeigt die berechnete Reihe. Das Hauptträgheitsmoment C ist in Einheiten 10^{40} g cm^2 , das Massenmoment $K = (C - A):E$ in Einheiten 10^{13} cm^2 tabuliert.

Abschließend sei noch kurz erwähnt, daß auch das dreiachsige Ellipsoid als homogene Gleichgewichtsfigur in Frage kommt, wie 1834 *H. Jacobi*⁶⁾ bewies. Sind $a > b > c$ die drei Achsen des Ellipsoides und führen wir neben e noch die zweite Abplattung $e_1 = (b - c):b$ ein, so repräsentiert im Koordinatensystem (a, e, e_1) die Diagonalebene $(a, 0, S)$ die *MacLaurinschen* Ellipsoide. Von diesen zweigen in der Geraden $e = e_1 = 0,417$ oder $\Omega_{\text{max}} = 0,1871$ die *Jacobischen* Ellipsoide ab, die schließlich für $e = 1, e_1 = 0$ oder $b = c = 0$ in die eindimensionalen „Nadeln“ ausarten. Die Parallelen ($\Omega = \text{const}$) zur a -Achse mit $0 \leq \Omega \leq 0,1871$ sind die Erzeugenden der gekrümmten „*Jacobischen* Fläche“. Jede dieser Geraden repräsentiert eine Figurenreihe, die fiktiv mit einem dimensionslosen Ellipsoid ($\rho = \infty, \omega = \infty$) beginnt und ebenso fiktiv in einem Ellipsoid mit drei unendlich großen Achsen ($\rho = 0, \omega = 0$) endet. Für die wirkliche Erde resultiert $\Omega = 0,00227$. Es existiert also ein *Jacobisches* Ellipsoid von der Masse, der mittleren

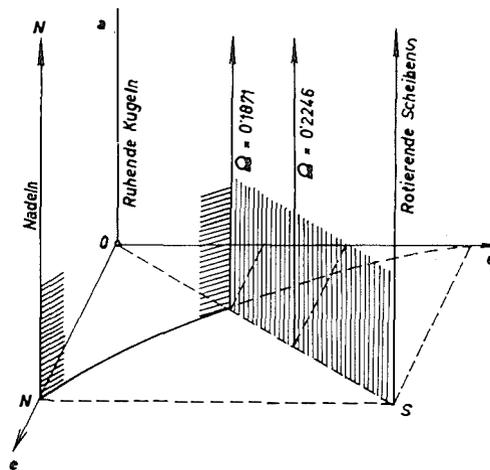


Fig. 3

Dichte und der Rotationsgeschwindigkeit der Erde. Seine Berechnung gelang zuerst C. Kostka⁷⁾ auf Grund einer Entwicklung nach Theta-Funktionen; er fand für die Achsenverhältnisse:

$$a:b:c = 52,4425:1,0023:1,0000. \quad \dots (8)$$

Die *Jacobischen* Ellipsoide sind also wegen ihrer starken Abplattungen für unser Problem gegenstandslos.

3. Die *Wavreschen* Schichtungssätze, das Prinzip der Entblätterung und die Eindeutigkeit des Dichtegesetzes der Gleichgewichtsfiguren

Zwei wesentliche Voraussetzungen für die Neubegründung der Theorie der Gleichgewichtsfiguren auf dem Außenraumpotential sind die Eindeutigkeit des Dichtegesetzes und das Prinzip der Entblätterung. Erstere muß die Vieldeutigkeit des Satzes von *Stokes-Poincaré* aufheben, demzufolge es zu jedem System „*Stokescher* Elemente“, nämlich einer gegebenen Masse E , ihrer Rotationsgeschwindigkeit ω und einer sie umschließenden Niveaufläche S unendlich viele Massenordnungen mit demselben System „*Stokescher* Konstanten“ gibt, wie sämtlichen Massefunktionen J_{2i} der späteren Potentialentwicklung II, (1) und den Konstanten der theoretischen Schwere, welche demnach durchwegs Integralinvarianten zu den gegebenen Elementen darstellen. Das Prinzip der Entblätterung muß es gestatten, jede innere Niveaufläche einer gegebenen Gleichgewichtsfigur vom Außenraum her als die Oberfläche einer in den Dimensionen und der Masse verkleinerten Gleichgewichtsfigur zu bestimmen.

Unter Schichtung versteht man die rein geometrische Verteilung der inneren Flächen gleicher Dichte in einer hydrostatischen Gleichgewichtsfigur. Nach *Bruns* kann die *Poissonsche* Gleichung in die Form gebracht werden:

$$\frac{dg}{dn} - 2gH = -4\pi k^2\rho + 2\omega^2 = \sigma. \quad \dots (9)$$

Hierin bedeutet n die innere Normale, H die mittlere Krümmung in dem betrachteten Punkte, während *Wavre* den rechts stehenden Ausdruck als transformierte Dichte σ bezeichnet. Sind die Flächen gleicher Dichte oder die Niveauflächen durch den Parameter t charakterisiert, so bezeichnet die Funktion $\rho(t)$ das Dichtegesetz. Daneben sind natürlich auch die transformierte Dichte, das Potential W und der Druck p reine Funktionen von t . Da wir sphäroidische, d. h. schwach abgeplattete Gleichgewichtsfiguren betrachten, dürfen wir Rotationssymmetrie voraussetzen und die orthogonalen Trajektoren der Niveauflächen, die Lotlinien, liegen in den Meridianebenen und hängen nur von einem Parameter θ ab. Wächst t mit zunehmender Dichte, d. h. gegen das Innere, so ist die Funktion N :

$$N(t, \theta) = \frac{dn}{dt} \quad \dots (10)$$

niemals negativ. Man zählt t am besten in der Polarachse; dort ist dann $dt = dn$ und $N = 1$. Schreibt man die Schwere

$$g = \frac{dW}{dt} \cdot \frac{dt}{dn} \quad \dots (11)$$

und bezeichnet den ersten Faktor mit W' , so wird

$$W' = g N, \quad \dots (11a)$$

d. h. die Schwere ist verkehrt proportional der Distanz der Niveauflächen und es ist in zwei verschiedenen Lotlinien:

$$(gN)_{\theta'} = (gN)_{\theta''},$$

woraus durch Differentiation folgt:

$$\left(\frac{dg}{dt} N + g \frac{dN}{dt} \right)_{\theta'} = \left(\frac{dg}{dt} N + g \frac{dN}{dt} \right)_{\theta''}. \quad \dots (12)$$

Bringt man mittels (11a) die *Brunssche* Formel in die Gestalt

$$\frac{dg}{dt} = 2HW' + \sigma N \quad \dots (13)$$

und führt dies in die vorhergehende Gleichung ein, so findet man

$$\Phi(t) = \frac{\sigma(t)}{W'(t)} = - \frac{\left[2HN + \frac{d}{dt} (\text{Log } N) \right]_{\theta'} - \left[2HN + \frac{d}{dt} (\text{Log } N) \right]_{\theta''}}{N^{2\theta'} - N^{2\theta''}} \quad \dots (14)$$

worin Log den natürlichen Logarithmus bedeutet. Die neu eingeführte Funktion Φ , welche wie σ stets ≤ 0 ist, hängt einerseits nur von physikalischen Größen, andererseits nur von der Schichtung ab. Sind speziell θ' und θ'' benachbarte Lotlinien und beachtet man, daß wegen (11a)

$$\frac{\sigma}{g} = \Phi N, \quad \dots (14a)$$

so ist bereits der erste *Wavresche* Schichtungssatz gefunden:

I: „Das Verhältnis der transformierten Dichte zur Schwere hängt in jedem Punkt nur von der Schichtung in seiner Umgebung ab.“

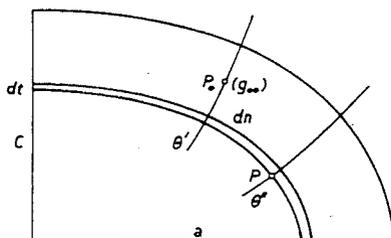


Fig. 4

Wir wählen eine spezielle Kraftlinie θ' und in ihr einen Punkt P_0 , der durch $t = t_0$ bestimmt ist, zum Ursprung. In dieser Lotlinie sei die Schwerebeschleunigung allgemein mit g_0 und speziell im Ursprung mit g_{00} bezeichnet. Dann folgt mit

$$\sigma = \Phi W' = \Phi g N$$

aus (13):

$$\frac{dg}{dt} = W'(2H + \Phi N); \quad \frac{1}{g} \frac{dg}{dt} = 2HN + \Phi N^2 = \frac{d}{dt} (\text{Log } g)$$

und hieraus durch Integration:

$$g_0 = g_{00} e^{\int_{t_0}^t (2HN + \Phi N^2)_0 dt} \quad \dots (15)$$

Damit finden wir in einem beliebigen Punkt P (Fig. 4):

$$\sigma = \Phi(gN) = \Phi(gN)_0 = g_{00} \Phi N_0 e^{\int_{t_0}^t (2HN + \Phi N^2)_0 dt} \quad \dots (16)$$

$$g = \frac{(gN)}{N} = \frac{(gN)_0}{N} = g_{00} N_0 N^{-1} e^{\int_{t_0}^t (2HN + \Phi N^2)_0 dt}$$

Hierin ist g_{00} die Schwere in P_0 , während alle übrigen Größen nur von der Schichtung abhängen. Dies liefert die Sätze:

II: „Die transformierte Dichte und die Schwere in der ganzen Masse sind durch die Schichtung und die Schwere in einem Punkt bestimmt.“

III: „Die Verteilung der transformierten Dichte und der Schwere ist bei gegebener Schichtung nur auf eine Art möglich, abgesehen von einer multiplikativen Konstante.“

Ist g_{00} die Schwere im Pol der freien Oberfläche S , so ist diese Schwere durch die *Stokes'schen* Elemente E , ω und S vollständig bestimmt, und wir erhalten das Theorem

IV: „Dichte und Schwere sind in der ganzen Figur durch die Schichtung, die Winkelgeschwindigkeit und die Masse eindeutig bestimmt.“

In der klassischen Theorie wurde bewiesen, daß die Niveauflächen der *MacLaurin'schen* Ellipsoide konzentrische und ähnliche Ellipsoide sind. Ferner konnte gezeigt werden, daß eine homogene, von zwei ähnlichen Ellipsoiden begrenzte Schicht auf die Punkte des inneren Hohlraumes keine Kraft ausübt, daß also ihr Potential im ganzen Hohlraum konstant ist. Hebt man somit Schale um Schale von einem *MacLaurin'schen* Ellipsoid ab, so entsteht eine lineare Reihe *MacLaurin'scher* Ellipsoide derselben Rotationsgeschwindigkeit und derselben Abplattung, wobei jedoch Äquatordradius und Masse ständig abnehmen. Um dieses „Prinzip der Entblätterung“ für alle Gleichgewichtsfiguren zu verallgemeinern, wäre zu zeigen, daß jede von zwei beliebigen Niveauflächen einer beliebigen heterogenen Gleichgewichtsfigur begrenzte Schale gleichfalls keine Anziehung auf die Punkte des Innenraumes der kleineren Niveaufläche ausübt, obwohl die Schale weder homogen noch von ähnlichen Flächen begrenzt ist. Nun betrachten wir eine beliebige innere Niveaufläche einer heterogenen Gleichgewichtsfigur ($t < t_0$) und einen Punkt $P_0(g_{00})$ in ihrem Innenraum mit dem Parameterwert t_0 . Nach der ersten Gleichung (16) hängt die transformierte Dichte $\sigma(t)$ nur von g_{00} und der Schichtung zwischen den Niveauflächen t und t_0 ab. Weder $\sigma(t)$ noch diese Schichtung ändern sich aber, wenn die Figur von der Oberfläche bis zur Dichtefläche t entblättert wird. Es bleibt dabei also auch g_{00} und gemäß der zweiten Gleichung (16)

auch die ganze Schwereverteilung auf der Dichtefläche t unverändert. Dies aber besagt, daß die unteren Dichteflächen nach der Entblätterung die Niveauflächen der reduzierten Figur bleiben, womit das Prinzip bereits bewiesen ist⁸⁾.

Ebenso einfach läßt sich die strenge Eindeutigkeit des Dichtegesetzes der Gleichgewichtsfiguren beweisen. Nach dem Theorem von *Stokes-Poincaré* ist die Schwereverteilung auf der freien Oberfläche S einer Gleichgewichtsfigur durch die Elemente E, ω, S eindeutig bestimmt. Wir nehmen an, daß für die Gleichgewichtsfigur bei gleicher Oberfläche S zwei verschiedene Schichtungen existieren. Beidemal müßte dann die Rotationsachse gemeinsame Lotlinie sein und man wählt daher den Punkt P_0 im Innenraum von S in der Rotationsachse. Der Schwerewert g_0 im Pol muß beidemal derselbe sein. Es folgt, daß für beide Schichtungen das auf der rechten Seite der Gleichung (15) stehende Produkt denselben Wert haben muß und man kann aus der zweiten Gleichung (16) schließen, daß auch das Produkt $N_0 N^{-1}$ dasselbe ist. Weil nun in der Rotationsachse immer $N_0 = 1$, muß über die ganze Oberfläche hin N unverändert bleiben, d. h. es müssen an der Oberfläche beide Schichtungen identisch sein. Entblättert man nun die erste Schichtung bis zu einer beliebigen inneren Niveaufläche, so kann für diese die Argumentation wiederholt werden und es folgt, daß die beiden Schichtungen identisch sind; das Dichtegesetz der Gleichgewichtsfiguren ist somit streng individuell. Ändert man ferner die Rotationsgeschwindigkeit dieser eindeutigen Massenanordnung, so ändern sich selbstverständlich sämtliche Niveauflächen: die Oberfläche bleibt nicht Niveaufläche und das Gleichgewicht geht verloren. Mithin ist jede Gleichgewichtsfigur durch E und S allein eindeutig bestimmt. Die Rotationsgeschwindigkeit ist kein *Stokes*-ches Element mehr, sondern eine Funktion der Elemente E und S : $\omega = \omega(E, S)$, wie sie für die homogenen Ellipsoide in der *MacLaurin*-Bedingung (1a) vorliegt. Wegen der Eindeutigkeit des Dichtegesetzes liegen aber im Gleichgewichtsfalle mit E und S nicht nur sämtliche *Stokes*-sche Konstanten, wie vor allem die Differenz der Trägheitsmomente fest, sondern auch letztere selbst; sowohl das Hauptträgheitsmoment C um die Rotationsachse wie auch die dynamische Abplattung sind neben ω eindeutig bestimmbar.

Das Prinzip der Entblätterung und die Eindeutigkeit des Dichtegesetzes gestatten eine Verschärfung des dritten und vierten *Wavreschen* Theorems:

IIIa: „Allein durch die freie Oberfläche einer Gleichgewichtsfigur ist eindeutig die gesamte Schichtung bestimmt, die Verteilung der transformierten Dichte und der Schwere sowie das Quadrat der Rotationsgeschwindigkeit jedoch nur bis auf eine multiplikative Konstante λ , welche von der Gesamtmasse E abhängt.“

IVa: „Die Dichte und die Schwere sowie die gesamte Schichtung einer Gleichgewichtsfigur und deren Rotationsgeschwindigkeit sind eindeutig durch die Gesamtmasse E und die Gestalt der freien Oberfläche S bestimmt.“

Bemerkt sei noch, daß die vier Theoreme nicht für die Kugel gelten, weil dann die Niveauflächen eine konstante mittlere Krümmung haben, also in (14) das Verhältnis Φ die unbestimmte Form $0:0$ annimmt.

Bereits 1903 konnte *Volterra*⁹⁾ nachweisen, daß bei heterogenen Gleichgewichtsfiguren eine Schichtung in ähnlichen Ellipsoiden unmöglich ist, welchen Satz *Wavre* auf beliebige ähnliche Schichtungen ausdehnen konnte.

4. Die *Clairautsche* Theorie der sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren

Es ist klar, daß das Prinzip der Entblätterung weitreichende Folgen hat. So ermöglicht es zunächst eine Revision der *Clairautschen* Theorie¹⁰⁾, die in der berühmten *Clairautschen* Differentialgleichung gipfelt, einer linearen Differentialgleichung 2. O., deren Integration die Berechnung der Abplattung der inneren Niveauflächen gestattet, wenn das Dichtegesetz der Figur bekannt ist. Die Theorie ist eine Näherung 2. O., d. h. es werden alle Größen von der Ordnung des Quadrates der Abplattung vernachlässigt.

Bei der schwierigen Ableitung der *Clairautschen* Differentialgleichung, welche die genaue Kenntnis des Potentials des homogenen Vollellipsoides zur Voraussetzung hat, werden die inneren Niveauflächen der Gleichgewichtsfigur durch ihre achsengleichen Rotationsellipsoide ersetzt; es werden also die Formparameter, deren erster eine Größe 4. O. ist, vernachlässigt. Ferner wird eine stetige Dichtefunktion $\rho(c)$ vorausgesetzt, so daß wir es fiktiv mit einem stetig geschichteten Ellipsoid zu tun haben. Gehört der im Innenraum gelegene Aufpunkt P der Niveaufläche mit der Äquatorachse a_r und der Polarachse c_r an, während diese Größen an der Oberfläche den Index 1 besitzen, so ergeben sich die Anziehungskomponenten in P in leicht verständlicher Weise, etwa:

$$g_x = \int_0^{c_r} \frac{d}{dc} \left(\frac{\partial V_a}{\partial x} \right) dc + \int_{c_r}^{c_1} \frac{d}{dc} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x} \right) dc \quad \dots (17)$$

Im ersten Integral ist ja wegen $c_r < c_1$ P ein äußerer, im zweiten ein innerer Punkt. Das zweite Integral würde bei Verwendung der exakten Potentialfunktion gemäß dem Prinzip der Entblätterung verschwinden. Hier ergibt sich aber ein von Null verschiedener Wert, der natürlich in der Unmöglichkeit einer ellipsoidischen Schichtung begründet liegt. Zwecks Elimination dieses Fehlers müssen wir stets den Grenzübergang $c_r \rightarrow c_1$ vornehmen, gleichgültig, ob es sich um die ursprüngliche oder um eine bereits durch Entblätterung verkleinerte Figur handelt.

Bezeichnet man die mittlere Dichte der vom Ellipsoid (a_r, c_r) eingeschlossenen Teilmasse mit $\bar{\rho}_r$, so ist bei Vernachlässigung der Abplattung

$$\int_0^{c_r} \rho \frac{dc^3}{dc} dc = c_r^3 \bar{\rho}_r; \quad \bar{\rho}_r = \frac{3}{c_r^3} \int_0^{c_r} \rho c^2 dc \quad \dots (18)$$

und speziell für die ganze Figur

$$\rho_m = \frac{3}{c_1^3} \int_0^{c_1} \rho c^2 dc. \quad \dots (18a)$$

Unter Einführung des Parameters \bar{e} :

$$\bar{e}_1 = \frac{\omega^2 a_1^3}{k^2 E} = \frac{\omega^2 (1 + e_1)}{4 \pi k^2 \rho_m} \sim \frac{3 \omega^2}{4 \pi k^2 \rho_m}; \quad \bar{e}_1 \rho_m \sim \bar{e}_r \bar{\rho}_r \quad \dots (19)$$

erhält man

$$\frac{\bar{\varepsilon}_1 \rho_m}{6} = \frac{e_r}{c_r^3} \int_0^{c_r} \rho c^2 dc - \frac{1}{5 c_r^5} \int_0^{c_r} \rho \frac{d(ec^5)}{dc} dc - \frac{1}{5} \int_{c_r}^{c_i} \rho \frac{de}{dc} dc \quad \dots (20)$$

was für die Oberfläche in

$$\frac{5}{3} \rho_m \left(e_1 - \frac{\bar{\varepsilon}_1}{2} \right) = \frac{1}{c_1^5} \int_0^{c_i} \rho \frac{d(ec^5)}{dc} dc \quad \dots (21)$$

übergeht. Da das Integral wesentlich positiv ist, folgt daraus eine untere Grenze für die Oberflächenabplattung: $e_1 \geq \bar{\varepsilon}_1/2$. Das Gleichheitszeichen gilt für den fiktiven Fall, daß die ganze Masse im Mittelpunkt vereinigt ist, wie sich leicht zeigen läßt; denn in diesem Falle wird dort die Dichte unendlich, wobei gemäß (18a)

$$\lim_{c=0} \rho c^2 = \text{const.}$$

Damit folgt für den Grenzwert in der letzten Gleichung

$$\lim_{c=0} \rho c^4 = 0$$

und die Behauptung ist bewiesen.

Die Gleichung (20) stellt eine Beziehung zwischen der Abplattung und der Dichte dar. Wir multiplizieren sie mit c_r^5 und differenzieren sie sodann nach c_r , wodurch sich die Zahl der Integrale um eins vermindert:

$$\begin{aligned} \frac{5}{6} \bar{\varepsilon}_1 \rho_m c_r^4 = & \left[c_r^2 \left(\frac{de}{dc} \right)_r + 2e_r c_r \right] \int_0^{c_r} \rho c^2 dc + e_r \rho_r c_r^4 - \frac{1}{5} \left(\frac{d(ec^5)}{dc} \right)_r \rho_r + \\ & + \frac{c_r^5}{5} \rho_r \left(\frac{de}{dc} \right)_r - c_r^4 \int_{c_r}^{c_i} \rho \frac{de}{dc} dc \end{aligned}$$

Die mittleren Glieder heben sich weg und es bleibt nach Division durch c_r^4 , wenn wir noch den Index r weglassen:

$$\frac{5}{6} \bar{\varepsilon}_1 \rho_m = \left(\frac{1}{c^2} \frac{de}{dc} + \frac{2e}{c^3} \right) \int_0^c \rho c^2 dc - \int_c^{c_i} \rho \frac{de}{dc} dc. \quad \dots (22)$$

Für die freie Oberfläche wird dies ($c \rightarrow c_1$):

$$\frac{5}{6} \bar{\varepsilon}_1 \rho_m = \left(\frac{1}{c^2} \frac{de}{dc} + \frac{2e}{c^3} \right)_1 \int_0^{c_i} \rho c^2 dc \quad \dots (23)$$

oder nach Einführung von (18a) und entsprechender Kürzung

$$c_1 \left(\frac{de}{dc} \right)_1 = \frac{5}{2} \bar{\varepsilon}_1 - 2e_1 = (\beta - e)_1. \quad \dots (23a)$$

Der zweite Teil dieser Doppelgleichung, die bereits auf *Clairaut* zurückgeht, beruht auf dem einfachen Clairautschen Theorem

$$e + \beta = \frac{5}{2} \bar{\varepsilon} \quad \dots (24)$$

Für die *MacLaurinschen* Ellipsoide ist gemäß (4a) bis auf Größen 4. O. $\beta = e$, für

heterogene Gleichgewichtsfiguren hingegen stets $\beta > e$. Somit ist $\frac{5}{4}\bar{\varepsilon}_1$ eine obere Grenze für den Randwert e_1 , gültig für die *MacLaurinschen* Ellipsoide. Zusammen mit der unteren Grenze für den fiktiven Massenpunkt haben wir demnach die wichtigen Grenzen für den Bereich der Gleichgewichtsfiguren gefunden:

$$\frac{1}{2}\bar{\varepsilon} \leq e \leq \frac{4}{5}\bar{\varepsilon}; \quad \dots (25)$$

denn wir werden erkennen, daß die Niveaulächen des Massenpunktes als fiktiver Grenzfall zweiparametrischer Gleichgewichtsfiguren gelten dürfen.

In der Gleichung (22) scheiden sich nun die klassische und die neue Theorie. Das Auftreten von e im Integranden des letzten Gliedes zwingt in der klassischen Theorie zu einer nochmaligen Differentiation, wodurch sich die Clairautsche Differentialgleichung ergibt:

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{d^2e}{dc^2} - \frac{6e}{c^4} \right) \int_0^c \rho c^2 dc + 2\rho \left(\frac{de}{dc} + \frac{e}{c} \right) = 0, \quad \dots (26)$$

welche meistens in der Form

$$\frac{d^2e}{dc^2} + \frac{2\rho c^2}{\int_0^c \rho c^2 dc} \frac{de}{dc} + \left(\frac{2\rho c}{\int_0^c \rho c^2 dc} - \frac{6}{c^2} \right) e = 0 \quad \dots (26a)$$

geschrieben wird. Ihre Integration setzt die Kenntnis von ρ in Funktion von c , d. h. die Kenntnis des Dichtegesetzes, voraus. Diese Gleichung, ihre Integration und Transformation und deren Folgerungen sind das Hauptproblem der klassischen Theorie, mit welchem sich nach *Clairaut* vorwiegend *Legendre* und *Radau* beschäftigt haben.

Die größte Bedeutung hat die Transformation von *Radau*¹¹⁾ erlangt. Mit (18) geht die Differentialgleichung über in:

$$\left(c \frac{d^2e}{dc^2} - \frac{6e}{c} \right) \bar{\rho} + 6\rho \left(\frac{de}{dc} + \frac{e}{c} \right) = 0. \quad \dots (26b)$$

Ferner liefert die Differentiation von (18)

$$\frac{d\bar{\rho}}{dc} = -\frac{9}{c^4} \int_0^c \rho c^2 dc + \frac{3}{c^3} \rho c^2 = \frac{3}{c} (\rho - \bar{\rho}), \quad \dots (27)$$

womit man ρ aus der darüberstehenden Gleichung eliminiert:

$$\left(c^2 \frac{d^2e}{dc^2} + 6c \frac{de}{dc} \right) \bar{\rho} + 2c \left(c \frac{de}{dc} + e \right) \frac{d\bar{\rho}}{dc} = 0 \quad \dots (26c)$$

In diese Gleichung führt *Radau* die neue Variable η ein:

$$\eta = \frac{c}{e} \frac{de}{dc}; \quad \frac{de}{dc} = \frac{e}{c} \eta; \quad \frac{d^2e}{dc^2} = \frac{e}{c^2} \left(c \frac{d\eta}{dc} + \eta^2 - \eta \right) \quad \dots (28)$$

und es wird

$$\left(c \frac{d\eta}{dc} + \eta^2 + 5\eta \right) \bar{\rho} + 2c(1 + \eta) \frac{d\bar{\rho}}{dc} = 0$$

oder

$$\frac{d}{dc} \left(\bar{\rho} \sqrt{1 + \eta} \right) + \frac{5\eta + \eta^2}{2c \sqrt{1 + \eta}} \bar{\rho} = 0 \quad \dots (26d)$$

Die Verhältnisse werden aber wesentlich einfacher, wenn man das Prinzip der Entblätterung heranzieht. Auf Grund dieses Prinzipes gelten die Gleichungen (21) und (23) nicht nur für die freie Oberfläche, sondern auch für jede innere Niveaufläche (c), welche ja durch die Entblätterung jedesmal zur freien Oberfläche einer reduzierten Figur wird, deren äußere Niveauflächen selbstverständlich auch im Gebiete zwischen c und c_1 nicht mehr mit den inneren Niveauflächen der ursprünglichen Figur zusammenfallen; denn die abgehobenen Schichten üben auf die oberhalb liegenden Aufpunkte Anziehungskräfte aus, und die Oberfläche der entblätterten Figur ist jetzt eine Unstetigkeitsfläche der Dichte.

An Stelle von (22) tritt mithin die auch für innere Niveauflächen gültige Gleichung (23) und die Notwendigkeit einer nochmaligen Differentiation entfällt. Beachtet man noch (18) und (19), so wird die *Clairautsche* Differentialgleichung (26) durch die lineare Differentialgleichung 1. O.

$$\frac{5}{2} \bar{\varepsilon}_1 \rho_m = \frac{5}{2} \bar{\varepsilon} \bar{\rho} = \left(c \frac{de}{dc} + 2e \right) \bar{\rho} \quad \dots (29)$$

ersetzt¹²⁾. Nur des Vergleiches wegen differenzieren wir diese Gleichung nochmals nach c . Man findet

$$\left(c \frac{d^2e}{dc^2} + 3 \frac{de}{dc} \right) \bar{\rho} + \left(c \frac{de}{dc} + 2e \right) \frac{d\bar{\rho}}{dc} = 0$$

und unter Einführung von (27)

$$\left(c \frac{d^2e}{dc^2} - \frac{6e}{c} \right) \bar{\rho} + \left(3 \frac{de}{dc} + \frac{6e}{c} \right) \rho = 0 \quad \dots (30)$$

oder schließlich

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{d^2e}{dc^2} - \frac{6e}{c^4} \right) \int_0^c \rho c^2 dc + \rho \left(\frac{de}{dc} + \frac{2e}{c} \right) = 0 \quad \dots (30a)$$

Dies unterscheidet sich von (26) um $\rho de/dc$, also um die Ableitung des zweiten Integrales in (22). Tatsächlich liegt der Differentiation jetzt ja die lineare Reihe von Figuren zugrunde, welche durch Entblätterung aus der gegebenen Figur entsteht. Es kann dies auch so gedeutet werden, daß die wirkliche Schichtung nur bis zur Niveaufläche c genähert durch eine ellipsoidische Schichtung ersetzt, oberhalb dieser Niveaufläche jedoch exakt beibehalten wird. Der Unterschied würde verschwinden, wenn die Abplattung der Niveauflächen konstant wäre, wie es bei der einzig möglichen, nämlich homogenen ellipsoidischen Schichtung wirklich der Fall ist.

Durch die Methode der Entblätterung hat die *Clairautsche* Differentialgleichung ihre große Bedeutung verloren. Führt man in (29) den *Radauschen* Parameter η ein, so folgt:

$$\eta = \frac{c}{e} \frac{de}{dc} = \frac{5}{2} \frac{\bar{\varepsilon}}{e} - 2, \quad \dots (29a)$$

welche Gleichung in der klassischen Theorie als Oberflächenbeziehung bekannt war, jetzt aber für sämtliche innere Niveaufläche gilt. Zusammen mit den gleichfalls allgemein gültigen Grenzen (25) folgt sofort

$$0 \leq \eta \leq 3, \quad \dots (31)$$

was besagt, daß stets $de/dc \geq 0$. Der Parameter η ist zugleich ein Maß für die Massenkonzentration in der Figur. Der Wert $\eta = 0$ gehört dem *MacLaurinschen* Ellipsoid zu, $\eta = 3$ den Niveauflächen des Massenpunktes im Ursprung des rotierenden Koordinatensystems. Im Innern jeder beliebigen heterogenen Gleichgewichtsfigur ist die Abplattung im Schwerpunkt ein Minimum und an der Oberfläche ein Maximum, wobei η im Schwerpunkt den unteren Grenzwert Null annimmt und nach oben ständig wächst. Setzt man in (29) $c = 0$, so erhält man die mit dem Dichtemaximum ρ_{max} verknüpfte minimale Abplattung e_0 :

$$\frac{5}{2} \bar{\varepsilon}_1 \rho_m = \frac{5}{2} \bar{\varepsilon} \bar{\rho} = \frac{5}{2} \bar{\varepsilon}_0 \rho_{max} = 2 e_0 \rho_{max}, \quad \dots (32)$$

woraus hervorgeht, daß bei fortschreitender Entblätterung die Restfigur einem homogenen Ellipsoid immer näher kommt ($e_0 = 5 \bar{\varepsilon}_0/4$). Dabei liegt die Abplattung innerhalb einer gegebenen Figur gemäß (23 a) und (32) zwischen den Grenzen

$$\frac{5}{4} \frac{\bar{\varepsilon}_1 \rho_m}{\rho_{max}} = e_0 \leq e \leq e_1 = \frac{5}{4} \bar{\varepsilon}_1 - \frac{1}{2} c_1 \left(\frac{de}{dc} \right)_1. \quad \dots (33)$$

Weil gemäß den Voraussetzungen über das Dichtegesetz $\bar{\rho}$ mit wachsendem c monoton abnimmt, muß $\bar{\varepsilon}$ ebenso wie e monoton wachsen, und zwar rascher als e , da ja in $e = h \bar{\varepsilon}$ der Koeffizient h mit wachsendem c ständig abnimmt. Für diese Änderung gilt wegen der Konstanz des Produktes $\bar{\varepsilon} \bar{\rho}$

$$\bar{\rho} \frac{d\bar{\varepsilon}}{dc} + \bar{\varepsilon} \frac{d\bar{\rho}}{dc} = 0 \quad \dots (34)$$

Für die zweite Ableitung von e folgt aus (23 a), (29) und (30) leicht

$$2 c^2 \frac{d^2 e}{dc^2} \bar{\rho} = 12 e \bar{\rho} - 15 \bar{\varepsilon} \rho, \quad \dots (35)$$

was für $c = 0$ auf (32) zurückführt.

5. Abplattungsfunktion, Schwereverlauf und Dichtegesetz

Führt man gemäß (19) eine Konstante D ein:

$$D = \frac{5}{2} \bar{\varepsilon} \bar{\rho} = \frac{15 \omega^2}{8 \pi k^2}, \quad \dots (36)$$

so kann die Differentialgleichung (29) geschrieben werden:

$$c \frac{de}{dc} + 2 e = \frac{5}{2} \bar{\varepsilon} = \frac{D}{\bar{\rho}}. \quad \dots (37)$$

Ihre Integration liefert die „Abplattungsfunktion“

$$e = \frac{D}{c^2} \int_0^c \frac{c}{\bar{\rho}} dc \quad \dots (38)$$

Führt man noch gemäß

$$\int_0^c \frac{c}{\bar{\rho}} dc = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{c^2}{2} \quad \dots (39)$$

den Durchschnittswert $\bar{\bar{\rho}}$ ein, so folgt

$$e = \frac{D}{2} \frac{1}{\bar{\bar{\rho}}}; \quad \frac{\bar{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} = \frac{4e}{5\bar{\epsilon}} \quad \dots (40)$$

und

$$c \frac{de}{dc} = D \left(\frac{1}{\bar{\rho}} - \frac{1}{\bar{\bar{\rho}}} \right) \geq 0, \quad \dots (41)$$

was mit (29a) und (31) im Einklang steht, da ja der Durchschnittswert $\bar{\bar{\rho}}(c)$ langsamer abnimmt als der Mittelwert $\bar{\rho}(c)$, also $\bar{\bar{\rho}} \geq \bar{\rho}$ ist, wobei das Gleichheitszeichen nur im Falle der Homogenität gilt. Es folgt aber daraus weiter, daß auch die zweite Ableitung von e positiv sein muß und somit aus (35)

$$\frac{12e}{15\bar{\epsilon}} \geq \frac{\rho}{\bar{\rho}} \quad \dots (42)$$

hervorgeht. Wieder gilt das Gleichheitszeichen nur im homogenen Falle ($12e = 15\bar{\epsilon}; \rho = \bar{\rho}$), und es wachsen innerhalb jeder heterogenen Gleichgewichtsfigur nicht nur die Abplattung e , sondern auch ihre beiden ersten Ableitungen ständig mit zunehmendem c .

Die Frage des Schwereverlaufes sei bloß am einfachen Beispiel der geschichteten Kugel untersucht. Da jede differentielle, homogene Kugelschale die Masse $4\pi\rho c^2 dc$ enthält, gilt für die Schwere an der Oberfläche der Kugel

$$g_1 = \frac{k^2 E}{c_1^2} = \frac{4\pi k^2}{c_1^2} \int_0^{c_1} \rho c^2 dc \quad \dots (43)$$

Die Ableitung in Richtung der inneren Normale ist:

$$\frac{dg}{dn_i} = -\frac{dg}{dc} = 4\pi k^2 \left(\frac{2}{c_1^3} \int_0^{c_1} \rho c^2 dc - \rho_1 \right) = 4\pi k^2 \left(\frac{2}{3} \rho_m - \rho_1 \right). \quad \dots (44)$$

Im Falle der Homogenität ist der Klammerausdruck negativ und das Schweremaximum liegt an der Oberfläche, zumal ja bei einer Erhebung über die Oberfläche die Schwere abnimmt. Mit beginnender Massenkonzentration innerhalb der Figur vermindert sich die Oberflächendichte ρ_1 , bis schließlich ρ_1 auf $2\rho_m/3$ abgesunken ist. Wird dieser Wert unterschritten, so wird dg/dn_i positiv und das Schweremaximum rückt ins Innere. Nach dessen Überschreitung in einer bestimmten Niveaufläche c sinkt die Schwere stetig bis auf Null im Zentrum ab. Es gibt also ein bestimmtes c zwischen 0 und c_1 , für welches dg/dc verschwindet (Theorem von Saigy).

Zur Prüfung eines Ansatzes für das Dichtegesetz $\rho = \rho(c)$ stand in der klassischen Theorie nur die Erde zur Verfügung: es soll sich die mittlere Dichte ($\rho_m = 5,517$) und die Oberflächendichte ($\rho_1 = \rho_{min} \sim 2,67$) richtig ergeben und es sollen auch für die Hauptträgheitsmomente C und A die richtigen Werte resultieren.

Überdies wird eine gute Approximation für die Oberflächenabplattung ($e_1 \sim 1:298$) gefordert. Für die Trägheitsmomente steht in erster Linie die aus der Präzessionskonstante folgende dynamische Abplattung zur Verfügung:

$$H = (C - A) : C = 32724 \cdot 10^{-7} = 1:305,6 \quad \dots (45)$$

Für das schwach abgeplattete, homogene Rotationsellipsoid gilt:

$$C = \frac{8}{15} \pi \rho a^4 c = \frac{8}{15} \pi \rho c^5 (1 + 4e) \quad \dots (46)$$

$$A = \frac{4}{15} \pi \rho a^2 c (a^2 + c^2) = \frac{8}{15} \pi \rho c^5 (1 + 3e)$$

woraus für das stetig geschichtete Ellipsoid folgt:

$$C = \frac{8\pi}{15} \int_0^{c_1} \rho \frac{d}{dc} [c^5 (1 + 4e)] dc;$$

$$A = \frac{8\pi}{15} \int_0^c \rho \frac{d}{dc} [c^5 (1 + 3e)] dc$$

$$H = \int_0^c \rho \frac{d}{dc} (e c^5) dc : \int_0^{c_1} \rho \frac{dc^5}{dc} dc. \quad \dots (47)$$

Ohne auf die weitere Ableitung einzugehen, bei der sich übrigens die hohe Bedeutung der *Radauschen* Transformation erweist, sei bloß das Ergebnis angeführt:

$$H = \frac{e_1 - \frac{1}{2} \bar{e}_1}{1 - \frac{2}{5} \sqrt{\frac{5\bar{e}_1}{2e_1} - 1}} \quad \dots (48)$$

Es liefert aus H und $\bar{e}_1 = 34615 \cdot 10^{-7}$, also aus den Daten $[H, E, \omega, c]$, die Abplattung $e_1 = 1:297,6$ in bemerkenswert guter Annäherung (*Poincaré*¹³)).

Die verschiedenen klassischen Ansätze für das Dichtegesetz wurden meist nach rein mathematischen Gesichtspunkten vorgenommen, um die Integration der *Clairautschen* Differentialgleichung zu erleichtern. *Legendre*¹⁴) nahm an:

$$c^2 \frac{d\rho}{dc} = -m^2 \int_0^c \rho c^2 dc, \quad \dots (49)$$

wo m eine Konstante bedeutet. Differentiation nach c ergibt:

$$c^2 \frac{d^2\rho}{dc^2} + 2c \frac{d\rho}{dc} + m^2 \rho c^2 = 0$$

oder

$$\frac{d^2}{dc^2} (\rho c) + m^2 (\rho c) = 0 \quad \dots (50)$$

Das allgemeine Integral dieser linearen Differentialgleichung 2. O. ist

$$\rho c = G \sin mc + H \cos mc.$$

Da aber die Dichte im Schwerpunkt endlich sein muß, folgt $H = 0$ und

$$\rho = \frac{1}{c} G \sin mc \quad \dots (51)$$

Die beiden Konstanten G und m werden so bestimmt, daß gute Werte für die mittlere Dichte, die Oberflächendichte und die Abplattung der Oberfläche resultieren. Wir verdanken *Laplace* die physikalische Interpretation dieses Dichtegesetzes. Er geht von der Annahme aus, daß eine Flüssigkeit einer Kompression durch Druck umso mehr Widerstand leistet, je dichter sie bereits ist. Ist also $f(\rho)$ eine mit ρ wachsende Funktion, so können wir setzen:

$$d\rho = dp/f(\rho); f(\rho) = h\rho; h = \text{const.} \quad \dots (52)$$

Wir setzen wieder eine geschichtete Kugel voraus und nehmen den Aufpunkt in der Niveaufläche c an, der nur von den innerhalb dieser Niveaufläche liegenden Massen

$$\frac{4}{3} \pi c^3 \bar{\rho} = 4\pi \int_0^c \rho c^2 dc$$

angezogen wird. Wegen $g_c = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial c}$ folgt sofort

$$\frac{dp}{dc} = - \frac{4\pi k^2 \rho}{c^2} \int_0^c \rho c^2 dc$$

und zusammen mit (52)

$$c^2 \frac{d\rho}{dc} = - \frac{4\pi k^2}{h} \int_0^c \rho c^2 dc, \quad \dots (49a)$$

was mit (49) übereinstimmt. Dies besagt aber, daß die Zunahme der Dichte nach innen nur eine Folge der Gravitation der Masse ist und daß die allein durch die Gravitation verursachte Druckzunahme proportional der Dichte erfolgt.

*Lévy*¹⁵⁾ setzt:

$$\bar{\rho} = \frac{3}{c^3} \int_0^c \rho c^2 dc = \rho_0 \left[1 - \nu \left(\frac{c}{c_1} \right)^\lambda \right]^\mu \quad \dots (53)$$

Damit das Dichtemaximum ρ_0 im Schwerpunkt endlich bleibt, muß λ positiv sein. Ferner ist unmittelbar klar, daß der Faktor von ρ_0 zwischen 0 und 1 liegen muß. Wählt man ν positiv, so muß $\nu < 1$ und $\mu > 0$ sein. Multipliziert man (53) mit c^3 und differenziert nach der oberen Grenze:

$$3 \rho c^2 = \rho_0 \frac{d}{dc} \left\{ c^3 \left[1 - \nu \left(\frac{c}{c_1} \right)^\lambda \right]^\mu \right\},$$

so erhält man das Dichtegesetz

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \nu \left(\frac{c}{c_1} \right)^\lambda \right]^{\mu-1} \cdot \left[1 - \nu \left(\frac{c}{c_1} \right)^\lambda \left(1 + \frac{\lambda\mu}{3} \right) \right] \quad \dots (54)$$

Für $\mu = 1$ resultiert das Dichtegesetz von *Lipschitz*¹⁶⁾

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \nu \left(\frac{c}{c_1} \right)^\lambda \left(1 + \frac{\lambda}{3} \right) \right] \quad \dots (55)$$

und hieraus mit $\lambda = 2$ das Dichtegesetz von *Roche*¹⁷⁾

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \frac{5}{3} \nu \left(\frac{c}{c_1} \right)^2 \right] = \rho_0 \left[1 - \nu' \left(\frac{c}{c_1} \right)^2 \right] \quad \dots (56)$$

Als „modifiziertes *Lévy*sches Dichtegesetz“ bezeichnen wir den Ansatz:

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \nu \left(\frac{c}{c_1} \right)^\lambda \right]^\mu, \quad \dots (53a)$$

in welchem die individuelle Dichte ρ in der jeweiligen Niveaufläche c an Stelle der mittleren Dichte der von dieser Niveaufläche eingeschlossenen Masse tritt.

*Helmert*¹⁸⁾ führt die Reihenentwicklungen:

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} c^{2n} \right); \quad e = e_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} c^{2n} \right) \quad \dots (57)$$

für die Dichte und die Abplattung in die Gleichung (20) ein. Da die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von $(c:c_1)$ verschwinden müssen, kann man die b_{2n} in den a_{2n} ausdrücken und unter Beachtung der obigen Bedingungen für das Dichtegesetz der Erde numerisch ermitteln.

Da sich später das modifizierte *Lévy*-Gesetz als Grundtyp des Dichtegesetzes der Gleichgewichtsfiguren erweisen wird, brauchen wir die weiteren Versuche in dieser Richtung nicht mehr verfolgen. Aber auch von einer Schilderung der weiteren Entwicklung der klassischen Theorie bis in die jüngste Zeit wollen wir trotz der vielen hervorragenden Ergebnisse absehen, zumal ja hier eine Begründung auf dem Außenraumpotential beabsichtigt ist. Es sei daher nur noch kurz erwähnt, daß bereits *G. H. Darwin*¹⁹⁾ die Theorie auf die Glieder 4. O. ausgedehnt hat. Hinsichtlich einer Darstellung der klassischen Theorie darf auf *S. Oppenheim*²⁰⁾ und *F. Hopfner*²¹⁾ verwiesen werden.

II. Die Entwicklung der Theorie aus dem Außenraumpotential

1. Die einparametrischen sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren

Im Anschluß an *Bruns* und *Helmert* gehen wir von den Niveausphäroiden mit der Potentialentwicklung

$$U = \frac{k^2 E}{l} \left[1 - \sum_{i=1}^{\infty} J_{2i} \left(\frac{a}{l} \right)^{2i} P_{2i}(\cos\vartheta) + \frac{\omega^2 a^3}{3k^2 E} \left(\frac{l}{a} \right)^3 (1 - P_2) \right] \quad \dots (1)$$

aus. Hierin sind die P_{2i} die geraden, zonalen Kugelfunktionen und die J_{2i} die Masse-

funktionen, die aus den Massenmomenten K_{2i} bei Division durch die entsprechenden Potenzen des Äquatorradius a hervorgehen:

$$J_{2i} = K_{2i} : a^{2i} . \quad \dots (2)$$

Der Ausdruck (1) gilt für alle äußeren Niveauflächen sämtlicher sphäroidischer, rotations- und äquatorsymmetrischen Massenordnungen und insbesondere auch für die freien Oberflächen aller sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren. Im allgemeinen konvergiert diese Entwicklung nur im Außenraum der kleinsten, die gesamte Masse E gerade noch einschließenden Kugel, im besonderen aber auch bis an die Oberfläche der Masse. So findet man für das homogene Rotationsellipsoid $[E, a, c]$ für einen in der verlängerten Rotationsachse liegenden Aufpunkt ($x = y = 0, z = l > c$), der überdies die Bedingung $l \geq \bar{e} = \sqrt{a^2 - c^2}$ erfüllt, die Entwicklung:

$$V = \frac{k^2 E}{l} + 3k^2 E \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i (a^2 - c^2)^i}{(2i + 1)(2i + 3) l^{2i+1}}$$

Für den Aufpunkt in der Rotationsachse sind alle *Legendreschen* Polynome eins und es gilt daher wegen der Eindeutigkeit der Entwicklung für jeden beliebigen Aufpunkt mit $r \geq \bar{e}$:

$$V = \frac{k^2 E}{l} \left[1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{3(-1)^{i-1} \bar{e}^{2i}}{(2i + 1)(2i + 3) a^{2i}} \left(\frac{a}{l}\right)^{2i} P_{2i} \right] \quad \dots (3)$$

Vergleich mit (1) liefert für die Massenfunktionen

$$J_{2i} = \frac{3(-1)^{i-1}}{(2i + 1)(2i + 3)} \left(\frac{\bar{e}}{a}\right)^{2i} \quad \text{und speziell } J_2 = + \frac{1}{5} \left(\frac{\bar{e}}{a}\right)^2 \quad \dots (4)$$

Für das Massenmoment 2. O. folgt im Hinblick auf I, (46)

$$K_2 = \frac{1}{5} \bar{e}^2 = \frac{1}{5} (a^2 - c^2) = \frac{C - A}{E} \quad \dots (4a)$$

Für schwach abgeplattete Ellipsoide ist die Differenz der Trägheitsmomente klein und die höheren Massefunktionen konvergieren sehr rasch gegen Null. Die Reihe (3) konvergiert für alle $l \geq \bar{e}$, d. h. außerhalb der Fokalkugel vom Radius \bar{e} und mithin auch an der Oberfläche des Ellipsoides, wenn die Fokalkugel ganz innerhalb der Oberfläche liegt. Der Grenzfall $\bar{e} = c$ tritt aber erst für die Abplattung 1:3,414 ein. Da ferner die Abweichung der Niveausphäroide von den achsengleichen Rotationsellipsoiden eine Größe 4. O. ist, ist es sehr wahrscheinlich, daß die Entwicklung (1) auch an der Oberfläche aller sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren konvergiert. Später wird sich erweisen, daß für das Normalsphäroid der Erde die Glieder 6. O. bereits praktisch bedeutungslos sind. Dann aber kann man mit *K. Jung*²²⁾ die Brauchbarkeit der Kugelkoordinaten nachweisen, indem man zeigt, daß die in Kugelkoordinaten und in rotationssymmetrischen Ellipsoidkoordinaten definierten Niveausphäroide 4. O. bis auf Größen 6. O. übereinstimmen.

Wir schreiben das *Helmertsche* Niveausphäroid 4. Ranges in der Form

$$U_4 = \frac{k^2 E}{l} \left[1 - J_2 \left(\frac{a}{l} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \right) - J_4 \left(\frac{a}{l} \right)^4 \cdot \left(\frac{35}{8} \cos^4 \vartheta - \frac{30}{8} \cos^2 \vartheta + \frac{3}{8} \right) + \frac{\omega^2 a^3}{3k^2 E} \left(\frac{l}{a} \right)^3 \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta \right] \quad \dots (5)$$

Die Massenmomente sind:

$$K_2 = J_2 a^2 = - \frac{1}{E} \int_E P_2 l'^2 dm = (C - A) : E$$

$$K_4 = J_4 a^4 = - \frac{1}{E} \int_E P_4 l'^4 dm \quad \dots (6)$$

In der Theorie spielen noch die Formel für die theoretische Schwere auf dem Niveausphäroid sowie die Abweichung des Niveausphäroides vom achsengleichen Rotationsellipsoid eine wichtige Rolle. Beide werden in Funktion der geographischen Breite φ und nicht in Funktion der geozentrischen Poldistanz $\vartheta = 90^\circ - \varphi'$ gegeben:

$$\gamma = \gamma_0 \left[1 + \beta \sin^2 \varphi - \frac{1}{4} \beta_4 \sin^2 2\varphi \right]; \quad \dots (7)$$

$$(l - s) = \frac{a}{4} f_4 \sin^2 2\varphi; \quad h_{max} = \frac{a}{4} f_4. \quad \dots (8)$$

In der letzten Gleichung ist s der Radiusvektor des Ellipsoides und f_4 der *Darwinsche* Formparameter, der durch den Index als Größe 4. O. gekennzeichnet ist. h_{max} stellt die maximale Erhebung des Niveausphäroides über das achsengleiche Rotationsellipsoid dar, die unter 45° Breite auftritt. Sie ist übrigens mit dem Formparameter f_4 stets negativ, so daß das Niveausphäroid gänzlich vom Ellipsoid umschlossen wird.

Das ganze Problem enthält mithin 13 Parameter, und zwar neben der gegebenen gedachten Masse E die drei geometrischen Bestimmungsstücke Äquatorachse a , Abplattung $e = (a - c) : a$ und den Formparameter f_4 ; die drei Bestimmungsstücke der theoretischen Schwere: die Äquatorschwere γ_0 , die Schwereabplattung β und den Koeffizienten β_4 ; drei Massengrößen: die mittlere Dichte ρ_m , die statische Abplattung J_2 und die Massefunktion J_4 ; schließlich drei weitere physikalische Größen: die Rotationsgeschwindigkeit ω , das Verhältnis $\varepsilon = \omega^2 a / \gamma_0$ von Fliehkraft zur Schwere im Äquator oder bequemer $\bar{\varepsilon} = \omega^2 a^3 / k^2 E$, sowie den Potentialwert W_0 .

Zwischen diesen 13 Größen bestehen 8 Gleichungen, das sogenannte „Helmert-System“ [HG II, Seite 77–85]. Wir bringen es in eine solche Form, daß die übrigen acht Parameter in Funktion von E , a , e , $\bar{\varepsilon}$ und J_4 erscheinen:

$$1) \quad e + \beta = \frac{5}{2} \bar{\varepsilon} - e^2 - 3e\bar{\varepsilon} + \frac{15}{4} \bar{\varepsilon}^2 - \frac{5}{4} J_4$$

$$2) \quad \gamma_0 = \frac{k^2 E}{a^2} \left[1 + e - \frac{3}{2} \bar{\varepsilon} - e^2 + e\bar{\varepsilon} - \frac{5}{2} J_4 \right]$$

$$\begin{aligned}
3) \quad & 3 J_2 = 2e - \bar{\varepsilon} - 2e^2 + 2e\bar{\varepsilon} - \frac{5}{4} J_4 \\
4) \quad & W_0 = \frac{k^2 E}{a} \left[1 + \frac{\bar{\varepsilon}}{3} + \frac{e}{3} - \frac{e^2}{3} + \frac{1}{3} e\bar{\varepsilon} - \frac{7}{12} J_4 \right] \\
5) \quad & \beta_4 = -\frac{105}{8} J_4 - 11 e^2 + 10e\bar{\varepsilon} \quad \dots (9) \\
6) \quad & \varepsilon = \frac{\omega^2 a}{\gamma_0} \quad \text{oder} \quad \varepsilon = \bar{\varepsilon} \left(1 - e + \frac{3}{2} \bar{\varepsilon} \right) \\
7) \quad & f_4 = \frac{7}{2} e^2 - \frac{5}{2} e\bar{\varepsilon} + \frac{35}{8} J_4 \\
8) \quad & \rho_m \doteq \frac{3E}{4\pi} \frac{1}{a^3 (1 - e)}
\end{aligned}$$

Die erste Gleichung ist das erweiterte *Clairauts*che Theorem. Wird die geometrische Abplattung als kleine Größe 2. O. bezeichnet, so sind β , J_2 und ε oder $\bar{\varepsilon}$ von 2. O., β_4 , J_4 und f_4 von 4. O. Für die gegeben gedachte Masse hat das *Helmert*-System ∞^4 Lösungen. Die nötigen 5, resp. 4 freien Parameter sind nur bedingt frei, d. h. sie können weder in ihrer Kombination, noch in ihren Zahlwerten ganz beliebig gewählt werden. Ein besonders wichtiges System der freien Parameter sind die *Stokess*chen Elemente: E , ω und $S(a, e, f_4)$. Die Flächen S oder die Niveausphäroide $U = \text{const}$ sind in Näherung 4. O. die Niveauflächen aller überhaupt denkbaren sphäroidischen, rotations- und äquatorsymmetrischen Massenordnungen. Innerhalb gewisser Grenzen für f_4 repräsentieren die Flächen $S(a, e, f_4)$ natürlich auch die Näherungen 4. O. für die Oberflächen sämtlicher sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren und speziell in aller Strenge die „einparametrischen“ Gleichgewichtsfiguren, womit gemeint ist, daß für diese alle bei weiterer Entwicklung auftretenden höheren Formparameter f_6, f_8, f_{10}, \dots streng Null sind. Um diese ∞^3 einparametrischen Gleichgewichtsfiguren aus den ∞^4 Lösungen des Systems herausheben zu können, wäre eine neunte Gleichung erforderlich, und zwar am besten die Gleichgewichtsbedingung $\omega = \omega(E, S)$ oder

$$\bar{\varepsilon} = x e + y e^2 + \dots \quad \dots (10)$$

Solange aber diese Verallgemeinerung der *MacLaurin*schen Gleichgewichtsbedingung I, 1a) für die homogenen Ellipsoide unbekannt ist, müssen wir uns nach einem geometrischen Ersatz der fehlenden Gleichgewichtsbedingung umsehen, d. h. nach einer geometrischen Eigenschaft der freien Oberfläche der einparametrischen Gleichgewichtsfiguren, welche gestattet, diese aus der Gesamtheit der Lösungen herauszuheben. Neben der strengen Eindeutigkeit des Dichtegesetzes und dem Prinzip der Entblätterung ist dies die dritte und letzte Voraussetzung für eine Bestimmung der Gleichgewichtsfiguren vom Außenraum her. Wie schon in § 3 des ersten Abschnittes ausgeführt wurde, reduzieren sich die *Stokess*chen Elemente im Gleichgewichtsfalle auf E und S , und ω wird ebenso wie die allgemeinen *Stokess*chen Konstanten eine eindeutige Funktion dieser Elemente.

Im Falle des homogenen Ellipsoides liegt die Gleichgewichtsbedingung vor. Zusammen mit der weiteren Gleichung $f_4 = 0$ hat dann das *Helmert*-System 10 Gleichungen und sämtliche Ellipsoide sind mögliche *MacLaurinsche* Ellipsoide $[E, a, e]$. Das System vereinfacht sich wesentlich:

$$\begin{array}{ll}
 1) \quad \beta = e + e^2; & 2) \quad \gamma_0 = \frac{k^2 E}{a^2} \left(1 - \frac{1}{5} e - \frac{2}{7} e^2 \right); \\
 3) \quad J_2 = \frac{1}{5} (2e - e^2); & 4) \quad W_0 = \frac{k^2 E}{a} \left(1 + \frac{3}{5} e + \frac{12}{35} e^2 \right) \\
 5) \quad \beta_4 = + \frac{3}{2} e^2; & 6) \quad \varepsilon = \frac{4}{5} e + \frac{138}{175} e^2; \quad \dots (11) \\
 7) \quad \bar{\varepsilon} = \frac{4}{5} e + \frac{22}{35} e^2; & 8) \quad f_4 = 0 \\
 9) \quad J_4 = - \frac{12}{35} e^2; & 10) \quad \varrho_m = \frac{3E}{4\pi} \frac{1}{a^3 (1 - e)}
 \end{array}$$

Man beachte, daß die dritte, die achte und zehnte Gleichung streng gültig sind, und daß das System noch um das Hauptträgheitsmoment C und die dynamische Abplattung erweitert werden kann:

$$C = \frac{2}{5} E a^2; \quad H = e - \frac{1}{2} e^2. \quad \dots (11a)$$

Diese Gleichungen sind teilweise schon in § 2 des ersten Abschnittes gebracht worden.

Ein interessanter Schluß ergibt sich bei Beschränkung auf die Näherung 2. O., d. h. auf das *Brunssche* Niveausphäroid zweiten Ranges von Rotationsform. Zusammen mit β_4 und J_4 müssen wir logischerweise auch f_4 vernachlässigen. Wir haben dann bloß 10 Parameter und 6 Gleichungen, also bei gegebener Masse ∞^3 Lösungen, jedoch nur ∞^2 Flächen $S(a, e)$. Sämtliche Niveausphäroide zweiten Ranges sind also Rotationsellipsoide und nicht, wie man gewöhnlich aus $U_2 = \text{const}$ ableitet, algebraische Flächen 14. Ordnung. Hierin liegen auch die Bedenken gegen die drei *Helmertschen* „Normalformen“ [HG II, S. 89–92] begründet. Jedesmal werden die Parameter 4. O. berechnet, nachdem einer davon willkürlich Null gesetzt wurde:

1. Normalform ($\beta_4 = 0$): die stets positive (!) Differenz $(l - s)$ erreicht das Maximum 12,6 m.

2. Normalform ($J_4 = 0$) oder *Brunssches* Niveausphäroid: die abermals positive Differenz $(l - s)$ erreicht das Maximum 16,7 m.

3. Normalform ($f_4 = 0$) oder allgemeines Niveauellipsoid.

Man sieht also, daß die beiden ersten Annahmen die Differenz $(l - s)$ sogar im Vorzeichen unrichtig ergeben.

Eine zweite, sehr wichtige Spezialisierung des *Helmert*-Systems ergibt sich für den Massenpunkt im Ursprung des rotierenden Koordinatensystems. Wir werden später erkennen, daß es sich dabei um einen fiktiven Grenzfall einer zweiparametrischen Gleichgewichtsfigur handelt. Die mittlere Dichte verliert hier ihren Sinn und die beiden Massefunktionen verschwinden: $J_2 = J_4 = 0$. Es bleiben demnach

7 Gleichungen mit bloß 10 Parametern, d. h. wir haben für gegebenes E wieder ∞^2 Lösungen; tatsächlich gibt es wegen der freien Wahl von ω und a ∞^2 derartige „zweiparametrische Sphäroide der größten Massenkonzentration“ in Näherung 4. O. Die dritte Gleichung (9) wird zur Bestimmungsgleichung für $\bar{\varepsilon}$:

$$\begin{array}{ll}
 1) \quad \beta = 4e + 13e^2; & 2) \quad \gamma_0 = \frac{k^2 E}{a^2} (1 - 2e - 2e^2); \\
 3) \quad \bar{\varepsilon} = 2e + 2e^2; & 4) \quad W_0 = \frac{k^2 E}{a} (1 + e + e^2); \quad \dots (12) \\
 5) \quad \beta_4 = +9e^2; & 6) \quad \varepsilon = \frac{\omega^2 a}{\gamma_0} \text{ oder } \varepsilon = 2e + 6e^2; \\
 7) \quad f_4 = -\frac{3}{2} e^2.
 \end{array}$$

Überdies gewinnen wir leicht einen strengen Ausdruck für $\bar{\varepsilon}$, indem wir die Potentialwerte im Pol und Äquator einander gleich setzen:

$$\begin{aligned}
 U(a) &= \frac{k^2 E}{a} \left(1 + \frac{1}{2} \bar{\varepsilon} \right) = U(c) = \frac{k^2 E}{c}; \\
 a - c &= \frac{1}{2} \bar{\varepsilon} c; \quad \bar{\varepsilon} = \frac{2e}{1 - e} = 2e + 2e^2 + \dots \quad \dots (12a)
 \end{aligned}$$

Hiermit kann die äußerste Niveaufläche des Massenpunktes bestimmt werden, die durch $\gamma_0 = 0$ definiert ist. In ihrem Äquator sind die Anziehung $k^2 E/a^2$ und die Fliehkraft $\omega^2 a$ entgegengesetzt gleich. Es ist also $\bar{\varepsilon} = 1$ oder $2e = 1 - e$, d. h. $e = 1/3$. Mit der Erdmasse ergibt sich z. B. für den Äquatorradius der Grenzfläche mit $\omega^2 = 5 \cdot 10^{-9}$, resp. $1 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-2}$ leicht $a = 43039 \text{ km}$, resp. $a = 1585 \text{ km}$.

Jede der ∞^3 einparametrischen Gleichgewichtsfiguren ist durch E und die freie Oberfläche $S(a, e, f_4)$ oder durch E und drei geeignet gewählte Bestimmungsstücke eindeutig gegeben. Man kann diese Figuren durch die Punkte eines räumlichen Koordinatensystems mit den Achsen a , e und $|f_4|$ darstellen. Wie die Grenzfälle des homogenen Ellipsoides und des Massenpunktes lehren, ist der Formparameter stets Null oder negativ und sein Absolutbetrag liegt zwischen den Grenzen: $0 \leq |f_4| \leq \frac{3}{2} e^2$. Die *MacLaurinschen* Ellipsoide sind durch einen unendlichen Streifen der (a, e) -Ebene repräsentiert. Geht man von einem bestimmten Ellipsoid vertikal, d. h. parallel zur f_4 -Achse nach oben, so wird bei zunehmender Massenkonzentration schließlich eine Niveaufläche des Massenpunktes und damit die Hüllfläche der Gleichgewichtsfiguren erreicht. Es liegt nun die Annahme sehr nahe, daß alle diese Figuren auch mögliche einparametrische Gleichgewichtsfiguren sind. Die Punkte der Hüllfläche wären dann die einparametrischen Sphäroide der größten Massenkonzentration und zwar reelle Grenzfiguren, da ja die einparametrischen Gleichgewichtsfiguren, die sich an die *MacLaurinschen* Ellipsoide anschließen, ein stetiges Dichtegesetz haben müssen, bei dem die Oberflächendichte niemals völlig auf Null absinken kann. Darüber hinaus wissen wir nur noch, daß J_2 mit der Differenz der Trägheitsmomente $(C - A)$ wesentlich positiv ist; J_2 verschwindet nur in den beiden Grenzfällen der ruhenden homogenen oder geschichteten Kugel und des Massen-

punktes. Auch J_4 verschwindet in diesen beiden Grenzfällen und ist sonst stets negativ.

Wir suchen zuerst einen Ersatz für die fehlende Gleichgewichtsbedingung und studieren zu diesem Zwecke die lineare Reihe von Gleichgewichtsfiguren, welche in Näherung 4. O. eine gemeinsame Niveaufläche $S(a, e, f_4)$ besitzen. Geht man von einem *MacLaurinschen* Ellipsoid $[E, a, e]$ aus, so liegen wegen der Konstanz der Massenmomente K_2 und K_4 bei der Berechnung beliebiger äußerer Niveauflächen die zur Auflösung des *Helmert-Systems* notwendigen fünf Bestimmungsstücke $[E, a, \omega, J_2, J_4]$ vor. Es zeigt sich, daß der Absolutbetrag des Formparameters mit zunehmender Erhebung über die Oberfläche, d. h. mit wachsendem a ständig wächst. Für diese Änderung des Formparameters findet man gemäß der 7. Gleichung (9)

$$\begin{aligned} a \frac{df_4}{da} &= a \frac{d}{da} \left(\frac{7}{2} e^2 - \frac{5}{2} e \bar{e} + \frac{35}{8} J_4 \right) = \\ &= \left(7e - \frac{5}{2} \bar{e} \right) a \frac{de}{da} - \frac{5}{2} ea \frac{d\bar{e}}{da} + \frac{35}{8} a \frac{dJ_4}{da} \end{aligned}$$

Wegen Vernachlässigung der Glieder 6. O. dürfen wir in den Differentialquotienten bereits die Glieder 4. O. unterdrücken:

$$\begin{aligned} a \frac{dJ_4}{da} &= a \frac{d}{da} \left(\frac{K_4}{a^4} \right) = -4 J_4; \\ a \frac{d}{da} \left(\frac{3K_2}{a^2} \right) &= -6 J_2 = -4e + 2\bar{e} = 2a \frac{de}{da} - a \frac{d\bar{e}}{da} \\ a \frac{d\bar{e}}{da} &= a \frac{d}{da} \left(\frac{\omega^2 a^3}{k^2 E} \right) = 3\bar{e}, \end{aligned}$$

$$\text{also} \quad a \frac{de}{da} = \frac{5}{2} \bar{e} - 2e \quad \dots (13a)$$

$$\text{und} \quad a \frac{df_4}{da} = 15 e \bar{e} - 14 e^2 - \frac{25}{4} \bar{e}^2 - \frac{35}{2} J_4, \quad \dots (13b)$$

welcher Ausdruck an der Oberfläche des Ellipsoides verschwindet, für die äußeren Niveauflächen aber negativ ist.

Wir wählen eine spezielle äußere Niveaufläche $S_0(a_0, e_0, f_0)$ und kombinieren sie mit einer kleineren Rotationsgeschwindigkeit ω_i , was mit größeren Massenmomenten $K_{2,i}$ und $|K_{4,i}|$ verbunden ist:

$$\begin{aligned} 3 J_{2,i} &= (2e_0 - 2e_0^2) - \bar{e}_i + 2e_0 \bar{e}_i - \frac{5}{4} J_{4,i} = \\ &= \left[2e_0 - e_0^2 - \frac{2}{7} f_0 \right] - \left[1 - \frac{9}{7} e_0 \right] \frac{a_0^3}{k^2 E} \omega_i^2; \quad \dots (14) \\ - \frac{35}{8} J_{4,i} &= \frac{7}{2} e_0^2 - \frac{5}{2} e_0 \bar{e}_i - f_0 = \left(\frac{7}{2} e_0^2 - f_0 \right) - \frac{5}{2} \frac{e_0 a_0^2}{k^2 E} \omega_i^2 \end{aligned}$$

Diese Massenmomente gehören aber nicht nur zur Gleichgewichtsfigur $[E, \omega_i, K_{2,i}, K_{4,i}]$, sondern auch zur ganzen Schar ihrer äußeren Niveauflächen. Durch

freie Wahl von Achsenwerten $a < a_0$ gewinnen wir die tiefer gelegenen äußeren Niveauflächen der gesuchten Gleichgewichtsfigur. Es resultiert eine Parabel (Fig. 5), in deren linkem Ast die gesuchte Figur wegen $df_4/da > 0$ sicher nicht liegen kann. Hingegen muß dem tiefsten Punkt der Kurve ($df_4/da = 0$) offensichtlich eine besondere Bedeutung zukommen und es liegt daher nahe, zunächst natürlich rein hypothetisch, die einparametrischen Gleichgewichtsfiguren durch $df_4/da = 0$ zu definieren. Mit dieser Annahme folgt aber aus (13) eine Bestimmungsgleichung für J_4 :

$$J_4 = -\frac{4}{5}e^2 + \frac{6}{7}e\bar{e} - \frac{5}{14}\bar{e}^2 \quad \dots \quad (15)$$

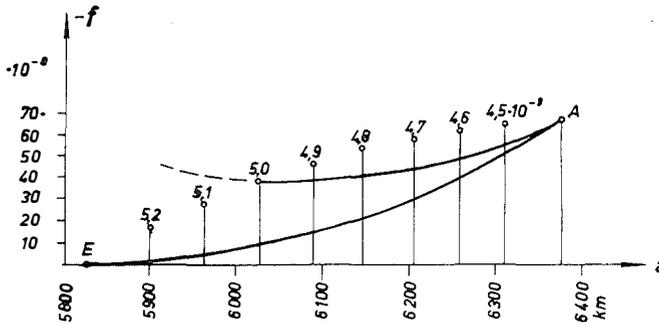


Fig. 5

Mit abnehmendem ω_i nähert sich der Scheitel der zugehörigen Kurve immer mehr dem Punkt S_0 , bis schließlich für ein bestimmtes ω_{min} die Fläche S_0 zur freien Oberfläche einer einparametrischen Gleichgewichtsfigur wird. In der Figur diene als Ausgang das Ellipsoid $E = 5976,3 \cdot 10^{24} \text{ g}$, $a = 5819390 \text{ m}$, $\omega^2 = 5,317496 \cdot 10^{-9} \text{ sec}^{-2}$ während für die äußere Niveaufläche S_0 der Äquatorradius der Erde $a_0 = 6378290 \text{ m}$ gewählt wurde. Die minimale Rotationsgeschwindigkeit ($\omega_{min} = 4,371 \cdot 10^{-9}$) folgt leicht aus dem späteren Gleichungssystem (23) für die einparametrischen Gleichgewichtsfiguren²²⁾.

Die Reihe der einparametrischen Gleichgewichtsfiguren mit einer, in Näherung 4. O. gemeinsamen äußeren Niveaufläche S_0 beginnt im allgemeinen mit einem Ellipsoid von maximaler Rotationsgeschwindigkeit. An dieses schließen sich mit zunehmendem a und gleichzeitig zunehmender Massenkonzentration heterogene Gleichgewichtsfiguren an, bis schließlich für eine minimale Rotationsgeschwindigkeit S_0 in aller Strenge zur freien Oberfläche der Grenzfigur wird. Grenzfälle stellen das Ellipsoid und die Niveauflächen des Massenpunktes dar:

1. Ist S_0 selbst ein Ellipsoid ($f_4 = 0$), so fallen Maximum und Minimum der Rotationsgeschwindigkeit zusammen. Ein Ellipsoid kann niemals äußere Niveaufläche oder freie Oberfläche einer heterogenen Gleichgewichtsfigur sein.

2. Für $f_4 = -\frac{3}{2}e^2$ ist die gegebene Fläche äußere Niveaufläche eines Massenpunktes, der als dimensionsloses Ellipsoid von maximaler Rotationsgeschwindigkeit aufgefaßt werden darf. Für minimales ω wird die Fläche selbst einparametrisches Sphäroid der größten Massenkonzentration. Hingegen gibt es dazwischen keine Reihe heterogener Gleichgewichtsfiguren, wie wir später klar erkennen werden.

Setzt man $f_4 = -\kappa e^2$, so liegt für alle Gleichgewichtsfiguren κ zwischen den Grenzen: $0 \leq \kappa \leq 1,5$, und man findet durch Differentiation:

$$a \frac{df_4}{da} = -ae^2 \frac{d\kappa}{da} - 2e\kappa a \frac{de}{da} \quad \dots (16)$$

und speziell an der Oberfläche der einparametrischen Gleichgewichtsfiguren mit $df_4/da = 0$

$$\frac{d\kappa}{da} = -\frac{\kappa}{e^2} \frac{d}{da} (e^2) \quad \dots (16a)$$

An der Oberfläche der *MacLaurinschen* Ellipsoide verschwindet $d\kappa/da$ mit $\kappa = 0$. An der Oberfläche der einparametrischen Sphäroide der größten Massenkonzentration ist sicherlich $d\kappa/da$ negativ, zumal ja, wie später bewiesen wird, die äußeren Niveauflächen aller Gleichgewichtsfiguren selbst wieder als fiktive Grenzfälle von Gleichgewichtsfiguren gelten dürfen und daher stets unterhalb der Hüllfläche der Gleichgewichtsfiguren liegen müssen. Dies steht nicht im Widerspruch zu der Tatsache, daß der Absolutbetrag des Formparameters f_4 bei Erhebung über die Oberfläche wächst; es zeigt bloß, daß zuerst e^2 rascher ansteigt als $|f_4|$. Dies gilt aber auch an der Oberfläche aller heterogenen einparametrischen Gleichgewichtsfiguren, weil sicher de/da positiv ist.

Der Fall $\kappa = 1,5$ kann auch unabhängig von der Annahme $df_4/da = 0$ diskutiert werden. Gleichung (16) liefert dafür in Verbindung mit den beiden Gleichungen (13) und mit der 7. Gleichung des *Helmert-Systems* (9)

$$ae^2 \frac{d\kappa}{da} = 6,25 \bar{\varepsilon}^2 - 12,5 e \bar{\varepsilon}. \quad \dots (17)$$

Setzt man noch in Näherung 2. O. $\bar{\varepsilon} = x e$, so lautet die letzte Gleichung

$$a \frac{d\kappa}{da} = 6,25 x^2 - 12,5 x \quad \dots (17a)$$

und man findet für $\kappa = 1,5$ folgende kleine Tabelle:

$\varepsilon = 2,0$	$e; a \frac{d\kappa}{da} = -0,0000;$	$a \frac{df_4}{da} = -9,0000;$	$J_4 = 0,0000$	e^2
1,9	- 1,1875	- 7,0625	- 0,0571	
1,8	- 2,2500	- 5,2500	- 0,1143	
1,7	- 3,1875	- 3,5625	- 0,1714	
1,6	- 4,0000	- 2,0000	- 0,2286	
1,5	- 4,6875	- 0,5625	- 0,2857	
1,45830	- 4,9373	0,0000	- 0,3095	
1,4	- 5,2500	+ 0,7500	- 0,3429	

Für die Niveauflächen des Massenpunktes ist stets $\kappa = 1,5$ und daher $d\kappa/da = 0$. Die einparametrischen Sphäroide der größten Massenkonzentration sind wegen $df_4/da = 0$ durch $x = 1,45830$ definiert; für ihre äußeren Niveauflächen gilt $\bar{\varepsilon} \geq 1,4583 e^2$. Der gefundene x -Wert ist sehr plausibel; denn da an der Oberfläche der einparametrischen Sphäroide der größten Massenkonzentration die Dichte ρ_{min} nie ganz auf Null absinken kann, muß er weit unter dem Wert $x = 2$ des Massenpunktes liegen.

Für den Bereich sämtlicher Gleichgewichtsfiguren und deren äußerer Niveauflächen liegen die Grenzwerte vor: $0 \leq x \leq 1,5$; $0,8 \leq x \leq 2$; $0 \leq J_2 \leq 0,4 e$; $0 \leq |J_4| \leq \frac{12}{35} e^2$, wenn wir die Formelsysteme (9), (11) und (12) heranziehen. Aus Bequemlichkeitsgründen ersetzen wir vorübergehend die Massefunktion J_4 durch das *Helmertsche* $\delta = -\frac{35}{8} J_4$. Dann ist $\delta = +\sigma e^2$ und $0 \leq \sigma \leq 1,5 e^2$. Die *Mac Laurinschen* Ellipsoide sind durch $(x = 4/5; \kappa = 0; \sigma = 1,5)$ und die Niveauflächen des Massenpunktes durch $(x = 2, \kappa = 1,5; \sigma = 0)$ bestimmt. Von den drei Größen x , κ und σ sind nur zwei unabhängig, da gemäß der 7. Gleichung (9) die Relation

$$-\kappa + \sigma = \frac{7}{2} - \frac{5}{2} x \quad \dots (18)$$

besteht. In einem Koordinatensystem (x, κ) oder (x, σ) repräsentiert jeder Punkt innerhalb eines begrenzten Bereiches wegen der noch offenen Wahl von a und e je ∞^2 Lösungen des *Helmert-Systems* und man kann demnach innerhalb dieser Grenzen jede der ∞^4 möglichen Lösungen dieses Systems bei gegebener Masse als einparametrische Gleichgewichtsfigur oder eine zugehörige äußere Niveaufläche deuten, wie es im folgenden durchgeführt werden soll. Es ist jedoch zu bedenken, daß jede dieser Lösungen in Näherung 4. O. auch zahllose höherparametrische Gleichgewichtsfiguren einschließlich ihrer äußeren Niveauflächen, sowie zahllose sonstige rotations- und äquatorsymmetrische Massenkongfigurationen betrifft und daß überdies der Definitionsbereich aller Niveausphäroide durch $0 \leq x \leq 2$ definiert ist. Denn selbstverständlich gilt das *Helmert-System* auch z. B. für alle ruhenden Massenkongfigurationen, während die Rotationsgeschwindigkeit nach oben durch die sphäroidische Lösung begrenzt ist; es muß $3J_2 = (2-x)e \geq 0$, also $x \leq 2$ sein.

Aus der 7. Gleichung (9) in der Form

$$f_4 + \delta = \frac{7}{2} e^2 - \frac{5}{2} e \bar{e} = (\sigma - \kappa) e^2$$

folgt durch Differentiation unter Beachtung von (13a) unabhängig vom Gleichgewicht

$$a \frac{d}{da} (\sigma - \kappa) = \frac{25}{4} x^2 - \frac{25}{2} x = \frac{25}{4} x (x - 2) \quad \dots (19)$$

und aus

$$a \frac{d\delta}{da} = -4 \delta \quad \text{ebenso:} \quad a \frac{d\sigma}{da} = -5 \sigma x \quad \dots (20)$$

Vergleich mit (17) lehrt, daß an der Oberfläche der Sphäroide der größten Massenkonzentration ($\kappa = 1,5$) σ zweimal so rasch abnimmt wie κ . Überdies nimmt, wie wir bereits wissen, an der Oberfläche aller Gleichgewichtsfiguren κ zuerst ab, bis in einer gewissen Erhebung κ ein Minimum ist:

$$\sigma = \frac{5}{2} - \frac{5}{4} x; \quad \kappa = \frac{5}{4} x - 1; \quad (\kappa + \sigma) = \frac{3}{2} \quad \dots (21)$$

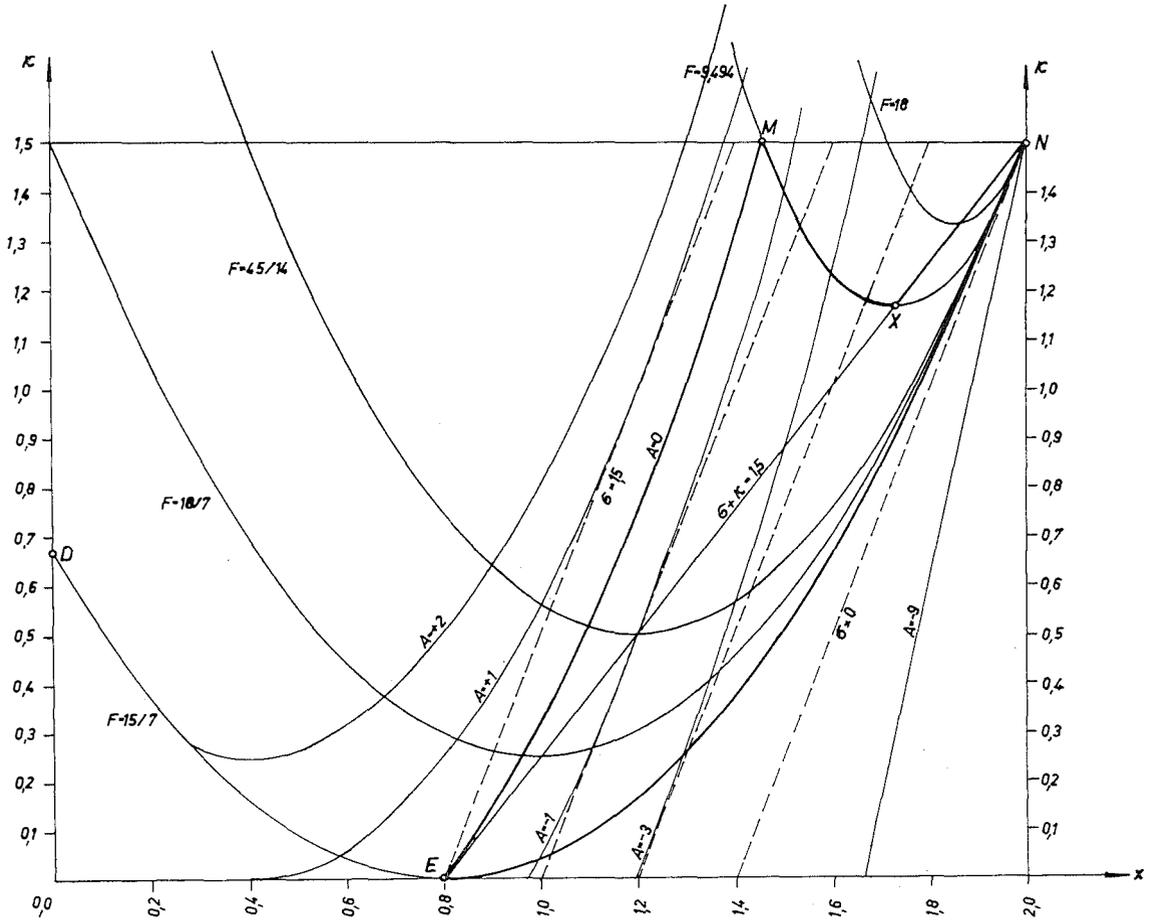


Fig. 6

In den beiden Diagrammen (Fig. 6 und 7) repräsentiert E die *MacLaurinschen* Ellipsoide, N die Niveauflächen des Massenpunktes und M die einparametrischen Sphäroide der größten Massenkonzentration. Die Kurve EN repräsentiert die äußeren Niveauflächen der Ellipsoide, fiktiv ausgedehnt bis $a \rightarrow \infty$. Sie tangiert in E die Gerade $\kappa = 0$ und in N die Gerade $\sigma = 0$. Die Kurve EM stellt die einparametrischen Gleichgewichtsfiguren dar, bisher hypothetisch definiert durch $df_4/da = 0$, wodurch M durch $x = 1,45830$ gegeben ist. Die dritte Grenzlinie MN repräsentiert schließlich die äußeren Niveauflächen der Sphäroide der größten Massenkonzentration. Eine spezielle Figur $S(a, e, f_4)$ ist für ein minimales σ äußere Niveaufläche eines *MacLaurinschen* Ellipsoides; dann schreitet sie auf der Geraden des zugehörigen κ -Wertes zu größeren σ -Werten vor und wird dabei äußere Niveaufläche einparametrischer Gleichgewichtsfiguren mit wachsendem x , während der eigene x -Wert abnimmt. Diese Gleichgewichtsfiguren überschreiten das gegebene κ , haben einen Umkehrpunkt in einer Figur mit maximalem x , für welche die Kurve der äußeren Niveauflächen gerade die κ -Linie berührt, und enden in jener Gleichgewichtsfigur, welche mit S zusammenfällt. Ist der κ -Wert genügend groß ($\kappa =$

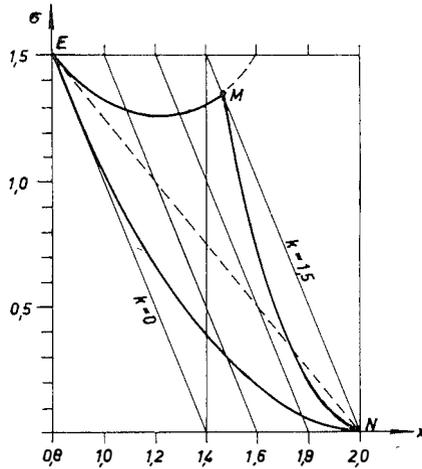


Fig. 7

$= 1,16144$), so ist die Gleichgewichtsfigur des maximalen x gerade ein einparametriges Sphäroid der größten Massenkonzentration; die Reihe der Gleichgewichtsfiguren mit gemeinsamer äußerer Niveaufläche berührt die Hüllfläche. Für noch größere Werte von x enthält die Reihe zwei derartige Sphäroide der größten Massenkonzentration und ist dazwischen unterbrochen. Schließlich ist für $x = 1,5$ die ganze Reihe zwischen einer Niveaufläche N des Massenpunktes und einem Sphäroid M der größten Massenkonzentration imaginär. Die Kurve der äußeren Niveauflächen einer Gleichgewichtsfigur erreicht jeweils ihr minimales x in der Geraden $EN = (x + \sigma) = 3/2$. In Fig. 6 liegt hier der tiefste Punkt der Kurve, während in Fig. 7 in diesem Punkt die Kurventangente mit der Geraden des minimalen x zusammenfällt.

Besonders wichtig ist das Verhältnis:

$$F = |J_4| : J_2^2 = |K_4| : K_2^2, \quad \dots (22)$$

welches für jeden Punkt der Kurve EM , d. h. für alle ∞^2 einparametrischen Gleichgewichtsfiguren desselben x -Wertes konstant ist und natürlich in der ganzen Schar der äußeren Niveauflächen jeder dieser Gleichgewichtsfiguren erhalten bleibt. Die Funktion F ist als reine Funktion der Massenkonfiguration von der Rotationsgeschwindigkeit und damit vom Gleichgewicht unabhängig. Ihr Minimalwert liegt für die homogenen Ellipsoide vor und ist gemäß (4) oder (11): $F_{min} = 15/7$. Damit lassen sich die Lösungen des *Helmert*-Systems im Bereiche zwischen den äußeren Niveauflächen der *MacLaurin*schen Ellipsoide und den beiden Geraden $x = 0$ und $\sigma = 0$ ausscheiden, weil sich für sie $F < 15/7$ ergibt, während bei jeglicher Massenkonzentration nach innen F ansteigen muß. Man erkennt, daß volle Klarheit über die Gleichgewichtsfiguren nur aus den Massenmomenten, d. h. nur aus dem Dichtegesetz zu gewinnen ist.

Lassen wir die geometrische Eigenschaft $df_4/da = 0$ als Ersatz der Gleichgewichtsbedingung des einparametrischen Falles gelten, so können wir (15) in das *Helmert*-System einführen und erhalten für die einparametrischen Gleichgewichtsfiguren folgendes Näherungssystem 4. O.²²):

$$\begin{aligned}
1) \quad \beta &= \frac{5}{2} \bar{\varepsilon} - e - \frac{57}{14} e \bar{\varepsilon} + \frac{235}{56} \bar{\varepsilon}^2 \\
2) \quad \gamma_0 &= \frac{k^2 E}{a^2} \left[1 + e - \frac{3}{2} \bar{\varepsilon} + e^2 - \frac{8}{7} e \bar{\varepsilon} + \frac{25}{28} \bar{\varepsilon}^2 \right] \\
3) \quad 3J_2 &= 2e - \bar{\varepsilon} - e^2 + \frac{13}{14} e \bar{\varepsilon} + \frac{25}{56} \bar{\varepsilon}^2; \\
4) \quad W_0 &= \frac{k^2 E}{a} \left[1 + \frac{\bar{\varepsilon}}{3} + \frac{e}{3} + \frac{2}{15} e^2 - \frac{1}{6} e \bar{\varepsilon} + \frac{5}{24} \bar{\varepsilon}^2 \right] \\
5) \quad \beta_4 &= \frac{75}{16} \bar{\varepsilon}^2 - \frac{1}{2} e^2 - \frac{5}{4} e \bar{\varepsilon} \\
6) \quad \varepsilon &= \frac{\omega^2 a}{\gamma_0} \quad \text{oder} \quad \varepsilon = \bar{\varepsilon} \left(1 - e + \frac{3}{2} \bar{\varepsilon} \right) \quad \dots (23) \\
7) \quad f_4 &= \frac{5}{4} e \bar{\varepsilon} - \frac{25}{16} \bar{\varepsilon}^2 = \frac{5}{4} \bar{\varepsilon} \left(e - \frac{5}{4} \bar{\varepsilon} \right) \\
8) \quad J_4 &= -\frac{4}{5} e^2 + \frac{6}{7} e \bar{\varepsilon} - \frac{5}{14} \bar{\varepsilon}^2 \\
9) \quad \rho_m &= \frac{3E}{4\pi} \frac{1}{a^3 (1 - e)}
\end{aligned}$$

Für $f_4 = 0$ muß dies auf das System (11) zurückführen, und zwar auch ohne die Kenntnis der *MacLaurinschen* Gleichgewichtsbedingung. Die 7. Gleichung liefert $\bar{\varepsilon} = \frac{4}{5} e + y e^2$. Setzt man dies in die 3. Gleichung ein und beachtet, daß für alle homogenen Ellipsoide, d. h. unabhängig vom Gleichgewicht, $J_2 = \frac{1}{5} (2e - e^2)$, so resultiert $y = \frac{22}{35}$. Fügt man (23) umgekehrt die Gleichung $f_4 = -1,5 e^2$ hinzu, so ist zuerst

$$\frac{3}{2} + \frac{5}{4} x - \frac{25}{16} x^2 = 0; \quad x = 1,45830 \quad \dots (24)$$

Für die Funktion F finden wir:

$$F = 9 \left[\frac{4}{5} - \frac{6}{7} x + \frac{5}{14} x^2 \right] : (2 - x)^2 \quad \dots (25)$$

Sie hat ein Minimum für $x = 1/5$, nimmt also im Bereich der Gleichgewichtsfiguren monoton zu. Für $x = 1,4583$ resultiert das Maximum $F_{max} = 9,49391$. Jedoch wird sich später zeigen, daß für mehrparametrische Gleichgewichtsfiguren F unbegrenzt anwachsen kann.

Aus der 8. Gleichung geht durch Multiplikation mit $-\frac{35}{8}$ für δ hervor:

$$\sigma = \frac{7}{2} - \frac{15}{4} x + \frac{25}{16} x^2 \quad \dots (26)$$

σ hat ein Minimum 1,25 bei $x = 6/5$ und das Maximum 1,5 für die Ellipsoide ($x = 4/5$) und für $x = 8/5$, also bereits außerhalb der einparametrischen Gleichgewichtsfiguren.

2. Das Dichtegesetz der einparametrischen Gleichgewichtsfiguren

Jedes der ∞^2 *MacLaurinschen* Ellipsoide ist durch die Masse E und zwei geometrische oder physikalische Bestimmungsstücke gegeben. Wegen der strengen Eindeutigkeit des Dichtegesetzes muß dieses gleichfalls zwei Konstanten enthalten. Tatsächlich gibt es je unendlich viele volumgleiche Ellipsoide, so daß zur spezifischen Dichtekonstante ρ noch ein geometrisches Bestimmungsstück, am besten die Äquatorachse, treten muß. Somit sind die *MacLaurinschen* Ellipsoide entweder durch E und S , d. h. durch $[E, a, e]$ oder durch die Masse und das Dichtegesetz $[E, a, \rho]$ definierbar. Auf diese „nullparametrischen“ Gleichgewichtsfiguren folgen die ∞^3 einparametrischen $[E, a, e, f_4]$, deren Dichtegesetz mithin drei Konstanten, nämlich a und zwei spezifische Konstanten enthält. Ist x der Äquatorradius der inneren Niveauflächen, so kann man zunächst ansetzen:

$$\rho = \rho_{max} f\left(\frac{x}{a}\right) \quad \dots (27)$$

Ist ρ_m die mittlere Dichte, so gilt für die Gesamtmasse:

$$\begin{aligned} E &= \frac{4}{3} \pi a^3 (1 - e) \rho_m = 4\pi\rho_{max} \int_0^a (1 - e_x) f\left(\frac{x}{a}\right) x^2 dx = \\ &= 4\pi\rho_{max} (1 - \bar{e}_2) \int_0^a f\left(\frac{x}{a}\right) x^2 dx \end{aligned}$$

woraus sofort folgt:

$$\frac{1 - e}{1 - \bar{e}_2} = \frac{\rho_{max}}{\rho_m} \frac{3}{a^3} \int_0^a f\left(\frac{x}{a}\right) x^2 dx \quad \dots (28)$$

Für das Trägheitsmoment C des homogenen Ellipsoides gilt [vgl. I, (5) u. (46)]:

$$C = \frac{8}{15} \pi \rho_m a^5 (1 - e) = \frac{2}{5} E a^2,$$

und wieder verallgemeinert:

$$C = \frac{8}{3} \pi \rho_{max} \int_0^a (1 - e_x) f\left(\frac{x}{a}\right) x^4 dx = \frac{8}{3} \pi \rho_{max} (1 - \bar{e}_4) \int_0^a f\left(\frac{x}{a}\right) x^4 dx$$

Erweitert man dies mit $5 E a^2$, so folgt

$$C = \frac{2}{5} E a^2 \left[\frac{1 - \bar{e}_4}{1 - e} \frac{\rho_{max}}{\rho_m} \frac{5}{a^5} \int_0^a f\left(\frac{x}{a}\right) x^4 dx \right] \quad \dots (29)$$

Für die Differenz der Trägheitsmomente des homogenen Ellipsoides hat man:

$$(C - A) = K_2 E = \frac{4}{15} \pi \rho_m (a^4 c - a^2 c^3) = \frac{4}{15} \pi \rho_m a^5 (1 - e) (2e - e^2)$$

oder abermals verallgemeinert

$$K_2 E = \frac{4}{3} \pi (1 - \bar{e}_4) (2\bar{e}_4 - \bar{e}_4^2) \rho_{max} \int_0^a f\left(\frac{x}{a}\right) x^4 dx$$

und durch $E a^2$ dividiert:

$$J_2 = \frac{2}{5} \left(\bar{e}_4 - \frac{1}{2} \bar{e}_4^2 \right) \left[\frac{1 - \bar{e}_4}{1 - e} \frac{\rho_{max}}{\rho_m} \frac{5}{a^5} \int_0^a f\left(\frac{x}{a}\right) x^4 dx \right] \dots (30)$$

Unsere Figur gehört sicherlich einer linearen Reihe einparametrischer Gleichgewichtsfiguren (ω, C), d. h. einer Reihe mit konstanter Rotationsgeschwindigkeit und konstantem Hauptträgheitsmoment C an. Sind a_h und e_h Achse und Abplattung des homogenen Ausgangsellipsoides dieser Reihe, dann stellt der Klammerausdruck in (29) das Verhältnis $(a_h : a)^2$ dar. Aber in der Reihe muß mit C auch das zweite Trägheitsmoment A und damit das Massenmoment K_2 und die dynamische Abplattung H konstant sein. Denn jede Änderung eines der beiden Trägheitsmomente hat notwendigerweise eine Änderung der Rotationsgeschwindigkeit zur Folge. Führt man also den Wert des Klammerausdruckes in (30) ein und multipliziert die Gleichung mit a^2 , so gilt:

$$J_2 a^2 = K_2 = \frac{2}{5} \left(\bar{e}_4 - \frac{1}{2} \bar{e}_4^2 \right) a_h^2 \dots (31)$$

und die dritte Gleichung (11) lehrt, daß der Durchschnittswert \bar{e}_4 identisch ist mit der Abplattung e_h des homogenen Ausgangsellipsoides der Reihe

$$(\omega, C) \equiv (\omega, K_2) \equiv (\omega, H) \dots (32)$$

Entsprechende Division liefert jetzt aus (29) und (30) auch die dynamische Abplattung:

$$J_2 E a^2 : C = H = \bar{e}_4 - \frac{1}{2} \bar{e}_4^2 = e_h - \frac{1}{2} e_h^2 \dots (33)$$

Die Identität (32) wird noch durch folgende Betrachtungen bestätigt. Die dynamische Abplattung bleibt auch ungeändert, wenn sich die Trägheitsmomente streng proportional ändern. Aber dies wäre nur bei einer einheitlichen Expansion oder Kontraktion der Figur möglich, bei der sich aber ω ändert. Würde z. B. in einem homogenen Ellipsoid C durch Expansion in λC verwandelt, also a^2 in λa^2 übergehen, dann muß wegen der Konstanz der Abplattung das Produkt $\omega^2 a^3$ unverändert bleiben, also ω^2 in $\lambda^{-3/2} \omega^2$ übergehen.

Die bisherigen Betrachtungen waren von der Kenntnis der Funktion $f(x)$ unabhängig. Versuchsweise wird das modifizierte Lévy'sche Dichtegesetz zugrundegelegt:

$$\rho = \rho_{max} \left[1 - v \left(\frac{x}{a} \right)^\lambda \right]^\mu \dots (34)$$

In diesem Ansatz stellt ν die erforderliche zweite spezifische Konstante dar, während zur Bestimmung der beiden Exponenten λ und μ neben der Erde noch die Sphäroide der größten Massenkonzentration zur Verfügung stehen. Sofort lassen sich die Annahmen $\lambda = 1$ und $\mu = 1$ a priori ausschließen. Wir bilden die Ableitung

$$\frac{d\rho}{dx} = -\mu\lambda\nu\rho_{max} \left[1 - \nu \left(\frac{x}{a} \right)^\lambda \right]^{\mu-1} \frac{x^{\lambda-1}}{a^\lambda} \quad \dots (35)$$

welche für $\lambda = 1$ wird:

$$\frac{d\rho}{dx} = -\frac{\mu\nu}{a} \rho_{max} \left[1 - \nu \left(\frac{x}{a} \right) \right]^{\mu-1} \quad \dots (35a)$$

Da sich nun bei Entblätterung die Restfigur immer mehr einem homogenen Ellipsoid annähert, muß $d\rho/dx$ für $x = 0$ gegen Null konvergieren, was nur für $\lambda > 1$ der Fall ist. Umgekehrt erhalten wir für $\nu = 1$, d. h. wenn gerade das Sphäroid der größten Massenkonzentration überschritten wird,

$$\frac{d\rho}{dx} = -\mu\lambda\rho_{max} \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^\lambda \right]^{\mu-1} \frac{x^{\lambda-1}}{a^\lambda},$$

welche Ableitung an der Oberfläche verschwinden muß, was nur für $\mu > 1$ möglich ist. Auf diese Weise sind bereits die Dichtegesetze von *Roche* ($\lambda = 2, \mu = 1$) und *Lipschitz* ($\mu = 1$) ad absurdum geführt.

Zur Bestimmung der beiden spezifischen Dichtekonstanten ρ_{max} und ν finden wir aus (28) und (29)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1-e}{1-\bar{e}_2} &= \frac{\rho_{max}}{\rho_m} \frac{3}{a^3} \int_0^a \left[1 - \nu \left(\frac{x}{a} \right)^\lambda \right]^\mu x^2 dx \\ \left(\frac{a_h}{a} \right)^2 \frac{1-e}{1-e_h} &= \frac{\rho_{max}}{\rho_m} \frac{5}{a^5} \int_0^a \left[1 - \nu \left(\frac{x}{a} \right)^\lambda \right]^\mu x^4 dx \end{aligned} \right\} \quad \dots (36)$$

Vorerst werden die konventionellen Dichtegesetze am Normalsphäroid der Erde geprüft, also trotz der soeben gewonnenen Erkenntnis auch die Werte $\mu = 1$ und $\lambda = 1$ herangezogen. Für das aus $[E, a, \omega, J_2]$ berechnete Normalsphäroid und für das homogene Ausgangsellipsoid der zugehörigen Figurenreihe (32) liegen die Daten vor:

$$\begin{aligned} E &= 5976,318 \cdot 10^{24} \text{ g}; a = 6\,378\,290 \text{ m}; e = 335289 \cdot 10^{-8} = \\ &= 1:298,25; a_h = 5\,812\,413 \text{ m}; e_h = 326598 \cdot 10^{-8}; \bar{e} = \\ &= 346\,147 \cdot 10^{-8}; (a_h : a)^2 = 0,83043264; \rho_m = 5,5168. \end{aligned} \quad \dots (37)$$

Der Quotient auf der linken Seite der ersten Gleichung (36) kann nicht exakt berechnet werden, weil der Durchschnittswert \bar{e}_2 nicht gegeben ist. Es liegt bloß die Ungleichung $e > \bar{e}_4 = e_h > \bar{e}_2$ vor. Mit der interpolatorischen Annahme $(e - \bar{e}_2) = 2(e - e_h)$ wird der Quotient 0,9998256. Setzt man noch $n = \rho_{max} : \rho_m$, so findet man für $\mu = 1$

$\lambda = 1:$	$\nu = 0,80538;$	$n = 2,52501;$	$\rho_{max} = 13,930;$	$\rho_{min} = 2,711$
2	0,78476	1,88952	10,424	2,244
3	0,80809	1,67769	9,256	1,776

und für $\mu = 2$:

$\lambda = 1$:	$v = 0,56857$;	$n = 2,93110$;	$\rho_{max} = 16,170$	$\rho_{min} = 3,010$
2	0,51490	2,01683	11,127	2,618
3	0,51749	1,74864	9,647	2,246

Da die mittlere Dichte ρ_m gegeben ist, kann eine Wahl für λ und μ nur auf Grund der resultierenden Oberflächendichte

$$\rho_{min} = \rho_{max} (1 - v)^\mu = n \rho_m (1 - v)^\mu \quad \dots (38)$$

getroffen werden. Am besten scheint die Wahl $\lambda = \mu = 2$ zu sein, welche in bemerkenswerter Weise mit dem von *Helmert* auf Grund der Entwicklungen I, 57) gewonnenen Resultat [HG II, S. 487] übereinstimmt. Nur hat *Helmert* übersehen, daß ein reines Quadrat vorliegt. Bringt man sein Ergebnis in die Form:

$$\rho = 11,3 \left[1 - 1,04 \left(\frac{x}{a} \right)^2 + 0,275 \left(\frac{x}{a} \right)^4 \right], \quad \dots (39a)$$

so steht dem jetzt gegenüber:

$$\rho = 11,127 \left[1 - 1,0298 \left(\frac{x}{a} \right)^2 + 0,2651 \left(\frac{x}{a} \right)^4 \right] \quad \dots (39b)$$

Einen klareren Einblick geben aber die Sphäroide der größten Massenkonzentration. Wir benützen die Grenzfigur der linearen Reihe (ω , a) in welcher ω und a konstant gehalten werden. Mit den Ausgangsdaten (37) für das Normalsphäroid ergibt sich auf Grund des späteren Gleichungssystems (63) für die Grenzfigur

$$e = 236822 \cdot 10^{-8}; \quad J_2 = 42742 \cdot 10^{-8}; \quad K_2 = 17389 \cdot 10^{10} \text{ cm}^2; \quad \dots (40)$$

$$\rho_m = 5,5113$$

Für das homogene Ausgangsellipsoid der zu dieser Figur gehörigen Reihe (ω , K_2) folgt

$$a_h = 4824351 \text{ m}; \quad e_h = 186955 \cdot 10^{-8}, \quad \dots (40a)$$

womit die linker Hand stehenden Ausdrücke in (36) die Werte 0,9990013 und 0,5718107 annehmen. Dank der größeren „Auflösungskraft“ der Sphäroide der größten Massenkonzentration erweist sich hier die Annahme $\mu = 1$ bereits als physikalisch sinnlos; es ergibt sich $v > 1$ und ρ_{min} negativ. Für $\mu = 2$ finden wir der Reihe nach:

$\lambda = 1$:	$v = 0,90525$;	$n = 7,46569$;	$\rho_{max} = 41,146$;	$\rho_{min} = + 0,369$
2:	0,97050	4,17888	23,031	+ 0,020
3:	1,11473	3,33583	18,385	+ 0,242

Der Fall $\lambda = 1$ kann hier nicht als physikalisch unmöglich erkannt werden, während sich für $\lambda = 3$ bereits $v > 1$ ergibt. Eindeutig aber finden wir für $\lambda = \mu = 2$ die geringste Oberflächendichte; sie befriedigt die Ungleichung:

$$5,3 \cdot 10^{-9} = \omega^2 < 2\pi k^2 \rho_{min} = 8,4 \cdot 10^{-9} \quad \dots (41)$$

Die Überzeugungskraft des gefundenen Dichtegesetzes²³⁾:

$$\rho = \rho_{max} \left[1 - v \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^2 \quad \dots (42)$$

liegt nicht allein darin, daß es sowohl für das Normalsphäroid wie auch für die einparametrischen Sphäroide der größten Massenkonzentration die besten Resultate liefert, sondern auch in den beiden Exponenten 2.

Die Gleichungen (36) nehmen jetzt die Gestalt an:

$$\begin{aligned} \frac{1-e}{1-\bar{e}_2} &= n \left[1 - \frac{6}{5} v + \frac{3}{7} v^2 \right] \\ \left(\frac{a_h}{a} \right)^2 \frac{1-e}{1-e_h} &= n \left[1 - \frac{10}{7} v + \frac{5}{9} v^2 \right] \end{aligned} \quad \dots (36a)$$

Überdies ist $(a_h:a)^2$ für die Sphäroide der größten Massenkonzentration fast konstant. Denn wegen $\bar{e} = 1,45830 e$ gilt einerseits

$$J_2 = \frac{1}{3} (2e - \bar{e}) = 0,1806 e; \quad J_{2,h} = \frac{2}{5} e_h; \quad \left(\frac{a_h}{a} \right)^2 = \frac{0,1806 e}{0,4000 e_h}$$

und andererseits

$$\bar{e} = 1,4583 e; \quad \bar{e}_h = \frac{4}{5} e_h; \quad \left(\frac{a_h}{a} \right)^3 = \frac{0,8000 e_h}{1,4583 e},$$

also

$$\left(\frac{a_h}{a} \right)^5 \doteq 0,2477 \quad \text{und} \quad \left(\frac{a_h}{a} \right)^2 \doteq 0,572 \quad \dots (43)$$

Daher sind in der Hüllfläche die Konstanten n und v fast unverändert. Während für das homogene Ellipsoid $n = 1$ und $v = 0$, liegt in der Hüllfläche n über 4 und v knapp unter 1 und es ist $n(1-v)^2 \sim 0,0035$.

Unser Dichtegesetz wurde aus den einparametrischen Sphäroiden der größten Massenkonzentration abgeleitet, welche selbst wieder auf der hypothetischen Annahme $df_4/da = 0$ für die Oberfläche beruhen. Wäre diese Annahme nicht zutreffend, so müßte der x -Wert der Grenzfiguren größer sein, also in Fig. 6 der Punkt M näher an N heranrücken. Aber schon eine geringe Vergrößerung von x würde das Dichtegesetz in Frage stellen. Mit $x = 1,5$ müßte z. B. die obige Grenzfigur der Reihe (ω, a) die kleinere Abplattung $e = 230765 \cdot 10^{-8}$ haben und (36a) führt auf $v = 1,01035$, was bereits unmöglich ist. Somit ist das Dichtegesetz (42) streng mit der Forderung df_4/da gekoppelt.

Wir lassen diese Hypothese versuchsweise fallen und nehmen an, daß der x -Wert der einparametrischen Sphäroide der größten Massenkonzentration zwischen den Grenzen $1,4583 \leq x < 1,75$ liegt. Vernachlässigt man in (36) die beiden Abplattungsfaktoren, so erhält man die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1 &= n \left[1 - \frac{3}{\lambda+3} v\mu + \frac{3}{2\lambda+3} v^2 \binom{\mu}{2} - \frac{3}{3\lambda+3} v^3 \binom{\mu}{3} + \dots \right] \\ \left(\frac{a_h}{a} \right)^2 &= n \left[1 - \frac{5}{\lambda+5} v\mu + \frac{5}{2\lambda+5} v^2 \binom{\mu}{2} - \frac{5}{3\lambda+5} v^3 \binom{\mu}{3} + \dots \right] \end{aligned} \quad \dots (44)$$

Für die Sphäroide der größten Massenkonzentration ist in großer Annäherung $\nu = 1$ und man findet aus (44) bei gleichzeitiger Elimination von n

$$\left(\frac{a_h}{a}\right)^2 = \frac{1 - \frac{5}{\lambda+5}\mu + \frac{5}{2\lambda+5}\binom{\mu}{2} - \frac{5}{3\lambda+5}\binom{\mu}{3} + \dots}{1 - \frac{3}{\lambda+3}\mu + \frac{3}{2\lambda+3}\binom{\mu}{2} - \frac{3}{3\lambda+3}\binom{\mu}{3} + \dots} \quad \dots (45)$$

Andererseits findet man mit $\varepsilon = xe$ und $J_2 = \frac{1}{3}(2-x)e$ ähnlich (43):

$$\left(\frac{a_h}{a}\right)^5 = \frac{2}{3} \frac{2-x}{x}; \quad x = \frac{2}{1 + \frac{3}{2}\left(\frac{a_h}{a}\right)^5} \quad \dots (46)$$

Aus den beiden letzten Gleichungen (45) und (46) resultiert ein funktionaler Zusammenhang zwischen den Exponenten λ und μ des Dichtegesetzes und dem x -Wert der Sphäroide der größten Massenkonzentration. Man findet folgende Tabelle von $x = x(\lambda, \mu)$:

$\lambda \backslash \mu$	2	3	4	5
2	1,487	1,654	(1,758)	
3		1,537	1,639	1,711
4		(1,443)	1,538	1,608
5			(1,455)	1,521

Solange also die Gleichgewichtsbedingung nicht bekannt ist, scheint eine definitive Entscheidung über das Dichtegesetz aus den Sphäroiden der größten Massenkonzentration allein unmöglich.

Ohne das Gleichgewicht heranzuziehen, können wir mit den Daten $[E, \omega, a, J_2, J_4]$ das *Helmert*-System für die wirkliche Erde, d. h. für das Niveausphäroid des Geoides, auflösen und finden so die „tatsächliche“ Abplattung, wenn die Massefunktionen J_2 und J_4 aus den Bahnstörungen der künstlichen Satelliten bereits vorliegen. Diese Abplattung ist aber mit der Abplattung des hydrostatischen Normalsphäroides fast identisch und liefert $x = 1,03239$, womit sich aus (46)

$$(a_h : a)^2 = 0,82853 \quad \dots (47)$$

und in weiterer Folge aus (44) n und ν ergeben, was mit $\rho_m = 5,5168$ folgende Werte der Oberflächendichte liefert:

$\lambda \backslash \mu$	2	3	4	5
2	2,589	2,695	2,741	
3		2,390	2,359	2,428
4		2,004	2,071	2,109

Für $\lambda = \mu = 2$ ergibt sich die Oberflächendichte um 0,03 kleiner als er oben gefunden

wurde (2,618), was sich aus der Vernachlässigung der Glieder 4. O. bei der Ableitung von (46) erklärt. Die Tabellenwerte für die Oberflächendichte dürften also durchwegs etwas zu niedrig sein. Andererseits kann ρ_{min} nicht die mittlere Krustendichte übersteigen. Mithin dürften neben dem Fall $\lambda = \mu = 2$ nur noch die Fälle $\lambda = 3$ in Frage kommen.

Nun ist aber das modifizierte Lévy'sche Gesetz ein rein mathematischer Ansatz, während die Legendresche Dichtefunktion physikalisch begründet ist. Entwickelt man aber I, (51) in eine Reihe, so erkennt man, daß nur die geraden Potenzen der Achse auftreten können, und das Lévy-Gesetz erweist sich als Sonderfall der Legendreschen Dichtefunktion, wenn ungerade λ -Werte ausgeschlossen werden, oder auch als Sonderfall des Helmer'schen Ansatzes, der selbst als Verallgemeinerung der Legendreschen Dichtefunktion gelten darf. Jetzt ist auch klar, daß die zweite Potenz nicht verschwinden kann, d. h. es muß $\lambda = 2$ sein. In Kombination mit $\mu = 2$ liefert dies die beste Oberflächendichte der Erde und gleichzeitig das minimale x für die Sphäroide der größten Massenkonzentration, das selbst wieder mit der charakteristischen Eigenschaft $df_4/da = 0$ an der Oberfläche der einparametrischen Gleichgewichtsfiguren gekoppelt ist. Damit aber erscheint gleichzeitig diese Hypothese und das stetige Dichtegesetz (42) verifiziert.

Jede einparametrische Gleichgewichtsfigur ist also durch E und $S(a, e, f_4)$ oder durch E und das Dichtegesetz definierbar: $[E, a, v, \rho_{max}]$. Verschwindet v , so resultiert ein MacLaurinsches Ellipsoid $[E, a, \rho]$. Demnach stellen diese Ellipsoide oder nullparametrischen Gleichgewichtsfiguren bloß Sonderfälle der einparametrischen Gleichgewichtsfiguren dar. An sich bestimmen natürlich die Schichtung und das Dichtegesetz (42) nur die Konfiguration der gegebenen Masse; zur einparametrischen Gleichgewichtsfigur wird sie erst für eine bestimmte Rotationsgeschwindigkeit. Hält man die Masse nicht fest, so stehen den ∞^4 einparametrischen Gleichgewichtsfiguren $[E, a, v, \rho_{max}]$ nur ∞^3 Dichtegesetze (a, v, ρ_{max}) gegenüber. Es haben also jeweils unendlich viele einparametrische Gleichgewichtsfiguren dasselbe Dichtegesetz, wobei sich mit der Abplattungsfunktion auch die Masse E ändert, so daß kein Widerspruch zur Eindeutigkeit des Dichtegesetzes der Gleichgewichtsfiguren vorliegt.

3. Die einparametrischen Lösungen für das Normalsphäroid der Erde

Ein Blick auf die Potentialentwicklung (1) lehrt, daß jede Gleichgewichtsfigur in Näherung 4. O. am besten aus $[E, a, \omega, J_2]$ berechnet wird. Die primär unbekannte Erdmasse müssen wir allerdings durch die Äquatorschwere γ_0 ersetzen, wobei wir den Wert der internationalen Schwereformel sofort um 12 mgal vermindern ($\gamma_0 = 978,037$ gal), um den Fehler des Potsdamer Schweresystems annähernd zu eliminieren. Für die Äquatorachse wird der vom Autor seit einigen Jahren benützte Wert: $a = 6378290$ m beibehalten, obwohl er nach jüngeren Untersuchungen noch immer um mehr als 100 m zu groß sein dürfte. Auch die von Cook²⁴⁾ im Jahre 1959 aus den Bahnstörungen der künstlichen Satelliten abgeleitete statische Abplattung $J_2 = 108310 \cdot 10^{-8}$ dürfte etwas zu groß sein. Auf Grund des Systemes (23) findet man mit diesen Ausgangsdaten:

$$\begin{aligned}
E &= 5976,318 \cdot 10^{24} \text{ g}; & a &= 6,37829 \cdot 10^8 \text{ cm}; & e &= 335289 \cdot 10^{-8} = \\
&= 1 : 298,25; & f_4 &= -426 \cdot 10^{-8} = -0,379 e^2; & h_m &= \frac{a}{4} f_4 = \\
&= -6,79 \text{ m}; & \gamma_0 &= 978,037 \text{ gal}; & \beta &= 530379 \cdot 10^{-8}; \beta_4 = \\
&= +3613 \cdot 10^{-8}; & \omega^2 &= 5,317496 \cdot 10^{-9} \text{ sec}^{-2}; & \varepsilon &= \omega^2 a / \gamma_0 = \dots (48) \\
&= 346782 \cdot 10^{-8}; & \bar{e} &= \omega^2 a^3 / k^2 E = 346147 \cdot 10^{-8}; & \rho_m &= 5,5168; \\
J_2 &= K_2 / a^2 = 108310 \cdot 10^{-8}; & K_2 &= 44063,3 \cdot 10^{10} \text{ cm}^2; \\
J_4 &= -332 \cdot 10^{-8}; & W_0 &= 62638,5 \cdot 10^7 \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-2}.
\end{aligned}$$

Die zugehörige einparametrische Reihe (ω , K_2) führt über das homogene Ausgangs-ellipsoid: $a_h = 5812413 \text{ m}$, $e_h = 326598 \cdot 10^{-8}$ auf:

$$\begin{aligned}
H &= 326065 \cdot 10^{-8}; & C &= 80761,9 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2; \\
(C - A) &= 263,34 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2 & & \dots (48a)
\end{aligned}$$

Vor den künstlichen Satelliten konnte die statische Abplattung nur mit ziemlicher Unsicherheit aus den Ungleichheiten der Mondbewegung abgeleitet werden. Damals empfahl sich daher besser der Ausgang von der dynamischen Abplattung

$$H = (327236 \pm 59) \cdot 10^{-8} = 1 : (305,59 \pm 0,03) \quad \dots (49)$$

wie sie von *Bullard*²⁵⁾ aus der Präzessionskonstante ($5493,156 \pm 0,175$) unter Verwendung des Massenverhältnisses Erde-Mond: $E/M = 81,271$ gefunden wurde. Die Berechnung des Normalsphäroides aus $[\gamma_0, a, \omega, H]$ ist durch den Rückgang auf das Ausgangsellipsoid der zugehörigen Reihe (ω, H) $\equiv (\omega, K_2) \equiv (\omega, C)$ möglich, an welchem man die Trägheitsmomente der Normalfigur der Erde ablesen kann, obwohl seine Achse um 559 km kleiner ist. Schließlich gestattet die gleichzeitige empirische Bestimmung der statischen und der dynamischen Abplattung die Berechnung der Trägheitsmomente und wir finden eine dritte Lösung aus $[E, \omega, a, C]$. Die Resultate seien vergleichend zusammengestellt:

	J_2	H	C	$C - A$	e^{-1}
aus J_2 :	$108310 \cdot 10^{-8}$;	$326065 \cdot 10^{-8}$;	$80762 \cdot 10^{40}$;	$263,34 \cdot 10^{40}$;	298,25
aus H :	108960	327236	80955	264,91	297,38
aus C :	107327	324267	80473	260,95	299,69

Aus dieser Diskrepanz der drei Lösungen zog man den irrigen Schluß, nur die aus dem empirischen C abgeleitete Figur wäre das richtige hydrostatische Normalsphäroid, dem die aus J_2 abgeleitete Lösung als Niveausphäroid der wirklichen Erde gegenüberstehe; die große Abweichung beweise, daß man die hydrostatische Theorie nicht auf die Erde anwenden dürfe.

Demgegenüber erkennen wir aber klar, daß alle drei Lösungen hydrostatische Gleichgewichtsfiguren sind. Sie müßten zusammenfallen, wenn die Erde tatsächlich einparametrisch wäre, also ein stetiges Dichtegesetz besitzen würde. Da dies aber sicher nicht der Fall ist, ist die auftretende Diskrepanz selbstverständlich. Dabei ist zu betonen, daß die zweite und dritte Lösung auf der einparametrischen Figurenreihe (32) beruhen und daher sicher unzutreffend sind. Die erste Lösung ist zwar auch eine einparametrische Gleichgewichtsfigur; bei ihr wurde aber die Figurenreihe (32) nicht benützt, weil ja J_2 eine *Stokessche* Konstante ist. Mithin kommt sie dem

richtigen, mehrparametrischen Normalsphäroid bereits ziemlich nahe, wie sich leicht beweisen läßt. Wir können nämlich gänzlich unabhängig vom Gleichgewicht die Abplattung der wirklichen Erde bestimmen, worunter wir die Abplattung des dem Geoid zugeordneten *Helmertschen* Niveausphäroides zu verstehen haben, das durch $[E, \omega, a, J_2, J_4]$ eindeutig bestimmt ist. Die aus den künstlichen Satelliten gewonnene Massefunktion J_4 liegt, wenn wir alle bisherigen Bestimmungen heranziehen, zwischen den Grenzen: $-4,1 \cdot 10^{-5} \leq J_4 \leq -1,1 \cdot 10^{-6}$ und man erhält aus der dritten Gleichung des *Helmert-Systems* (9) damit leicht:

$$298,29 \geq e^{-1} \geq 298,12 \quad \dots (50)$$

Es zeigt sich somit, daß die tatsächliche Abplattung der Erde fast völlig mit der Abplattung des einparametrischen Normalsphäroides übereinstimmt. Die hydrostatische Theorie bleibt also ein vorzügliches Mittel zur Erforschung der Gestalt und der physikalischen Eigenschaften des Erdkörpers.

Abschließend werde noch die Formel für die theoretische Schwere auf dem einparametrischen Normalsphäroid mit den Werten (48) gebildet:

$$\gamma = 978,037 [1 + 0,0053\ 038 \sin^2 \varphi - 0,0000\ 090 \sin^2 2\varphi] \text{ gal} \quad \dots (50)$$

Sie kann leicht auf das achsengleiche (oder auch auf das volumgleiche) Rotationsellipsoid übertragen werden, das wir mit Recht als mittleres Erdellipsoid bezeichnen dürfen. Da dieses Ellipsoid das Normalsphäroid einschließt, verwenden wir den Freiluftgradienten

$$+ \frac{a}{4} f_4 \sin^2 2\varphi \cdot 0,308554 = - (6,79 \cdot 0,308554) \sin^2 2\varphi$$

und finden für die theoretische Schwere auf dem mittleren Erdellipsoid:

$$\gamma = 978,037 [1 + 0,0053\ 038 \sin^2 \varphi - 0,0000\ 112 \sin^2 2\varphi] \text{ gal} \quad \dots (50a)$$

4. Das Näherungssystem 6. O. und die Gleichgewichtsbedingung der einparametrischen Gleichgewichtsfiguren

Eine generelle Entwicklung einschließlich der Glieder 6. O. wurde erstmals von *G. Oliwa*²⁶⁾ im Anschluß an Darwin gegeben; sie läßt sich noch etwas vereinfachen. Ausgehend von der bekannten Entwicklung des Radiusvektors s des Rotationsellipsoides kann man unter Einführung der beiden Formparameter f_4 und f_6 für den Radiusvektor l des Niveausphäroides in Näherung 6. O. ansetzen:

$$l = a \left[1 - e \sin^2 \varphi' + \left(f_4 - \frac{3}{2} e^2 \right) (\sin^2 \varphi' - \sin^4 \varphi') + \dots (51) \right. \\ \left. + \left(f_6 - \frac{1}{2} e^3 \right) (4 \sin^2 \varphi' - 9 \sin^4 \varphi' + 5 \sin^6 \varphi') \dots \right]$$

Es folgt die Differenz [vgl. (8)]:

$$(l - s) = \frac{a}{4} (f_4 + 4f_6 - 5f_6 \sin^2 \varphi') \sin^2 2\varphi' + \dots \quad \dots (51a)$$

Um allgemeine Relationen für das Rotations-Niveausphäroid 6. Grades zu finden, kann man entweder mit *Helmert* die Potentialwerte am Pol und am Äquator gleichsetzen oder mit *Darwin* die Koeffizienten der zonalen Kugelfunktionen Null setzen, wobei man von

$$U_6 = \frac{k^2 E}{a} \left[\left(\frac{a}{l} \right) - J_2 P_2 \left(\frac{a}{l} \right)^3 - J_4 P_4 \left(\frac{a}{l} \right)^5 - J_6 P_6 \left(\frac{a}{l} \right)^7 + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \bar{\epsilon} \left(\frac{l}{a} \right)^2 (1 - P_2) \right] \quad \dots (52)$$

auszugehen hat, Setzt man abkürzend $\sin^2 \varphi' = \cos^2 \vartheta = t$, so findet man aus (51)

$$\left(\frac{a}{l} \right) = \left[1 + \left(-e + f_4 - \frac{3}{2} e^2 + 4f_6 - 2e^3 \right) t + \right. \\ \left. + \left(\frac{3}{2} e^2 - f_4 - 9f_6 + \frac{9}{2} e^3 \right) t^2 + \left(5f_6 - \frac{5}{2} e^3 \right) t^3 \right]$$

und reziprok

$$\left(\frac{l}{a} \right) = \left[1 + \left(e - f_4 + \frac{3}{2} e^2 - 4f_6 + 2e^3 \right) t + \left(f_4 - \frac{1}{2} e^2 + 9f_6 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3}{2} e^3 - 2ef_4 \right) t^2 + \left(\frac{1}{2} e^3 - 5f_6 + 2ef_4 \right) t^3 \right]$$

Für die in (52) benötigten Potenzen wird

$$\left(\frac{a}{l} \right)^3 = \left[1 + 3 \left(e - f_4 + \frac{3}{2} e^2 \right) t + 3 \left(f_4 + \frac{1}{2} e^2 \right) t^2 \right] \\ \left(\frac{a}{l} \right)^5 = 1 + 5 e t; \quad \left(\frac{a}{l} \right)^7 = 1; \\ \left(\frac{l}{a} \right)^2 = -[1 + (-2e + 2f_4 - 3e^2) t + (4e^2 - 2f_4) t^2].$$

Löst man die zonalen Kugelfunktionen nach t auf:

$$t = \frac{2}{3} P_2 + \frac{1}{3}; \quad t^2 = \frac{8}{35} P_4 + \frac{4}{7} P_2 + \frac{1}{5}; \\ t^3 = \frac{16}{231} P_6 + \frac{24}{77} P_4 + \frac{10}{21} P_2 + \frac{1}{7},$$

beachtet noch die Produkte

$$P_2^2 = \frac{18}{35} P_4 + \frac{2}{7} P_2 + \frac{1}{5}; \quad P_2 P_4 = \frac{5}{11} P_6 + \frac{20}{77} P_4 + \frac{2}{7} P_2,$$

und ordnet schließlich alles nach den *Legendreschen* Polynomen, so resultiert durch Nullsetzen der Koeffizienten von P_2 , P_4 und P_6

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{2}{3} e - \frac{\bar{\varepsilon}}{3} - \frac{2}{21} f_4 + \frac{5}{7} e^2 - \frac{2}{21} \bar{\varepsilon} e + \frac{2}{21} f_6 + \frac{5}{7} e^3 - \frac{4}{21} e f_4 + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{21} \varepsilon e^2 \right) - J_2 \left(1 + \frac{11}{7} e - \frac{2}{7} f_4 + 3 e^3 \right) - \frac{20}{21} e J_4 = 0; \\
& \frac{1}{385} (88 f_4 - 44 e^2 + 192 f_6 - 72 e^3 + 64 e f_4 + 88 e \bar{\varepsilon} - 56 \bar{\varepsilon} f_4 + \\
& \quad + 68 e^2 \bar{\varepsilon}) + \frac{1}{385} J_2 (396 e + 798 e^2 - 12 f_4) - \dots (53) \\
& \quad - J_4 \left(1 + \frac{195}{77} e \right) = 0; \\
& \frac{1}{231} (8 e^3 - 80 f_6 + 32 e f_4 - 32 e^2 \bar{\varepsilon} + 16 f_4 \bar{\varepsilon}) - \\
& \quad - \frac{1}{77} J_2 (24 f_4 + 12 e^2) - \frac{50}{33} e J_4 - J_6 = 0
\end{aligned}$$

Auflösung nach den Massefunktionen liefert völlig unabhängig vom Gleichgewicht:

$$\begin{aligned}
3 J_2 &= \left[2e - \bar{\varepsilon} - e^2 + \frac{9}{7} e \bar{\varepsilon} - \frac{2}{7} f_4 \right] + \left[\frac{2}{7} f_6 - \right. \\
& \quad \left. - \frac{25}{49} e^2 \bar{\varepsilon} - \frac{2}{7} f_4 \bar{\varepsilon} - \frac{10}{49} f_4 e \right]; \\
J_4 &= \left[\frac{8}{35} f_4 + \frac{4}{7} e \bar{\varepsilon} - \frac{4}{5} e^2 \right] + \frac{4}{5} e^3 - \frac{50}{49} e^2 \varepsilon + \dots (54) \\
& \quad + \frac{4}{35} \left[\frac{48}{11} f_6 - \frac{226}{77} e f_4 - \frac{13}{11} f_4 \varepsilon \right]; \\
J_6 &= \frac{4}{21} (6e^3 - 5e^2 \bar{\varepsilon}) - \frac{8}{231} (12 e f_4 + 10 f_6 - 5 f_4 \bar{\varepsilon}).
\end{aligned}$$

Setzen wir $f_4 = f_6 = 0$, so resultieren die Ausdrücke für das fiktive Niveauellipsoid, während unter gleichzeitiger Heranziehung der *MacLaurin*-Bedingung natürlich die auch aus (4) folgenden Massefunktionen des homogenen, im Gleichgewicht befindlichen Ellipsoides folgen:

$$J_2 = \frac{1}{5} (2e - e^2); J_4 = -\frac{12}{35} (e^2 - e^3); J_6 = +\frac{8}{21} e^3. \quad \dots (55)$$

Die beiden letzten Gleichungen (54) kann man noch nach den Formparametern auflösen:

$$\begin{aligned}
f_4 &= \left[\frac{35}{8} J_4 - \frac{5}{2} e \varepsilon + \frac{7}{2} e^2 \right] + \left[\frac{63}{10} J_6 - \frac{107}{10} e^3 + \frac{293}{28} e^2 \bar{\varepsilon} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{143}{35} e f_4 - \frac{1}{2} \bar{\varepsilon} f_4 \right]; \dots (54a)
\end{aligned}$$

$$f_6 = -\frac{231}{80} J_6 + \frac{33}{10} e^3 - \frac{11}{4} e^2 \bar{\varepsilon} - \frac{6}{5} e f_4 + \frac{1}{2} \bar{\varepsilon} f_4.$$

Nunmehr ist die Gleichung (13b) für die Änderung des Formparameters f_4 um die Glieder 6.O. zu erweitern. Zu den zur Ableitung von (13) dienenden Relationen tritt noch

$$a \frac{dJ_6}{da} = -6 J_6$$

und man findet durch Differentiation von (54a) leicht:

$$a \frac{df_4}{da} \left(1 - \frac{143}{35} e + \frac{1}{2} \bar{\varepsilon} \right) = \left[-\frac{35}{2} J_4 - \frac{15}{2} e \bar{\varepsilon} + \frac{879}{28} e^2 \bar{\varepsilon} - \frac{3}{2} \varepsilon f_4 \right] + \left[7 e - \frac{5}{2} \bar{\varepsilon} - \frac{321}{10} e^2 + \frac{293}{14} e \bar{\varepsilon} + \frac{143}{35} f_4 \right] a \frac{de}{da}$$

Die erste Gleichung (54) liefert ähnlich:

$$a \frac{de}{da} = -2 e + \frac{5}{2} \bar{\varepsilon} - e^2 + \frac{9}{7} e \bar{\varepsilon} - \frac{5}{2} \bar{\varepsilon}^2 - \frac{2}{7} f_4,$$

womit folgt:

$$\begin{aligned} a \frac{df_4}{da} \left(1 - \frac{143}{35} e + \frac{1}{2} \bar{\varepsilon} \right) &= \left[-\frac{35}{2} J_4 + 15 e \bar{\varepsilon} - 14 e^2 - \frac{25}{4} \bar{\varepsilon}^2 \right] \\ &+ \frac{286}{5} e^3 - \frac{1109}{14} e^2 \bar{\varepsilon} + \frac{885}{28} e \bar{\varepsilon}^2 + \frac{25}{4} \bar{\varepsilon}^3 - \frac{356}{35} e f_4 + \\ &+ \frac{66}{7} \bar{\varepsilon} f_4 - \frac{189}{5} J_6. \end{aligned} \quad \dots (56)$$

Für die *MacLaurinschen* Ellipsoide verschwindet nicht nur die Ableitung von f_4 , sondern auch die von f_6 an der Oberfläche. Hingegen sind die einparametrischen Gleichgewichtsfiguren durch $df_4/da = 0$ und $f_6 = 0$ definiert und man erhält für sie in Näherung 6. O.:

$$\begin{aligned} 3 J_2 &= \left[2e - \bar{\varepsilon} - e^2 + \frac{13}{14} e \bar{\varepsilon} + \frac{25}{56} \bar{\varepsilon}^2 \right] + \frac{59}{2156} e^2 \bar{\varepsilon} - \\ &- \frac{3215}{2156} e \bar{\varepsilon}^2 + \frac{2525}{4312} \bar{\varepsilon}^3; \\ J_4 &= \left[\frac{6}{7} e \bar{\varepsilon} - \frac{4}{5} e^2 - \frac{5}{14} \bar{\varepsilon}^2 \right] + \frac{4}{5} e^3 - \frac{5589}{2695} e^2 \bar{\varepsilon} + \\ &+ \frac{818}{539} e \bar{\varepsilon}^2 + \frac{215}{2156} \bar{\varepsilon}^3; \quad \dots (57) \\ J_6 &= \frac{8}{7} e^3 - \frac{340}{231} e^2 \bar{\varepsilon} + \frac{200}{231} e \bar{\varepsilon}^2 - \frac{125}{462} \bar{\varepsilon}^3; \\ f_4 &= \left(\frac{5}{4} e \bar{\varepsilon} - \frac{25}{16} \bar{\varepsilon}^2 \right) - \frac{1709}{616} e^2 \bar{\varepsilon} + \frac{895}{176} e \bar{\varepsilon}^2 - \frac{75}{154} \bar{\varepsilon}^3. \end{aligned}$$

Die Definition der einparametrischen Gleichgewichtsfiguren findet übrigens in der Massefunktion J_6 eine bemerkenswerte Stütze. Setzt man wieder $\bar{e} = x e$, so folgt

$$231 J_6 = (264 - 340 x + 200 x^2 - 62,5 x^3) e^3,$$

welche Gleichung für $x = 0,8$ den Wert $J_6 = + \frac{8}{21} e^3$ des *MacLaurinschen* Ellipsoides liefert. Mit wachsendem x nimmt die wesentlich positive Massefunktion J_6 ab und verschwindet für $x = 1,4562$, während die Näherung 4. O. gemäß (24) für die Grenzfiguren $x = 1,4583$ ergeben hat. Die Übereinstimmung darf als voll befriedigend bezeichnet werden; mithin sinkt in den einparametrischen Sphäroiden der größten Massenkonzentration J_6 auf Null ab.

Wir wenden uns der Gleichgewichtsbedingung zu:

$$\bar{e} = x e + y e^2 + z e^3 + \dots \quad \dots (58)$$

Ebenso wie für die sämtlichen *MacLaurinschen* Ellipsoide gilt: $x = \frac{4}{5}$, $y = \frac{22}{35}$, $z = \frac{2}{5}$, müssen je ∞^2 einparametrische Gleichgewichtsfiguren durch dasselbe Wertetripel (x, y, z) in Näherung 6. O. gekennzeichnet sein. Der Koeffizient x ist dabei ein wichtiges Maß für die Massenkonzentration; es ist $0,8 \leq x \leq 1,4583$. Eine Verallgemeinerung der *MacLaurinschen* Gleichgewichtsbedingung ist somit für die einparametrischen Gleichgewichtsfiguren in Näherung 4. O. erzielt, wenn es gelingt, y als Funktion von x auszudrücken. Führt man (58) in die letzte Gleichung (57) ein, so wird:

$$f_4 = \left(\frac{5}{4} x - \frac{25}{16} x^2 \right) e^2 + \left(\frac{5}{4} y - \frac{25}{8} xy - \frac{1709}{616} x + \right. \\ \left. + \frac{895}{176} x^2 - \frac{75}{154} x^3 \right) e^3 \quad \dots (59)$$

Im Falle der *MacLaurinschen* Ellipsoide muß f_4 identisch verschwinden, was tatsächlich auf $x = \frac{4}{5}$ und $y = \frac{22}{35}$ führt. Ferner folgt aus (54) und (54a) für die Niveauflächen des Massenpunktes wegen $J_2 = J_4 = J_6 = 0$:

$$\bar{e} = 2 e + 2 e^2 + 2 e^3; \quad f_4 = - \frac{3}{2} e^2 + \frac{3}{5} e^3; \quad f_6 = - \frac{19}{10} e^3 \quad \dots (60)$$

Das Auftreten von f_6 zeigt deutlich, daß diese Niveauflächen nicht strenge mit den freien Oberflächen der einparametrischen Sphäroide der größten Massenkonzentration zusammenfallen. Hingegen liefert der Vergleich der Formparameter f_4 in (59) und (60) zwei Bestimmungsgleichungen für x und y :

$$\frac{25}{16} x^2 - \frac{5}{4} x - \frac{3}{2} = 0; \quad x = 1,45830; \\ \frac{5}{4} y \left(1 - \frac{5}{2} x \right) = \frac{1709}{616} x - \frac{895}{176} x^2 + \frac{75}{154} x^3 + \frac{3}{5} \quad \dots (61a)$$

oder

$$y \left(1 - \frac{5}{2} x \right) = 2,2194805 x - 4,0681818 x^2 + \\ + 0,3896104 x^3 + 0,48; \quad y = + 1,40852 \quad \dots (61 \text{ b})$$

Da der Koeffizient von e^3 von 0 bis 0,6 anwächst, während x von 0,8 auf 1,4583 ansteigt, können wir für die Zunahme dieses Koeffizienten linear 0,7291508 ($x - 0,8$) ansetzen und erhalten allgemein:

$$y \left(1 - \frac{5}{2} x \right) = 2,9486313 x - 4,0681818 x^2 + \\ + 0,3896104 x^3 - 0,5833206, \quad \dots (62)$$

womit die gesuchte Verallgemeinerung der *MacLaurin*-Bedingung auf die einparametrischen Gleichgewichtsfiguren bereits gefunden ist²⁷⁾.

Im allgemeinen ist natürlich der x -Wert einer derartigen Gleichgewichtsfigur nicht primär gegeben, so daß wir nach wie vor das System (23) benützen müssen. Dieses ist aber umgekehrt für die einparametrischen Sphäroide der größten Massenkonzentration erst gut geeignet, wenn wir \bar{e} in Näherung 4. O. kennen. Für diese Grenzfiguren verwendet man daher bequemer das System:

$$\begin{aligned} 1) \beta &= 2,64575 e + 6,5082 e^2; & 5) \beta_4 &= + 7,6458 e^2 \\ 2) \gamma_0 &= \frac{k^2 E}{a^2} (1 - 1,18745 e + 0,8806 e^2); & 7) f_4 &= - 1,5 e^2 \\ 3) 3 J_2 &= 0,54170 e - 0,1050 e^2; & 8) J_4 &= - 0,3095 e^2 \quad \dots (63) \\ 4) W_0 &= \frac{k^2 E}{a} (1 + 0,81943 e + 0,8028 e^2); & 9) \rho_m &= \frac{3 E}{4\pi} \frac{1}{a^3 (1 - e)} \\ 6) \varepsilon &= 1,45830 e + 3,1402 e^2 \text{ oder: } \bar{e} &= 1,45830 e + 1,4085 e^2. \end{aligned}$$

In einer, etwa durch $[E, \omega, a, J_2]$ eindeutig definierten einparametrischen Gleichgewichtsfigur liegen dank des Verschwindens aller höheren Formparameter ($f_6 = f_8 = \dots = 0$) nicht nur J_4 , sondern bei entsprechender Entwicklung auch alle höheren Massefunktionen fest. Für das in Näherung 4. O. gegebene Normalsphäroid (48) folgt bei Mitnahme der Glieder 6. O. gemäß (57) eine Zunahme von J_4 um $1,0 \cdot 10^{-8}$ und von f_4 um $5,6 \cdot 10^{-8}$, während sich $J_6 = 0,9 \cdot 10^{-8}$ ergibt. Dies beweist, daß die Näherung 4. O. praktisch völlig ausreicht, und zeigt die rapide Abnahme der Massefunktionen; es ist $J_2 = 325 |J_4|$ und $|J_4| = 356 J_6$.

5. Einparametrische Figurenreihen

Da jede einparametrische Gleichgewichtsfigur durch die Masse E und drei weitere Bestimmungsstücke eindeutig festliegt, erhält man lineare Reihen derartiger Figuren, wenn man zwei Bestimmungsstücke festhält. Es seien im folgenden kurz die Reihen

(a, e), (ω, a) und (ω, K_2) untersucht. Die erste Reihe kann in dem Koordinatensystem mit den Achsen a, e, f_4 als „Vertikalreihe“ bezeichnet werden. In allen drei Fällen wird der numerischen Berechnung jene Reihe zugrundegelegt, welche das einparametrische Normalsphäroid (48) enthält.

Für die Vertikalreihe finden wir mit den Ausgangsdaten

$$\begin{aligned} E &= 5976,318 \cdot 10^{24} \text{ g}; \quad a = 6,37829 \cdot 10^8 \text{ cm}; & \dots (64) \\ e &= 335289 \cdot 10^{-8} = 1:298,25 \end{aligned}$$

mittels (57) in Näherung 6. O.:

	Homogenes Ellipsoid	Normal- sphäroid	J_4, \max	Sphäroid der größten Konz.
$\bar{\varepsilon}$	$268939 \cdot 10^{-8}$	$346147 \cdot 10^{-8}$	$405586 \cdot 10^{-8}$	$490535 \cdot 10^{-8}$
ω	$4,131437 \cdot 10^{-9}$	$5,317496 \cdot 10^{-9}$	$6,230600 \cdot 10^{-9}$	$7,535587 \cdot 10^{-9} \text{ sec}^{-2}$
J_2	$133891 \cdot 10^{-8}$	$108305 \cdot 10^{-8}$	$88620 \cdot 10^{-8}$	$60505 \cdot 10^{-8}$
J_4	$-384 \cdot 10^{-8}$	$-331 \cdot 10^{-8}$	$-319 \cdot 10^{-8}$	$-344 \cdot 10^{-8}$
J_4	$-0,34170 e^2$	$-0,29445 e^2$	$-0,28342 e^2$	$-0,30597 e^2$
J_6	$+1,44 \cdot 10^{-8}$	$+0,94 \cdot 10^{-8}$	$+0,57 \cdot 10^{-8}$	$0,00 \cdot 10^{-8}$
f_4	0	$-414 \cdot 10^{-8}$	$-858 \cdot 10^{-8}$	$-1684 \cdot 10^{-8}$

Für das *MacLaurinsche* Ellipsoid kann ε aus I, (1a) berechnet werden. Für das Normalsphäroid ist diese Größe mit ω direkt gegeben; daher weicht J_2 geringfügig vom empirischen Wert (48) ab. Das Maximum von J_4 ist: $J_4, \max = -\frac{8}{35} \delta_{\min} = -\frac{2}{7} e^2$.

In Näherung 6. O. muß es aus benachbarten, äquidistanten Figuren ermittelt werden. Dieses Maximum ist hier übrigens wegen der Konstanz von e nicht relativ, sondern absolut. Die Grenzfigur muß mit dem maximalen Absolutbetrag des Formparameters f_4 aus (60) abgeleitet werden; J_6 ergibt sich tatsächlich genügend exakt zu Null.

Das klarste Bild der Massenkonzentration liefert die Reihe (ω, a) mit den Ausgangsdaten:

$$\begin{aligned} E &= 5976,318 \cdot 10^{24} \text{ g}; \quad \omega^2 = 5,317496 \cdot 10^{-9} \text{ sec}^{-2} & \dots (65) \\ a &= 6,37829 \cdot 10^8 \text{ cm} \end{aligned}$$

In dieser Reihe ist $\bar{\varepsilon} = 346147 \cdot 10^{-8}$ konstant. Neben den beiden Grenzfiguren und dem Normalsphäroid sei noch die zugehörige Niveaufläche des Massenpunktes tabuliert.

	Homogenes Ellipsoid	Normal- sphäroid	Sphäroid der größten Konz.	Niveaufläche des Punktes
e	$431223 \cdot 10^{-8}$	$335289 \cdot 10^{-8}$	$236822 \cdot 10^{-8}$	$172775 \cdot 10^{-8}$
ε	$0,80271 e$	$1,03238 e$	$1,46164 e$	$2,00346 e$
J_2	$172117 \cdot 10^{-8}$	$108310 \cdot 10^{-8}$	$42742 \cdot 10^{-8}$	0
J_4	$-638 \cdot 10^{-8}$	$-332 \cdot 10^{-8}$	$-174 \cdot 10^{-8}$	0
J_6	$+3,06 \cdot 10^{-8}$	$+0,94 \cdot 10^{-8}$	$+0,00 \cdot 10^{-8}$	0
f_4	0	$-426 \cdot 10^{-8}$	$-841 \cdot 10^{-8}$	$-448 \cdot 10^{-8}$

Der Koeffizient x' in $\bar{\varepsilon} = x'e$ unterscheidet sich natürlich nur geringfügig vom Faktor x in $\bar{\varepsilon} = x e + y e^2$; beide sind ein typisches Maß für die jeweils erreichte

Massenkonzentration. Während die Rechnung hier in Näherung 4. O. durchgeführt wurde, konnte J_6 zusätzlich aus (57) berechnet werden. J_2 und J_4 sinken in der Reihe auf etwa ein Viertel der Ellipsoid-Werte ab. Die Abplattung des Ellipsoides 1:231,9 ist schon seit *Newton* bekannt; für das einparametrische Sphäroid der größten Massenkonzentration finden wir aber $e = 422,2$ im Gegensatz zu dem von *Huygens* berechneten Wert für den Massenpunkt: $e = 1:578,8$, der bisher als Grenzwert der größten Massenkonzentration angesehen wurde. Tatsächlich hat der Massenpunkt, wie wir später erkennen werden, als freilich bereits fiktives zweiparametrisches Sphäroid der größten Massenkonzentration einen klaren Sinn.

Schließlich wurde mit den Ausgangsdaten:

$$E = 5976,318 \cdot 10^{24} \text{ g}; \quad \omega^2 = 5,317496 \cdot 10^{-9} \text{ sec}^{-2}; \quad \dots \quad (66)$$

$$K_2 = 44063,31 \cdot 10^{10} \text{ cm}^2$$

noch die wichtige Reihe $(\omega, K_2) \equiv (\omega, H) \equiv (\omega, C)$ berechnet. Die Konstanz der Trägheitsmomente ist dadurch verbürgt, daß mit der zunehmenden Massenkonzentration eine starke Expansion der Figuren verbunden ist. Gleichzeitig nimmt die statische Abplattung ständig ab, während die geometrische Abplattung wächst. Der Absolutbetrag von J_4 geht durch ein absolutes Minimum, welches nichts mit dem relativen Minimum $\frac{2}{7}e^2$ zu tun hat. Die wesentlich positive Massefunktion J_6 sinkt wie immer bis auf Null ab. Überdies überrascht der verhältnismäßig geringe Anstieg der Abplattung.

	Homogenes Ellipsoid	Normal- sphäroid	$ J_4 = \frac{2}{7}e^2$	Sphäroid der größten Konz.
$\bar{\epsilon}$	$261950 \cdot 10^{-8}$	$346147 \cdot 10^{-8}$	$419444 \cdot 10^{-8}$	$605450 \cdot 10^{-8}$
e	$326598 \cdot 10^{-8}$	$335289 \cdot 10^{-8}$	$352203 \cdot 10^{-8}$	$413524 \cdot 10^{-8}$
a	5812413 m	6378290 m	6800000 m	7684996 m
J_2	$130426 \cdot 10^{-8}$	$108310 \cdot 10^{-8}$	$95293 \cdot 10^{-8}$	$74609 \cdot 10^{-8}$
J_4	$-365 \cdot 10^{-8}$	$-331 \cdot 10^{-8}$	$-354 \cdot 10^{-8}$	$-529 \cdot 10^{-8}$
J_6	$+1,33 \cdot 10^{-8}$	$+0,94 \cdot 10^{-8}$	$+0,70 \cdot 10^{-8}$	0
f_4	0	$-414 \cdot 10^{-8}$	$-889 \cdot 10^{-8}$	$-2561 \cdot 10^{-8}$

Das sehr flache Minimum von $|J_4|$ liegt auffallenderweise sehr nahe beim Normal-sphäroid. In Näherung 6. O. findet man genauer:

$$a = 6300 \text{ km}, \quad |J_4| = 331,37 \cdot 10^{-8}; \quad a = 6378,29 \text{ km}, \quad |J_4| = 331,04 \cdot 10^{-8}$$

$$6350 \quad 331,01 \quad 6400 \quad 331,18$$

Parabolischer Ausgleich liefert $|J_4|_{\min}$ für $a = 6358,88 \text{ km}$. Da jedoch die beiden letzten Dezimalen von J_4 bei einer Näherung 8. O. sicherlich Änderungen erfahren würden, bleibt die Möglichkeit offen, daß das Minimum exakt mit dem Normal-sphäroid gekoppelt ist; doch steht eine physikalische Begründung hierfür noch aus.

6. Abplattungsfunktion und Schwereverlauf im Innenraum

Das Prinzip der Entblätterung eröffnet die Möglichkeit, die Abplattung der inneren Niveauflächen und die Schwereverteilung auf ihnen exakt zu berechnen,

sobald das Dichtegesetz (42) gegeben ist. Für das einparametrische Normalsphäroid fanden wir bereits in § 2 das Dichtegesetz:

$$\nu = 0,51490; n = 2,01683; \rho_m = 5,5168; \rho_{max} = 11,127; \rho_{min} = 2,618 \quad \dots (67)$$

Bei Entblätterung bis zur Niveaufläche a' geht für die Restfigur ν über in

$$\nu' = \nu \left(\frac{a'}{a}\right)^2, \quad \dots (68)$$

während die neue Minimaldichte wird:

$$\rho'_0 = \rho_{max} (1 - \nu')^2. \quad \dots (69)$$

Der neue Mittelwert der Dichte kann in ziemlich guter Approximation aus

$$\rho'_m = \rho_{max} \left(1 - \frac{6}{5} \nu' + \frac{3}{7} \nu'^2\right) \quad \dots (70)$$

berechnet werden. Die Vernachlässigung des links stehenden Quotienten der ersten Gleichung (36a) ist erlaubt, da er sich mit abnehmendem Äquatordradius a' immer mehr der Einheit nähert. Es mögen folgende Niveauflächen untersucht werden²⁸⁾:

	ν'	ρ'_0	ρ'_m	$n' = \frac{\rho_{max}}{\rho'_m}$
0,8 a = 5 102632 m;	0,329 536;	5,0018;	7,2448;	1,53586
0,6 a 3 826974	0,185 364	7,3842	8,8158	1,26217
0,4 a 2,551316	0,082 384	9,3691	10,0593	1,10614
0,2 a 1 275658	0,020 596	10,6734	10,8540	1,02515
0,1 a 637829	0,005 149	11,0127	11,0584	1,00620

Für die von der Niveaufläche a' eingeschlossene Teilmasse E' gilt

$$E' = \frac{\rho'_m}{\rho_m} \left(\frac{a'}{a}\right)^3 \frac{1 - e'}{1 - e} E, \quad \dots (71)$$

worin in 1. Näherung die Abplattungsdifferenz wegen der Unkenntnis der Abplattung e' der Niveaufläche a' unterdrückt werden muß. Aus demselben Grunde liefert die zweite Gleichung (36a) vorerst nur einen Näherungswert für die Achse a_h' des homogenen Ausgangsellipsoides der zugehörigen Reihe (ω, K_2). Mit den Daten $[E', \omega, a_h']$ führt dieses Ellipsoid auf die statische Abplattung, den Parameter $\bar{\epsilon}'$ und die geometrische Abplattung e' der entblätterten Figur, mit welcher die Rechnung in 2. Näherung wiederholt werden kann. Damit ergibt sich schließlich auch der Formparameter und die Äquatorschwere der inneren Niveauflächen:

	$E' (10^{24})$	$\bar{\epsilon}'$	e'	$e'-1$	f_4	α	γ_0	<i>Bullen-Bullard</i>
1,0 a	5976,32;	346147;	335289;	298,25;	— 426;	0,379	978,04;	297,3
0,8 a	4020,32	263480	285265	350,55	— 145	0,178	1028,68	333,3
0,6 a	2064,56	216458	251296	397,94	— 52	0,083	939,45	388,5
0,4 a	698,16	189660	229693	435,36	— 17	0,032	714,93	409,0
0,2 a	94,18	175755	217754	459,23	— 4	0,009	385,71	465,6
0,1 a	11,99	173217	215771	463,45	— 2	0,004	195,71	468,5

Hierin sind die Größen $\bar{\varepsilon}$, e' und f_4 in Einheiten 10^{-8} und γ_0 in *gal* gegeben. Die Abplattung sinkt nach innen stetig ab. Gleichzeitig nimmt auch der Formparameter ab. Tatsächlich muß sich ja die Restfigur mit abnehmendem a' immer mehr dem homogenen Ellipsoid nähern. Für $a' = 0,2 a$ beträgt die Depression der Niveaufläche gegenüber dem gleichachsigen Ellipsoid nur mehr maximal 13 mm. Für den Grenzwert von $\bar{\varepsilon}'$ findet man:

$$\lim_{a=0} \bar{\varepsilon}' = \lim_{a=0} \frac{\omega^2 a^3}{k^2 E'} = \frac{3 \omega^2}{4\pi k^2 \rho_{max} (1 - e_0)} \quad \dots (71)$$

und mit der gemäß (11) für das homogene Ellipsoid gültigen Beziehung $e = 1,25 \bar{\varepsilon} - \frac{11}{14} e^2$ den Grenzwert der Abplattung

$$e_0 = 213906 \cdot 10^{-8} = 1:467,5 \quad \dots (71a)$$

Ist umgekehrt die Schichtung, also auch $\lim e = e_0$, und die Rotationsgeschwindigkeit gegeben, so liefert (71) die maximale Dichte. Tatsächlich ist jede Gleichgewichtsfigur sowohl durch E und S , wie auch durch S und ω eindeutig bestimmt — vgl. Satz IIIa auf Seite 44. Der Absolutbetrag des Formparameters f_4 wächst nach oben rascher als das Quadrat der Abplattung, was einen raschen Anstieg des Faktors κ zur Folge hat. Daher hat die Ableitung $d\kappa/da$ an der Oberfläche ihren größten Wert, während umgekehrt im Außenraum f_4 zuerst langsamer anwächst als e^2 , so daß dort $d\kappa/da$ zuerst negativ ist. Folglich hat die Kurve $\kappa = \kappa(a)$ an der Oberfläche eine Ecke. Die Abplattungsfunktion des einparametrischen Normalsphäroides stimmt ziemlich gut mit der in der letzten Kolonne der Tabelle ausgewiesenen Abplattungsfunktion überein, die *Bullard*²⁵⁾ auf Grund der Dichteverteilung von *Bullen* abgeleitet hat.

Bereits auf Seite 50 wurde festgestellt, daß bei heterogenen Gleichgewichtsfiguren mit wachsender Massenkonzentration das Schweremaximum in immer größere Tiefen rückt, sobald die Oberflächendichte kleiner ist als $2\rho_m/3$. Durch Verdichtung obiger Tabelle finden wir für das Schweremaximum genähert:

$$a' = 0,8245 a = 5258,9 \text{ km}; \quad \gamma_0 = 1029,74 \text{ gal} \quad \dots (72)$$

Das Schweremaximum liegt also in der Tiefe von ungefähr 1119,4 km. Interessant ist der Hinweis, daß *Helmert* (HG II, S. 492/3) bereits eine recht gute Annäherung unter Vernachlässigung der Abplattung gefunden hat, zumal ja das Prinzip der Entblätterung für die geschichtete Kugel schon längst bekannt war.

Mittels desselben Vorgangs kann auch leicht der innere Vertikalgradient der Schwere an der Oberfläche einer heterogenen Gleichgewichtsfigur bestimmt werden. Man entblättert die Figur um eine Schicht von der Dicke 1 km und berechnet die zugehörige Schwere γ_0 im Äquator. Die Differenz gibt den Vertikalgradienten in gal/km = mgal/m. Nebenbei bemerkt, konnte nach diesem Verfahren auch die interpolatorische Annahme für den Durchschnittswert \bar{e}_2 — vgl. Seite 68 — überprüft und als ausreichend bestätigt werden. Auf diese Weise resultiert der innere Vertikalgradient im Äquator an der Oberfläche für das

homogene Ellipsoid:	−0,15341 mgal/m
Normalsphäroid:	+0,08946
Sphäroid d. größten Massenkonzentration:	+0,30635.

Für das Ellipsoid liegt also das Schweremaximum an der Oberfläche, während der Gradient für das Sphäroid der größten Massenkonzentration bereits dem Freiluftgradienten recht nahe kommt. Von Interesse scheint ein Vergleich mit der üblichen Gradientenberechnung nach der Reduktion von *Poincaré-Prey*, bei welcher bekanntlich der Freiluftgradient um die doppelte Anziehung einer *Bouguerschen* Platte der Dicke 1 m vermindert wird. Diese Anziehung $2\pi k^2 \rho h$ führt mit der mittleren Dichte 2,6194 unserer km-Schicht auf den Gradienten:

$$0,30878 - 0,21955 = + 0,08923 \text{ mgal/m} \quad \dots (73)$$

was sehr gut mit obigem Wert übereinstimmt. Für $\rho = 1$ und $h = 1$ m ist die Plattenwirkung 0,041909 mgal. Der innere Vertikalgradient würde daher für

$$0,30878 = 0,083818 \rho_1; \rho_1 = 3,684$$

verschwinden; tatsächlich ist $2 \rho_m/3 = 3,678$. Die verblüffende Übereinstimmung des Resultates der einfachen Fiktion der unendlichen Platte mit dem Resultat der Entblätterung erklärt sich aus der Tatsache, daß die Anziehung einer homogenen Kugelschicht auf einen Oberflächenpunkt $4\pi k^2 \rho h$ ist, also genau gleich der doppelten Plattenwirkung. Die kleine Differenz der beiden Ergebnisse ist bloß eine Folge der Abplattung.

III. Die mehrparametrischen Gleichgewichtsfiguren

1. Die Definition der mehrparametrischen sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren

Gemäß der strengen Individualität des Dichtegesetzes haben die ∞^2 nullparametrischen Gleichgewichtsfiguren $[E, a, e]$ oder $[E, a, \rho]$, die *MacLaurinschen* Ellipsoide, ein Dichtegesetz mit zwei Konstanten, wobei zur spezifischen Dichtekonstante ρ noch der Äquatorradius kommt. Ähnlich fanden wir für die ∞^3 einparametrischen Gleichgewichtsfiguren $[E, a, e, f_4]$ oder $[E, a, \nu, \rho_{max}]$ das Dichtegesetz II (42) mit den beiden spezifischen Konstanten ν und ρ_{max} . Da die höheren Formparameter f_6, f_8, \dots sehr rasch absinken, ist die Definition mehrparametrischer Gleichgewichtsfiguren praktisch nur auf Grund des Dichtegesetzes möglich. Allgemein gibt es ∞^n Gleichgewichtsfiguren mit $(n - 2)$ Formparametern, deren Dichtegesetz n Konstanten enthält. Wir definieren:

1. Jede mehrparametrische Gleichgewichtsfigur besteht aus mehreren Teilen, deren jeder homogen oder heterogen ist und in letzterem Falle ein stetiges Dichtegesetz der Gestalt II (42) besitzt.

2. Die Trennungsfächen der einzelnen Teile sind Niveaufächen, in denen ein Wechsel des Dichtegesetzes mit oder ohne Dichtesprung eintritt (Diskontinuitätsflächen der Dichte).

3. Die heterogenen Teile haben eine Abplattungsfunktion, die verschieden ist von der Abplattungsfunktion der zugehörigen einparametrischen Gleichgewichtsfigur. Auch sind die Niveaufächen im Inneren der homogenen Teile keineswegs ähnliche Ellipsoide.

4. Bei Entblätterung bis zur innersten Trennungsfäche resultiert ein null- oder einparametrischer Kern.

5. Aus Stabilitätsgründen kann die Dichte nach innen niemals abnehmen. Eine Verschärfung dieser Forderung wird sich in IV, 2, δ ergeben. Auf diese Weise läßt sich die grundsätzliche Struktur der mehrparametrischen Gleichgewichtsfiguren bereits feststellen. Jede der ∞^4 zweiparametrischen Gleichgewichtsfiguren $[E, a, e, f_4, f_6]$ hat ein Dichtegesetz mit 4 Konstanten. Da sich die Zahl 4 aus den Elementen 2 und 3 nur in der Form $(2 + 2)$ zusammensetzen läßt, bestehen diese Figuren aus zwei homogenen Teilen, Mantel und Kern. Die ∞^5 dreiparametrischen Gleichgewichtsfiguren bestehen wegen $5 = 2 + 3 = 3 + 2$ entweder aus einem homogenen Mantel und einem heterogenen Kern oder umgekehrt aus einem heterogenen Mantel und einem homogenen Kern. Die ∞^6 vierparametrischen Gleichgewichtsfiguren sind entweder die allgemeinsten zweiteiligen Modelle $(6 = 3 + 3)$, bestehend aus heterogenem Mantel und ebensolchem Kern, oder die einfachsten dreiteiligen Modelle $(6 = 2 + 2 + 2)$, bestehend aus drei homogenen Teilen, usw. Zumindest im Gleichgewichtsfalle verschwinden mit f_{2i} auch alle folgenden Formparameter. Auch dies ist ein reiner Analogieschluß. Denn für $f_4 = 0$ kommen allein die *MacLaurinschen* Ellipsoide in Frage und alle höheren Formparameter verschwinden. Für die einparametrischen Gleichgewichtsfiguren ist $f_6 = 0$ und dank der Eindeutigkeit des Dichtegesetzes müssen alle höheren Massefunktionen berechenbar sein, was nur möglich ist, wenn die Formparameter ab f_6 verschwinden.

Jede Figur $[E, a, e, f_4, f_6, \dots]$ mit n aufeinanderfolgenden Formparametern kann eine n -parametrische Gleichgewichtsfigur von bestimmter Rotationsgeschwindigkeit sein, falls nur eine entsprechende Schichtung der Flächen gleicher Dichte vorliegt. Unabhängig vom Gleichgewicht gelten für alle Niveausphäroide gewisse Beziehungen zwischen den Formparametern und den Massefunktionen. Setzt man in Näherung 2. O. $\bar{e} = xe$, in Näherung 4. O. $f_4 = -\alpha e^2$; $J_4 = -\xi e^2$ oder $\delta = +\sigma e^2$ und schließlich in Näherung 6. O. $f_6 = -\lambda e^3$ und $J_6 = +\eta e^3$, so hat man gemäß den Gleichungen II (54) die Beziehungen:

$$-\xi + \frac{8}{35}\alpha = \frac{4}{7}x - \frac{4}{5} \quad \text{oder} \quad -\sigma + \alpha = \frac{5}{2}x - \frac{7}{2};$$

$$\left(-\lambda + \frac{231}{80}\eta\right) = \left(\frac{33}{10} - \frac{11}{4}x\right) + \alpha \left(\frac{6}{5} - \frac{1}{2}x\right) \quad \dots (1)$$

Die mittlere Gleichung ist identisch mit II(18). Jede n -parametrische Gleichgewichtsfigur ist ferner in n -ter Näherung auch freie Oberfläche zahlloser höherparametrischer Gleichgewichtsfiguren oder äußere Niveaufläche kleinerer Gleichgewichtsfiguren mit beliebiger Zahl von Formparametern, jedoch mit größerer Rotationsgeschwindigkeit. Ferner können die äußeren Niveauflächen sämtlicher Gleichgewichtsfiguren selbst als Grenzfälle von Gleichgewichtsfiguren gedeutet werden, die zwei Formparameter mehr besitzen; man braucht ja bloß den Raum zwischen der gegebenen Gleichgewichtsfigur und der gedachten äußeren Niveaufläche als zusätzlichen, homogenen Mantel der Dichte Null auffassen. Man erkennt so, daß z. B. die äußeren Niveauflächen der *MacLaurinschen* Ellipsoide zwei Formparameter besitzen müssen.

Gemäß dem Satze von *Stokes-Poincaré* gibt es zur freien Oberfläche einer Gleichgewichtsfigur neben der Gleichgewichtsanzordnung noch zahllose andere

Massenanordnungen, für welche die (ursprüngliche) Oberfläche Niveaufläche bleibt und das Außenraumpotential unverändert ist. Jedoch ist gegenüber dem Ruhefalle die Zahl der möglichen Massenkongfigurationen durch die Erhaltung des Schwerpunktes in der Rotationsachse stark eingeschränkt. Vermutlich sind nur Massenverschiebungen in homogenen, konfokalen Ellipsoidschalen möglich, zu denen im Grenzfall natürlich auch Verschiebungen in homogenen Kugelschalen gehören. Nach einem bekannten, bereits auf *MacLaurin* zurückgehenden Satz der Potentialtheorie ist nämlich die Anziehung einer von zwei konfokalen Ellipsoiden begrenzten homogenen Schale dieselbe wie die eines homogenen, konfokalen Vollellipsoides derselben Masse. Dann aber hat jede derartige Schale gemäß II (4) vor und nach der Verschiebung dieselben Anteile an den gesamten Massefunktionen J_{2i} , während für homogene Kugelschalen diese Anteile überhaupt verschwinden. Abstrahiert man von derartigen Verschiebungen, so kann man unter allgemeinen, rotations- und äquatorsymmetrischen Massenanordnungen solche verstehen, die für keinen Wert von ω mögliche Gleichgewichtsfiguren sind, z. B. die homogenen Figuren $[E, a, e, f_4 \neq 0]$.

2. Die zweiparametrischen Gleichgewichtsfiguren (Wiechert-Modelle)²⁷⁾

Die ∞^4 zweiparametrischen Gleichgewichtsfiguren $[E, a, e, f_4, f_6]$ werden auch *Wiechert-Modelle* genannt, zumal *Wiechert*²⁸⁾ als erster derartige, aus einem homogenen Mantel und ebensolchem Kern bestehende Figuren in die Theorie eingeführt hat. Halten wir wie in II (65) wieder die Daten

$$E = 5976,318 \cdot 10^{24} \text{ g}; \quad \omega^2 = 5,317496 \cdot 10^{-9} \text{ sec}^{-2}; \quad a = 6,37829 \cdot 10^8 \text{ cm} \quad \dots (2)$$

fest, so muß es noch ∞^2 Lösungen geben, für welche $\bar{\epsilon} = 346147 \cdot 10^{-8}$ konstant ist. Als freie Parameter für die Berechnung wählen wir den Äquatorradius a_k des Kernes und das Massenmoment 2. O., $K_2 = (C - A)/E$ oder noch bequemer die Differenz der Trägheitsmomente $(C - A)$ selbst.

Für das homogene *MacLaurinsche* Ellipsoid $[E, \omega, a]$ findet man nach II (55), (57) und (58):

$$e = 431218 \cdot 10^{-8}; \quad J_2 = 172116 \cdot 10^{-8}; \quad J_4 = -634,8 \cdot 10^{-8}; \quad \dots (3)$$

$$J_6 = +3,05 \cdot 10^{-8}; \quad (C - A) = J_2 E a^2 = 418,47 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2$$

Dieses repräsentiert eine fiktive Reihe von *Wiechert-Modellen* mit beliebigem Kernradius und verschwindendem Dichtesprung an der Kernoberfläche. Für $a_k = 0$ gilt das ganze Ellipsoid als Mantel, für $a_k = a$ gilt es als Kern, während der Mantel gerade verschwindet. Mithin repräsentiert das Ellipsoid die erste Grenzlinie des Gültigkeitsbereiches der möglichen Lösungen in einem Koordinatensystem mit den Achsen $(C - A)$ und a_k (Fig. 8).

Die zweite Grenzlinie stellt die Abzissenachse dar, d. h. die Reihe der Figuren mit $a_k = 0$. Eine Teilmasse E_1 bildet den homogenen Mantel, während die Restmasse $E_2 = E - E_1$ im Schwerpunkt konzentriert ist. Mit abnehmendem E_1 sinken die Oberflächenabplattung e und die Differenz $(C - A)$ stetig. Da die Masse E_2 nichts zu den Massenmomenten beiträgt, gilt:

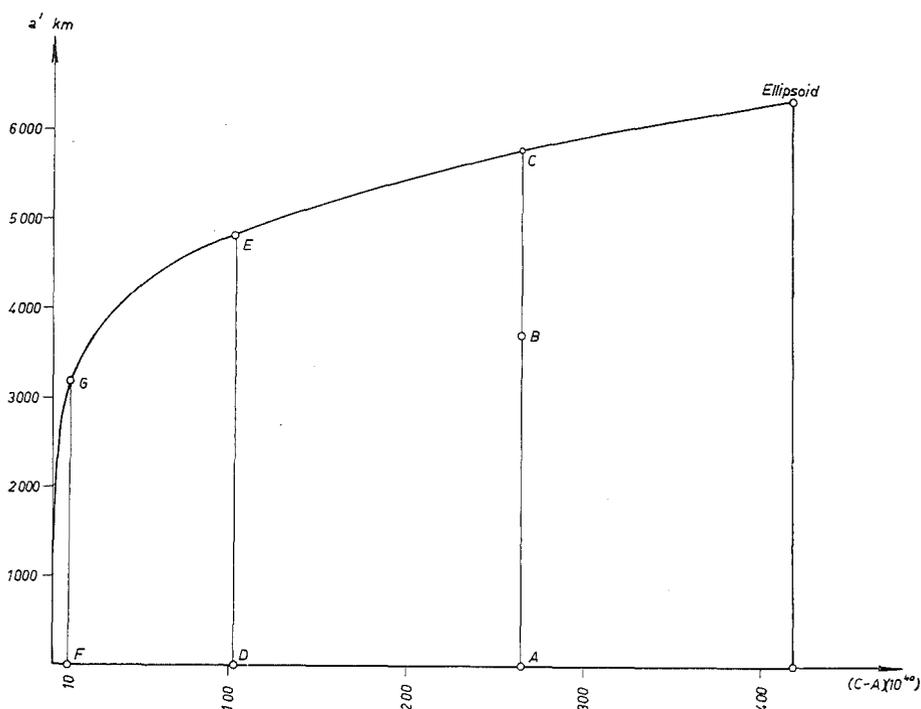


Fig. 8

$$(C - A) = J_2 E a^2 = \frac{1}{5} E_1 a^2 (2e - e^2) = J_{21} E_1 a^2, \quad \dots (4)$$

also

$$J_2 = J_{21} (E_1 : E) \quad \dots (4a)$$

und analog

$$J_4 = J_{41} (E_1 : E); \quad J_6 = J_{61} (E_1 : E) \quad \dots (4b)$$

Es werde die Figur mit der Differenz $(C - A) = 263,34 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2$ des einparametrischen Normalsphäroides berechnet. Für dieses ist in Näherung 6. O.

$$e = 335296,0 \cdot 10^{-8}; \quad J_4 = -333,95 \cdot 10^{-8}; \quad J_6 = +0,94 \cdot 10^{-8}; \quad \dots (5)$$

$$f_4 = -413,77 \cdot 10^{-8}$$

Mit dieser Abplattung findet man aus II (55) die ersten Näherungen:

$$J_{21} = +133893,5 \cdot 10^{-8}; \quad J_{41} = -384,16 \cdot 10^{-8}; \quad J_{61} = +1,44 \cdot 10^{-8}$$

und mit dem gegebenen J_2 sofort $(E_1 : E) = 0,8089262$ und damit:

$$J_4 = -310,76 \cdot 10^{-8}; \quad J_6 = +1,16 \cdot 10^{-8}.$$

Mit diesen Werten liefern aber die Gleichungen II (54) bereits die in der Tabelle ausgewiesenen Endwerte für e , f_4 und f_6 , da sich e kaum merklich ändert. Bemerkenswert ist, daß in der Reihe $a_k = 0$ das Verhältnis $F = |J_4| : J_2^2$ mit abnehmendem $(C - A)$ unbegrenzt anwächst, bis schließlich für $E_1 = 0$, d. h. für die Manteldichte $\rho_M = 0$ das zweiparametrische Sphäroid der größten Massenkonzentration erreicht ist, das mit einer Niveaufläche des Massenpunktes zusammenfällt:

$$e = 172774,4 \cdot 10^{-8}; f_4 = -447,44 \cdot 10^{-8} = -1,499 e^2; \quad \dots (6)$$

$$f_6 = -0,98 \cdot 10^{-8} = -1,9 e^3.$$

Die dritte Grenzlinie des Gültigkeitsbereiches wird von den Figuren mit der Manteldichte Null gebildet, also von äußeren Niveauflächen *MacLaurinscher* Ellipsoide $[E, \omega, a_k]$, welche als Kern die gesamte Masse enthalten.

Mithin ist

$$(C - A) = J_2 E a^2 = J_{22} E a_k^2; \quad J_2 = J_{22} \left(\frac{a_k}{a} \right)^2$$

und analog

$$J_4 = J_{42} \left(\frac{a_k}{a} \right)^4; \quad J_6 = J_{62} \left(\frac{a_k}{a} \right)^6 \quad \dots (7)$$

Die beiden Unbekannten a_k und e_k werden in sukzessiver Approximation aus den zwei Gleichungen

$$5 \frac{C - A}{E} = a_k^2 (2 e_k - e_k^2); \quad e_k = 1,25 \bar{e}_k - \frac{11}{14} e_k^2 \quad \dots (8)$$

gewonnen.

In unserem Koordinatensystem ist jede Figurenreihe mit konstantem $(C - A)$ durch eine vertikale Linie repräsentiert. Die allgemeine Lösung sei am Beispiel des *Wiechert-Modelles* mit der statischen Abplattung der wirklichen Erde und mit der Kerntiefe 2900 km, also für $a_k = 3,47829 \cdot 10^8$ cm, aufgezeigt, entsprechend dem bekannten seismischen Ergebnis. Die geometrische Abplattung der gesuchten Figur kann mit hoher Sicherheit aus den Werten der beiden Grenzfiguren der Vertikalreihe ermittelt werden. Denn aus der ersten Gleichung (54) folgt, daß die Änderung von e nur ein Siebentel der Änderung von f_4 beträgt. Sodann wählt man eine Teilmasse E_1 zum Aufbau einer fiktiven „Mantelfigur“, nämlich des homogenen Ellipsoides $[E_1, a, e]$. Die Restmasse E_2 muß homogen im Kern verteilt werden und es gilt für die Differenz der Trägheitsmomente:

$$(C - A) = (C - A)_1 + (C - A)_2 = \frac{1}{5} E_1 a^2 (2 e - e^2) +$$

$$+ \frac{1}{5} E_2 a_k^2 (2 e_k - e_k^2) = J_{21} E_1 a^2 + J_{22} E_2 a_k^2, \quad \dots (a)$$

woraus die Abplattung der Kernoberfläche berechnet werden kann. Die Kernmasse E_k besteht aus E_2 und jenem Teil E_1' von E_1 , der innerhalb des Kernes liegt:

$$E_1' = \left(\frac{a_k}{a} \right)^3 \frac{1 - e_k}{1 - e} E_1; \quad E_k = E_2 + E_1' \quad \dots (b)$$

Gemäß dem Prinzip der Entblätterung ist der Kern ein *MacLaurinsches* Ellipsoid:

$$\bar{e}_k = \frac{\omega^2 a_k^3}{k^2 E_k}; \quad e_k = 1,25 \bar{e}_k - \frac{11}{14} e_k^2, \quad \dots (c)$$

was abermals e_k liefert. Stimmen die beiden Werte für e_k nicht überein, so ist die Rechnung mit einer besseren Wahl für E_1 zu wiederholen. Bemerkte sei noch, daß die Mantelfigur natürlich kein *MacLaurinsches* Ellipsoid ist. Denn die Oberfläche

des *Wiechert*modells ist zweiparametrig und könnte selbst bei Vernachlässigung der Formparameter nur für eine andere Rotationsgeschwindigkeit eine homogene Gleichgewichtsfigur sein. Mithin sind auch die Niveauflächen innerhalb des Mantels keine ähnlichen Ellipsoide; die Abplattungsfunktion ist eine andere.

Aus Gleichung (a) folgt in Erweiterung von (4):

$$\begin{aligned} J_2 &= J_{21} \left(\frac{E_1}{E} \right) + J_{22} \left(\frac{a_k}{a} \right)^2 \left(\frac{E_2}{E} \right) \\ J_4 &= J_{41} \left(\frac{E_1}{E} \right) + J_{42} \left(\frac{a_k}{a} \right)^4 \left(\frac{E_2}{E} \right) \quad \dots (9) \\ J_6 &= J_{61} \left(\frac{E_1}{E} \right) + J_{62} \left(\frac{a_k}{a} \right)^6 \left(\frac{E_2}{E} \right) \end{aligned}$$

und die Gleichungen (54) liefern e , f_4 und f_6 , wobei sich der Endwert von e nur geringfügig vom angenommenen, interpolierten Wert unterscheiden kann. Für die Dichte und die Trägheitsmomente von Mantel und Kern findet man:

$$\begin{aligned} \rho_M &= E_1 : \frac{4}{3} \pi a^3 (1 - e); \quad \rho_K = E_K : \frac{4}{3} \pi a_k^3 (1 - e_k); \\ C_M &= \left(\frac{2}{5} E_1 a^2 - \frac{2}{5} E_1' a_k^2 \right); \quad C_K = \frac{2}{5} E_K a_k^2; \quad \dots (10) \\ C &= C_1 + C_2 = C_M + C_K = \frac{2}{5} E_1 a^2 + \frac{2}{5} E_2 a_k^2 \end{aligned}$$

Die Resultate sind in folgenden Tabellen zusammengestellt:

1. Vertikalreihe:

$$J_2 = 108310 \cdot 10^{-8}; \quad (C - A) = 263,336 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2$$

	Normal- sphäroid	A $a_k = 0$	B 3478,290	C 5812,413 km
e	335296,0	335309,2	335317,4	335346,8 $\cdot 10^{-8}$
J_4	- 333,95	- 310,76	- 297,96	- 251,38 $\cdot 10^{-8}$
J_6	+ 0,94	+ 1,16	+ 1,10	+ 0,76 $\cdot 10^{-8}$
f_4	- 413,77	- 322,48	- 265,82	- 61,31 $\cdot 10^{-8}$
f_6	0,00	- 0,87	- 0,84	- 0 $\cdot 1032^{-8}$
$a \cdot df_4/da$		- 380,97	- 605,21	- 1421,64 $\cdot 10^{-8}$
F	2,847	2,649	2,540	2,143
e_k			196622,3	326598,4 $\cdot 10^{-8}$
ρ_M	5,517	4,463	4,240	0,000
ρ_K	5,517	∞	12,105	7,289
C_M		78670,36	71126,51	0 $\cdot 10^{40}$
C_K		0	10305,69	80761,92 $\cdot 10^{40}$
C	80761,91	78670,36	81432,20	80761,92 $\cdot 10^{40}$

Sphäroid d. größten Konzentration	2. Vertikalreihe		3. Vertikalreihe	
	$J_2 = 42742 \cdot 10^{-8}$ $(C - A) = 103,920$		$J_2 = 4113 \cdot 10^{-8}$ $(C - A) = 10,000 \cdot 10^{40}$	
	D	E	F	G
	$a_k = 0$	4824,339	$a_k = 0$	3019,543 km
e 236822	236874,7	236904,3	178940,3	178944,1 $\cdot 10^{-8}$
J_4 - 174	- 86,68	- 39,15	- 6,30	- 0,36 $\cdot 10^{-8}$
J_6 + 0	+ 0,23	+ 0,05	+ 0,01	+ 0,00 $\cdot 10^{-8}$
f_4 - 841	- 459,56	- 252,64	- 452,36	- 426,29 $\cdot 10^{-8}$
f_6 0	- 1,10	- 0,89	- 1,00	- 0,98 $\cdot 10^{-8}$
$a \cdot df_4/da$	- 1528,09	- 2360,29	- 2570,11	- 2674,06 $\cdot 10^{-8}$
F 9,494	4,745	2,143	37,258	2,143
e_k		186953,5		45890,7 $\cdot 10^{-8}$
ρ_M	2,489	0,000	0,317	0,000
ρ_K	∞	12,730	∞	51,847
C_M	43922,68	0	5591,45	0 $\cdot 10^{40}$
C_K		55637,71		21763,86 $\cdot 10^{40}$
C	43922,68	55637,71	5591,45	21763,86 $\cdot 10^{40}$

Wie schon erwähnt, ist innerhalb jeder Vertikalreihe die Abplattung der Oberfläche nahezu konstant und sehr nahe gleich der Abplattung der zugehörigen einparametrischen Figur $[E, \omega, a, J_2]$. Es ist also auch x in diesen Reihen fast konstant, so daß sie auch in den Fig. 6 u. 7 als Vertikale erscheinen. In diesen Figuren erfüllen die *Wiechert*-Modelle ein begrenztes Flächenstück, dessen unterer Rand von den Niveauflächen der Ellipsoide gebildet wird. Geht man in einer Vertikalreihe nach oben, so wachsen κ und σ gleichmäßig an; die Differenz $(\kappa - \sigma)$ ist ja gemäß (1) konstant. Hingegen nimmt die Differenz $(-\lambda + 231 \eta/80)$ bei konstantem x mit wachsendem x zu. Damit ist das Verhalten der beiden Massefunktionen J_4 und J_6 sowie der beiden Formparameter f_4 und f_6 vollständig beschrieben. Die obere Grenzlinie des Gültigkeitsbereiches ist durch die Figurenreihe $a_k = 0$ repräsentiert. Sie fällt merkwürdigerweise mit der Geraden $(k + \sigma) = 3/2$ zusammen. Gemäß II (21) handelt es sich also um die Gleichgewichtsfiguren, an deren Oberfläche dx/da verschwindet. Rein empirisch erkennt man dies an den Modellen A, D und F , für welche wir der Reihe nach die Summe $(\kappa + \sigma) = 1,4961, 1,4950$ und $1,4988$ finden. In der Reihe $a_k = 0$ nehmen vom Ellipsoid bis zum Massenpunkt $(C - A)$ und C ständig bis auf Null ab. Dasselbe gilt in der unteren Grenzlinie $\rho_M = 0$, hingegen nicht mehr in den Vertikalreihen, wie man deutlich aus unserer ersten Vertikalreihe erkennt, in deren Inneren C irgendwo ein Maximum hat. Nur für bestimmte Figurenreihen darf mithin κ als ein eindeutiges Maß der Massenkonzentration gelten, wie, neben den soeben genannten Beispielen, bei den einparametrischen Gleichgewichtsfiguren. Ein wirklich eindeutiges Maß für die Konzentration ist allein das Trägheitsmoment C . Schließlich sei noch besonders darauf hingewiesen, daß an der Oberfläche der *Wiechert*-Modelle natürlich nicht mehr df_4/da verschwindet, sondern einen negativen Wert besitzt. In den Kurven der äußeren Niveauflächen (Fig. 5)

repräsentiert jeweils der tiefste Punkt eine einparametrische Gleichgewichtsfigur, während höherparametrische Gleichgewichtsfiguren nur im rechten, aufsteigenden Ast liegen können.

Die erste Vertikalreihe gestattet auch einen sehr wichtigen Schluß bezüglich der Massefunktion J_4 . Das wirkliche, mehrparametrische Normalsphäroid muß unbedingt zwischen dem einparametrischen Normalsphäroid und dem *Wiechert*-Modell mit der Kerntiefe 2900 km liegen, und zwar naturgemäß näher dem ersteren Modell. Mithin muß J_4 sicher sehr nahe bei $-3,2 \cdot 10^{-6}$ liegen, ein Resultat, welches auch *Kopal* und *James*²⁹⁾ auf ganz anderem Wege gefunden haben. Es erhebt sich also die Frage, ob der Absolutbetrag von J_4 durch die Massenstörungen in der Erdkruste auf etwa ein Drittel des hydrostatischen Wertes absinken kann, wie man es aus den Bahnstörungen der künstlichen Satelliten abgeleitet hat. Dem widerspricht aber die Tatsache, daß dadurch das Verhältnis F auf ca. 1,2 sinken müßte, während hingegen bei jeder Art von Massenkonzentration nach innen, und zwar gänzlich unabhängig vom Gleichgewicht, F den Minimalwert 15/7 des homogenen Ellipsoides übersteigen muß. Eine zweite wichtige Folgerung können wir für die Massefunktion J_6 ziehen. Diese ist von der Größenordnung $1 \cdot 10^{-8}$ und entzieht sich daher einer empirischen Bestimmung aus den künstlichen Satelliten. Ferner liegen die ungeraden Massefunktionen der wirklichen Erde keineswegs in der Mitte zwischen den beiden benachbarten geraden Massefunktionen, sondern — weil sie nur durch die Massenstörungen in der Kruste bedingt sind — immer nahe der nächstfolgenden geraden Massefunktion. Dies lehrt ja auch der empirische Wert für J_3 . Wir dürfen also schließen, daß die Entwicklungen der Satellitentheorie auf J_2 – J_4 beschränkt werden können.

Wir betrachten noch die lineare Reihe der *Wiechert*-Modelle, die in Näherung 4. O. durch die Fläche $S(a, e, f_4)$ gegeben ist. Diese Reihe ist in den Figuren 6 und 7 durch die Gerade $\kappa = \text{const}$ dargestellt. Sie beginnt in einer Figur $\rho_M = 0$ von maximalem κ oder ω und endet in einer Figur $a_k = 0$ mit minimalem ω . Dabei nimmt der Absolutbetrag des negativen Formparameters $f_6 = -\lambda e^3$ mit der Massenkonzentration monoton zu. Tatsächlich können auch die *Wiechert*-Modelle nicht unmittelbar an die einparametrischen Figuren anschließen. Vielmehr wird mit wachsendem κ der Abstand der Grenzfiguren $a_k = 0$ von den einparametrischen Figuren desselben κ -Wertes immer größer und erreicht in den Punkten N und M in κ und λ den Maximalbetrag: $\Delta\kappa = 0,5417$ und $\Delta\lambda = 1,9$.

3. Die Gesamtheit der Niveausphäroide und der Gültigkeitsbereich der Gleichgewichtsfiguren

Um die Gesamtheit aller Niveausphäroide zu umschreiben, müssen wir den Bereich $0 \leq \kappa \leq 2$ ins Auge fassen. Denn jede rotations- und äquatorsymmetrische Massenordnung ist natürlich auch im Ruhezustand denkbar, während andererseits unsere Entwicklungen sphäroidische Niveauflächen zur Voraussetzung haben, die nur bei langsamen Rotationen möglich sind. Unter dieser Voraussetzung verschwindet J_2 bereits für $\kappa = 2$. Ferner wurde schon festgestellt, daß die Funktion $F = |J_4| : J_2^2$ für die homogenen Ellipsoide ihren Minimalwert $F_{\min} = 15/7$ besitzt, der übrigens gemäß II(4) völlig streng gilt. Bei jeder Massenkonzentration

nach innen steigt also F an. Die Definitionsgleichung für F führt zusammen mit den Gleichungen (54) und (54a) sowie (56) auf die allgemeine Lösung in Näherung 4. O.:

$$\begin{aligned}
 J_4 &= -\frac{1}{9} F(4e^2 - 4e\bar{e} + \bar{e}^2); \\
 3J_2 &= 2e - \bar{e} - \left(2 - \frac{5}{9}F\right)e^2 + \left(2 - \frac{5}{9}F\right)e\bar{e} + \frac{5}{36}F\bar{e}^2; \\
 f_4 &= \left(\frac{7}{2} - \frac{35}{18}F\right)e^2 - \left(\frac{5}{2} - \frac{35}{18}F\right)e\bar{e} - \frac{35}{72}F\bar{e}^2; \quad \dots (11) \\
 a\frac{df_4}{da} &= \left(\frac{70}{9}F - 14\right)e^2 - \left(\frac{70}{9}F - 15\right)e\bar{e} + \left(\frac{35}{18}F - \frac{25}{4}\right)\bar{e}^2,
 \end{aligned}$$

zu der noch in Näherung 6. O. die Relation:

$$\left(f_6 + \frac{231}{80}J_6\right) = \frac{33}{10}e^3 - \frac{11}{4}e^2\bar{e} - \frac{6}{5}ef_4 + \frac{1}{2}\bar{e}f_4 \quad \dots (11a)$$

tritt.

Die Kurven konstanter F -Werte sind die Parabeln:

$$x = \left(\frac{35}{18}F - \frac{7}{2}\right)x - \left(\frac{35}{18}F - \frac{5}{2}\right)x + \frac{35}{72}Fx^2 \quad \dots (12)$$

Ihr Scheitel ist gemäß $dx/dx = 0$ durch

$$x = 2 - \frac{18}{7F}; \quad \kappa = \frac{3}{2} - \frac{45}{14F} \quad \dots (13)$$

bestimmt. Für $F = 15/7$ findet man die Ellipsoidwerte ($x = 0,8; \kappa = 0$), für $F \rightarrow \infty$ die Niveauflächen des Massenpunktes ($x = 2, \kappa = 1,5$).

Für alle Gleichgewichtsfiguren ist $a df_4/da \leq 0$, also gemäß II (13b)

$$\left(15x - 14 - \frac{25}{4}x^2 + 4\sigma\right) \leq 0, \quad \dots (14a)$$

was zusammen mit II (18) auf:

$$\sigma \leq \frac{7}{2} - \frac{15}{4}x + \frac{25}{16}x^2; \quad \kappa \leq -\frac{5}{4}x + \frac{25}{16}x^2 \quad \dots (14b)$$

führt. Sämtliche Gleichgewichtsfiguren liegen demnach in beiden Diagrammen unterhalb der Kurve der einparametrischen Figuren ($a df_4/da = 0$), welche für $\kappa = 1,5$ in den Sphäroiden der größten Massenkonzentration M ($x = 1,4583; F = 9,4939$) endet und darüber hinaus fiktiv bis zum Punkt ($x = 2, \kappa = 3,75, \sigma = 2,25$) fortgesetzt werden kann. Für den F -Wert der einparametrischen Gleichgewichtsfiguren ergibt sich aus

$$a\frac{df_4}{da} = Ae^2; \quad A = \left(\frac{70}{9}F - 14\right) - \left(\frac{70}{9}F - 15\right)x + \left(\frac{35}{18}F - \frac{25}{4}\right)x^2 = 0$$

leicht:

$$x = \frac{\left(\frac{70}{9}F - 15\right) - \sqrt{70F - 125}}{\left(\frac{35}{9}F - \frac{25}{2}\right)} \quad \dots (15)$$

Umgekehrt bestimmt $A = A(F, x)$ in jeder F -Kurve den Verlauf von df_4/da und es folgt aus

$$\frac{dA}{dx} = 0 \quad \text{für: } x_0 = \frac{28F - 54}{14F - 45}, \quad \dots (16)$$

daß im Bereiche $0 \leq x \leq 2$ die Ableitung von f_4 mit wachsender Erhebung stets monoton abnimmt; denn x_0 ist für $15/7 \leq F < 45/14$ negativ, hingegen > 2 für alle $F > \frac{45}{14}$. Mithin gilt auch an der Oberfläche aller höherparametrischen Gleichgewichtsfiguren: $a df_4/da < 0$.

x ist eine wesentlich positive Größe; denn (13) ergibt $x_{min} = 0$. Für ein exaktes Ellipsoid $S(a, e)$ folgt aus (54)

$$F = 36 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}x \right) : (2 - x)^2, \quad \dots (17)$$

also mit $F = 15/7$ für das *MacLaurinsche* Ellipsoid: $x = 4/5$. Hingegen kann das Ellipsoid niemals äußere Niveaufläche einer benachbarten Massenkonfiguration mit etwas anderer Rotationsgeschwindigkeit sein: $\bar{\varepsilon} = \left(\frac{4}{5} + \tau\right)e$. Denn diese Annahme führt auf

$$F = \frac{15}{7} \left(1 - \frac{25}{36}\tau^2 \right), \quad \dots (17a)$$

was in Widerspruch zu $F_{min} = 15/7$ steht. Solange wir uns auf Massenkonzentration nach innen beschränken, kann ein Ellipsoid niemals Niveaufläche einer heterogenen Massenanordnung sein und es kommt ihm gänzlich unabhängig vom Gleichgewicht nur die Rotationsgeschwindigkeit des *MacLaurinschen* Ellipsoides zu. Damit ist aber das allgemeine Niveuellipsoid als Fiktion erkannt.

Allgemein ist in Näherung 4. O.:

$$F = 9 \frac{\frac{4}{5}e^2 - \frac{8}{35}f_4 - \frac{4}{7}e\bar{\varepsilon}}{(2e - \bar{\varepsilon})^2} \quad \dots (18)$$

Ein bestimmtes Niveausphäroid $S(a, e, f_4)$ mit $0 < x < 1,5$ ist zuerst äußere Niveaufläche eines *MacLaurinschen* Ellipsoides von maximaler Rotationsgeschwindigkeit. Setzt man also $F = 15/7$, so wird

$$75\bar{\varepsilon}^2 - 120e\bar{\varepsilon} + 48e^2 + 72f_4 = 0;$$

$$\varepsilon = \frac{4}{5}e \pm \frac{1}{15} \sqrt{-216f_4}$$

Mit dem oberen Vorzeichen ist die maximale Rotationsgeschwindigkeit durch

$$x_{max} = \frac{2}{5} (2 + \sqrt{6\kappa}) \quad \dots (19)$$

definiert. Für das homogene Ellipsoid fällt also tatsächlich der Maximalwert von $\bar{\varepsilon}$ mit dem Minimalwert der Gleichgewichtsfigur zusammen; für die Niveauflächen des Massenpunktes ($\kappa = 1,5$) resultiert $x = 2$. Das untere Vorzeichen liefert $x_{min} \geq 0$, solange $\kappa \leq 2/3$. Im Falle des Gleichheitszeichens haben wir die Niveausphäroide der ruhenden Ellipsoide vor uns.

Die generelle Auflösung von (18) liefert:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2e}{F} \left[\left(F - \frac{9}{7} \right) \pm 3 \sqrt{\left(\frac{3}{7} \right)^2 + \frac{F}{7} \left(\frac{2}{5} x - \frac{3}{5} \right)} \right]$$

Schon Fig. 6 zeigt aus dem Verlauf der F -Kurven deutlich, daß man bei gegebener Fläche $S(a, e, f_4)$ vorerst zu größeren F -Werten gelangt, wenn man auf der Geraden $\kappa = \text{const}$ zu kleineren Werten von x geht, und daß F ein Maximum in der Geraden $(\kappa + \sigma) = 3/2$ erreicht. Tatsächlich findet man durch Differentiation von (18)

$$\frac{dF}{dx} = \frac{36}{35} \frac{1}{(2-x)^3} [4\kappa + 4 - 5x]; \quad x' = \frac{4}{5} (1 + \kappa), \quad \dots (20)$$

was mit der Summe aus

$$(\kappa + \sigma) = \frac{3}{2}; \quad (\kappa - \sigma) = \frac{5}{2} x - \frac{7}{2}$$

übereinstimmt. Es wird

$$F_{max} = \frac{45}{7} (3 - 2\kappa)^{-1} \quad \dots (20a)$$

Beschränken wir uns auf jene Niveausphäroide, in denen $a \cdot df_4/da \leq 0$ ist, so wird das Minimum der Rotationsgeschwindigkeit in der einparametrischen Gleichgewichtsfigur erreicht. Für diese ist gemäß II (23)

$$\frac{25}{16} x^2 - \frac{5}{4} x - \kappa = 0; \quad x_{min} = \frac{2}{5} (1 + \sqrt{1 + 4\kappa}) \quad \dots (21)$$

Für $\kappa = 0$ resultiert das *MacLaurinsche* Ellipsoid, für $\kappa = 1,5$ das einparametrische Sphäroid der größten Massenkonzentration: $x = 1,45830$. Schließlich folgt aus (18) und (21)

$$F_G = \frac{45}{7} \frac{5 + 2\kappa - 2\sqrt{1 + 4\kappa}}{(4 - \sqrt{1 + 4\kappa})^2} \quad \dots (22)$$

Somit gehören im Bereiche der Gleichgewichtsfiguren zu jedem κ drei ausgezeichnete F -Werte: $F_{min} = 15/7$, F_{max} und F_G , denen als Maß der Rotationsgeschwindigkeit die Werte x_{max} , x' und x_{min} koordiniert sind:

κ	F_{max}	F_G	x_{max}	x'	x_{min}
0,0	15/7	15/7	0,80000	0,80000	0,80000
0,5	3,214286	3,169419	1,49282	1,20000	1,09282
1,0	6,428571	5,222813	1,77980	1,60000	1,29443
1,161438	9,493930	6,266702	1,85593	1,72915	1,35043
1,2	10,714286	6,555226	1,87331	1,76000	1,36333
1,3	16,071429	7,386811	1,91714	1,84000	1,39599
1,4	32,142857	8,357114	1,95931	1,92000	1,42762
1,49	321,428570	9,371828	1,99599	1,99200	1,45527
1,5	∞	9,493930	2	2	1,45830

Wieder sieht man klar, daß dem Ellipsoid nur eine einzige Rotationsgeschwindigkeit zugehört. Mit wachsendem κ nimmt der Bereich der möglichen x -Werte ($x_{max} - x_{min}$) allmählich zu und erreicht sein Maximum für $\kappa = 1,5$. Für $\kappa \leq 1,1614$ gehört F_{max} u. a. sowohl zu einer einparametrischen Gleichgewichtsfigur wie auch zu einem *Wiechert*-Modell $a_k = 0$. Jede Figur S mit $\kappa = 1,1614$ ist in Näherung 4. O. äußere Niveaufläche eines einparametrischen Sphäroides der größten Massenkonzentration oder, was dasselbe ist, freie Oberfläche eines bereits fiktiven ($\rho_M = 0$) dreiparametrischen Sphäroides der größten Massenkonzentration.

Jeder Punkt des Abschnittes EM der Parabel $a \cdot df_4/da = 0$ repräsentiert ∞^2 einparametrische Gleichgewichtsfiguren. Ähnlich repräsentiert jeder Punkt der Fläche, die von der Kurve EN der Niveauflächen der Ellipsoide und von der Geraden $(\kappa + \sigma) = 3/2$ begrenzt ist, ∞^2 *Wiechertsche* Modelle. Die zwischen dieser Geraden und der Kurve EM liegende Fläche ist natürlich durch höherparametrische Gleichgewichtsfiguren ausgefüllt. So stellt ja z. B. jede F -Kurve für $15/7 \leq F \leq 9,4939$ Grenzfälle dreiparametrischer Gleichgewichtsfiguren mit der Manteldichte $\rho_M = 0$ dar. Im allgemeinen repräsentiert jeder Punkt des Gültigkeitsbereiches ∞^n n -parametrische Gleichgewichtsfiguren. Es bleibt noch die dritte Grenzlinie des Gültigkeitsbereiches der Gleichgewichtsfiguren zu diskutieren. Sicherlich gilt in ihr $\kappa \leq \frac{3}{2}$, da ja gemäß (20a) mit $\kappa = 1,5$ bereits der gesamte Bereich in F erfaßt ist. Nun stellt die Kurve $F = 9,4939$ zwischen den Punkten M und N sämtliche n -parametrische Sphäroide der größten Massenkonzentration mit ungeradem n dar; denn man kann jeweils den Kern, der selbst ein einparametrisches Sphäroid der größten Massenkonzentration ist, von einer beliebig Anzahl von „Mänteln“ überlagert denken, die im Grenzfall homogen mit der Dichte Null werden. Mit abnehmendem Kernradius muß jede derartige Reihe natürlich für $a_k = 0$ im Punkte N , d. h. in einem der ∞^2 absoluten Sphäroide der größten Massenkonzentration enden.

Andererseits repräsentiert die Gerade EN die *Wiechert*-Modelle $a_k = 0$, an deren Oberfläche κ ein Minimum ist. Sie schneidet die Kurve $F = 9,4939$ im Punkte X , der jede beliebige Fläche $S(a, e, \kappa = 1,161438)$ darstellt, die gleichzeitig ein solches *Wiechert*-Modell von bestimmter Rotationsgeschwindigkeit ($x = 1,72915$) und äußere Niveaufläche eines kleineren einparametrischen Sphäroides der größten Massenkonzentration mit derselben Rotationsgeschwindigkeit ist. Es ist dies ein ganz anderer Fall, als

er in der 2. Vertikalreihe des vorhergehenden Paragraphen vorliegt. Denn dort handelte es sich um Figuren mit den gleichen Daten $[E, \omega, a, J_2]$, für welche mit der Abplattung e auch der x -Wert nahezu konstant ist, also fast um eine Vertikalreihe im Diagramm Fig. 6. Von Interesse ist noch der Vergleich der Massenkonzentration in den zum Punkt X gehörigen Figuren. Die Durchrechnung mit Achse und Abplattung des einparametrischen Normalsphäroides lehrt, daß die Massenkonzentration im *Wiechert*-Modell $a_k = 0$ beträchtlich größer ist als in den entsprechenden dreiparametrischen Sphäroiden der größten Massenkonzentration. Schließlich kann man allgemein die *Wiechert*-Modelle $a_k = 0$ von einer Anzahl von Mänteln der Dichte Null überlagert denken und sie stellen dann die n -parametrischen Sphäroide der größten Massenkonzentration mit geradem n dar, welche bei zunehmendem x -Wert abermals im Punkte N enden. Somit wird der Gültigkeitsbereich der Gleichgewichtsfiguren durch den Parabelbogen MX und durch die Gerade XN abgeschlossen.

Für die Glieder 6. O. hat man gemäß (1) $B = (-\lambda + 231 \eta/80)$. Die Kurve $B = 0$ muß durch den Punkt M gehen, weil dort f_6 und J_6 gleichzeitig verschwinden. Nur ergibt sich das zugehörige $x = (51:35) = 1,45714$ etwas anders als aus der Näherung 4. O. Durch den Punkt N geht wegen $f_6 = -1,9 e^3$ und $J_6 = 0$ die Kurve $B = 1,9$. Die Kurve EM der einparametrischen Gleichgewichtsfiguren liegt gänzlich im Bereich positiver B -Werte; tatsächlich ist in ihr $f_6 = 0$, während J_6 wesentlich positiv ist. Durch jeden Punkt des Diagramms geht eine bestimmte B -Kurve und es gehört ihm eine unendliche Reihe von Wertepaaren f_6 und J_6 zu. Für jedes $B \leq 0$ ist sicherlich f_6 negativ. Da überdies für keine mehrparametrische Gleichgewichtsfigur $\lambda = 0$ sein kann, ist im ganzen Gültigkeitsbereich wesentlich $f_6 \leq 0$.

Wir wenden uns wieder den allgemeinen Niveausphäroiden zu und beginnen mit den äußeren Niveauflächen der homogenen Ellipsoide ($F = 15/7$), für welche (11) liefert:

$$\begin{aligned}
 J_4 &= -\frac{5}{21} (2e - \bar{e})^2 \\
 3J_2 &= 2e - \bar{e} - \frac{17}{21} e^2 + \frac{17}{21} e\bar{e} + \frac{25}{84} \bar{e}^2 \\
 f_4 &= -\frac{2}{3} e^2 + \frac{5}{3} e\bar{e} - \frac{25}{24} \bar{e}^2 \quad \dots (23) \\
 a \frac{df_4}{da} &= \frac{8}{3} e^2 - \frac{5}{3} e\bar{e} - \frac{25}{12} \bar{e}^2
 \end{aligned}$$

Gemäß II (4) ist noch völlig streng

$$G = J_6:J_2^3 = 125:21; \quad J_6 = \frac{125}{21 \cdot 27} (2e - \bar{e})^3, \quad \dots (23a)$$

also:

$$f_6 = -\frac{134}{135} e^3 + \frac{23}{9} e^2 \bar{e} - \frac{125}{72} e \bar{e}^2 + \frac{25}{216} \bar{e}^3. \quad \dots (23b)$$

Für die Niveauflächen der ruhenden Ellipsoide folgt mit $\bar{\varepsilon} = x = 0$:

$$3J_2 = 2e - \frac{17}{21} e^2; \quad J_4 = -\frac{20}{21} e^2; \quad J_6 = +\frac{1000}{567} e^3; \quad \dots \quad (24)$$

$$f_4 = -\frac{2}{3} e^2; \quad f_6 = -\frac{134}{135} e^3; \quad a \frac{df_4}{da} = +\frac{8}{3} e^2$$

Stets ist $x = 2/3$; gleichzeitig nimmt der Formparameter f_4 mit wachsender Erhebung über die Oberfläche ständig zu, was nur möglich ist, wenn die Abplattung immer kleiner wird. Denn der Definitionsbereich der reinen Gravitation erstreckt sich ins Unendliche. Die Niveausphäroide werden mit zunehmendem a immer kugelhähnlicher und für $a \rightarrow \infty$ verschwinden f_4 und f_6 mit e . Für jedes homogene Ellipsoid mit der Oberflächenabplattung e' ist $J_2 = \frac{1}{5} (2e' - e^2)$; für die äußeren

Niveauflächen in der Nähe der Oberfläche gilt demnach $\frac{2}{3} e = \frac{2}{5} e'$, d. h. die Niveausphäroide haben eine kleinere Abplattung und die unterste berührt das Ellipsoid entlang des Äquators.

Ist die Rotationsgeschwindigkeit kleiner als die des entsprechenden *MacLaurin*-schen Ellipsoides, so ist an der Oberfläche zunächst $x < 0,8$ und df_4/da positiv. Ferner ist gemäß II (13a) de/da zuerst negativ, geht mit wachsender Erhebung für $x = 0,8$ durch Null und wird sodann positiv. Die beiden negativen Formparameter wachsen gleichfalls an und erreichen für $x = 0,8$ ihr Maximum Null; denn dort verschwinden ihre Ableitungen nach a . Schließlich resultieren für $x = 2$ die Formparameter des dimensionslosen Ellipsoides: $f_4 = -\frac{3}{2} e^2$; $f_6 = -\frac{19}{10} e^3$. Ist die Rotationsgeschwindigkeit des gegebenen Ellipsoides größer als die des zugehörigen *MacLaurin*-schen Ellipsoides, so hat die unterste der äußeren Niveauflächen eine größere Abplattung als das Ellipsoid; sie berührt das Ellipsoid in den Polen. Sofort ist $x > 0,8$ und sowohl die Abplattung wie auch die Absolutbeträge der beiden Formparameter nehmen mit a ständig zu.

Sämtliche Niveausphäroide der homogenen Ellipsoide sind bei Unterdrückung von f_6 mögliche einparametrische Gleichgewichtsfiguren mit dem durch (21) bestimmten x -Wert, der hier mit x' bezeichnet sei. x und x' seien für einige Werte von x tabuliert:

$x = 0,0$;	$x = 2/3$;	$x' = 1,16594$
0,4	1/6	1,05320
0,8	0	0,8
1,0	1/24	0,83205
1,2	1/6	1,05320
1,6	2/3	1,16594
2,0	3/2	1,45830

Zu jedem x -Wert, der kleiner (größer) als 0,8 ist, gehört eine einparametrische Gleichgewichtsfigur, deren Rotationsgeschwindigkeit größer (kleiner) als die des gegebenen Ellipsoides ist. Zu $x = 0,8$ gehört jedoch ein *MacLaurin*-sches Ellipsoid, dessen

Rotationsgeschwindigkeit dieselbe ist wie die des gegebenen kleineren Ellipsoides. Zu jedem homogenen Ellipsoid einer vorgegebenen Masse mit einer Rotationsgeschwindigkeit: $0 < x < 0,8$ gibt es eine streng ellipsoidische äußere Niveaufläche, die ein *MacLaurinsches* Ellipsoid derselben Rotationsgeschwindigkeit repräsentiert.

Jedes *MacLaurinsche* Ellipsoid ist eine nullparametrische Gleichgewichtsfigur mit streng eindeutigem Dichtegesetz (a, ρ) . Gleichzeitig ist es aber auch äußere Niveaufläche zahlloser Massenordnungen, die aus dem gegebenen Ellipsoid durch Verschiebungen in homogenen konfokalen Ellipsoidschalen hervorgehen. Zu diesen gehört aber auch eine Schar homogener, kleinerer Ellipsoide derselben Rotationsgeschwindigkeit und mit gleichen Massenmomenten K_{2i} , die gemäß (II 4) tatsächlich konfokal sind. Jede einparametrische Gleichgewichtsfigur ist in Näherung 4. O. äußere Niveaufläche einer linearen Reihe kleinerer Gleichgewichtsfiguren, die mit einem Ellipsoid von maximaler Rotationsgeschwindigkeit beginnt. Diese Reihe ist jetzt aber von einer Reihe konfokaler Ellipsoide derselben maximalen Rotationsgeschwindigkeit überlagert, die über das *MacLaurinsche* Ellipsoid hinaus nach unten beliebig fortgesetzt werden kann. Liegt schließlich der x -Wert der gegebenen Gleichgewichtsfigur zwischen 0 und $2/3$ oder gilt $0,8 < x' \leq 1,16594$, so ist sie in Näherung 4. O. auch äußere Niveaufläche einer zweiten Schar konfokaler Ellipsoide mit einer kleineren Rotationsgeschwindigkeit, welche durch das zu ihrem x gehörige x bestimmt ist.

Allgemein erhält man aus (11) im Ruhefalle ($\bar{\varepsilon} = 0$):

$$3J_2 = 2e - \left(2 - \frac{5}{9}F\right)e^2; \quad J_4 = -\frac{4}{9}Fe^2; \quad f_4 = \left(\frac{7}{2} - \frac{35}{18}F\right)e^2; \quad \dots (25)$$

$$a \, df_4/da = \left(\frac{70}{9}F - 14\right)e^2; \quad \left(f_6 + \frac{231}{80}J_6\right) = \left(-\frac{9}{10} + \frac{7}{3}F\right)e^3$$

Abermals ist für die ganze Schar der Niveausphäroide x konstant; erst im Unendlichen verschwinden f_4 und f_6 mit e . Jedoch ist zu beachten, daß mit wachsendem F , also mit zunehmender Massenkonzentration, die Abplattung der Niveausphäroide in der Nähe der Oberfläche ständig absinkt. Im Grenzfall des Massenpunktes verschwindet $\bar{\varepsilon}$ mit e , während unabhängig von ω stets $x = 2$ ist. Bemerkenswert ist noch folgender Umstand. Für ruhende Figuren reduziert sich das Theorem von *Clairaut* in Näherung 2. O. auf

$$e + \beta = \frac{5}{2}\bar{\varepsilon} = 0; \quad \beta = -e. \quad \dots (26a)$$

Es folgt

$$\gamma = \gamma_0 (1 - e \sin^2\varphi); \quad \gamma_0 = \frac{k^2 E}{a^2} (1 + e),$$

also

$$\gamma = \frac{k^2 E}{a^2} (1 + e \cos^2\varphi) \quad \dots (26b)$$

Für den F -Wert der einparametrischen Sphäroide der größten Massenkonzentration $F = 9,4939$ ergibt sich aus (11):

$$\kappa = 14,9604 - 15,9604 x + 4,6151 x^2 \quad \dots (27)$$

Zusammen mit (21) und (13) findet man:

$x = 0$;	$\kappa = 14,9604;$	
1		3,6151	
1,4583		1,5000	$x' = 1,4583$
1,7291		1,1614 (min)	1,3504
2		1,5000	1,4583

Die Diskussion ist analog der der Ellipsoide. Jede Fläche $S(a, e, f_4)$ mit einem $\kappa > 1,5$ ist äußere Niveaufläche zahlloser Massenordnungen des gegebenen F -Wertes mit einer Rotationsgeschwindigkeit, die durch das zum κ gehörige x definiert ist. Niemals aber ist eine solche Fläche Oberfläche oder äußere Niveaufläche einer Gleichgewichtsfigur. Jede Fläche $S(a, e, \kappa = 1,5)$ ist streng ein einparametrisches Sphäroid der größten Massenkonzentration, gleichzeitig aber auch in Näherung 4. O. äußere Niveaufläche einer Schar solcher Massenordnungen ($F = 9,4939$) derselben Rotationsgeschwindigkeit. Überdies ist sie auch äußere Niveaufläche eines Massenpunktes oder ein *Wiechert*-Modell der größten Massenkonzentration, dem die maximale Rotationsgeschwindigkeit zukommt. Liegt schließlich der κ -Wert der gegebenen Fläche zwischen dem Minimum 1,1614 und 1,5, so gehören ihr zwei Scharen von Massenordnungen des gegebenen F -Wertes mit verschiedenem x oder ω an, deren jede auch ein einparametrisches Sphäroid der größten Massenkonzentration enthält. Nebenbei bemerkt, würde den Niveauflächen dieser Sphäroide ($J_6 = 0$) im Ruhefalle gemäß der letzten Gleichung (25) bereits ein positives f_6 entsprechen.

Bedenkt man, daß jede Fläche $S(a, e, f_4)$ selbst wieder unendlich vielen F -Reihen angehört, so erkennt man die ungeheure Mannigfaltigkeit von Massenordnungen, für welche S in Näherung 4. O. gemeinsame äußere Niveaufläche ist. So gehören z. B. zu jeder Fläche mit $\kappa = 1,5$ zahllose Scharen anderer Massenordnungen mit $18/7 < F < \infty$. Mit wachsendem F rücken die beiden x -Werte mit $\kappa = 1,5$ immer enger zusammen und näher an 2 heran. Beginnend mit $F = 18/7$ liegen die Niveauflächen der ruhenden und schwach rotierenden Massenordnungen außerhalb der Hüllfläche der Gleichgewichtsfiguren, wobei jedoch bald die Voraussetzungen der sphäroidischen Theorie überschritten werden.

4. Das Problem der Elemente von Stokes

Das berühmte Theorem von *Stokes* lautet in der *Poincaréschen* Ausdehnung auf rotierende Massen: „Rotiert ein Körper der Gesamtmasse E mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine feste Achse und ist S eine äußere Niveaufläche der Kräftefunktion W , so ist das Potential im Außenraum von S eindeutig bestimmt.“ Man nennt daher E , S und ω die *Stokesschen* Elemente, während alle Bestimmungsstücke des äußeren Feldes Integralinvarianten für zahllose Massenordnungen

sind und daher als *Stokes'sche* Konstanten bezeichnet werden. Die Notwendigkeit der Erhaltung des Schwerpunktes in der Rotationsachse bedingt eine starke Einschränkung der möglichen Massenverschiebungen. Aller Wahrscheinlichkeit nach kommen nur Verschiebungen in homogenen, konzentrischen konfokalen Ellipsoidschalen, speziell natürlich auch Verschiebungen in konzentrischen homogenen Kugelschalen in Frage.

Im Gleichgewichtsfall kann für S die Oberfläche gewählt werden. Die Rotationsgeschwindigkeit wird dabei eine eindeutige Funktion von E und S , welche bequem in die Form II (10) gebracht wird. Für die einparametrischen Gleichgewichtsfiguren konnte sodann (II 62) y als $f(x)$ dargestellt werden, womit die bekannte *MacLaurinsche* Gleichgewichtsbedingung für diesen Fall verallgemeinert war. Für mehrparametrische Gleichgewichtsfiguren würde sich ein Versuch in dieser Richtung nicht lohnen. Mit den Daten $[E, a, e, x]$ würden wir z. B. einen Vertikalschnitt durch das Gebiet der *Wiechert-Modelle* erhalten, in dem sich $y = y(F, x)$ ergibt, was besagt, daß man auf das Dichtegesetz zurückgreifen müßte. Selbstverständlich sind auch bei den Gleichgewichtsfiguren die oben erwähnten Massenverschiebungen möglich; die Oberfläche bleibt dabei Niveaufläche, jedoch geht das Gleichgewicht verloren.

In unserem Diagramm 6 ist der Gültigkeitsbereich der Gleichgewichtsfiguren in dem Viereck: $0,8 \leq x \leq 2$; $0 \leq x \leq 1,5$ eingeschlossen. In Näherung 2. O. ist jedes Niveausphäroid ein Ellipsoid und Minimum und Maximum der möglichen Rotationsgeschwindigkeiten sind durch die homogene Gleichgewichtsfigur und durch den Massenpunkt bestimmt. Mit den Daten

$$E = 5976,318 \cdot 10^{24} \text{ g}; \quad a = 6,37829 \cdot 10^8 \text{ cm}; \quad e = 335296 \cdot 10^{-8} \quad \dots \quad (28)$$

findet man leicht:

$$S(a, e): \quad 4,131523 \cdot 10^{-9} \leq \omega^2 \leq 10,336267 \cdot 10^{-9} \quad \dots \quad (29a)$$

Wählt man zusätzlich den Formparameter $f_4 = -413,77 \cdot 10^{-8}$ des einparametrischen Normalsphäroides, so fällt das Minimum von ω mit der Rotationsgeschwindigkeit der Erde zusammen, während das Maximum durch jenes *MacLaurinsche* Ellipsoid definiert ist, für welches die gegebene Fläche in Näherung 4. O. äußere Niveaufläche ist:

$$S(a, e, f_4): \quad 5,317496 \cdot 10^{-9} \leq \omega^2 \leq 7,211842 \cdot 10^{-9} \quad \dots \quad (29b)$$

Ist unsere Fläche S die freie Oberfläche einer möglichen Gleichgewichtsfigur und beschränken wir uns in den sukzessiven Annäherungen durch eine wachsende Zahl der Formparameter stets auf Gleichgewichtsfiguren, so ist es klar, daß der Gültigkeitsbereich in ω immer weiter eingeengt wird. Dabei bildet ω_{min} eine niemals abnehmende und ω_{max} eine niemals zunehmende Reihe und es existiert ein Grenzwert

$$\lim (\omega^2_{max} - \omega^2_{min}) = 0, \quad \dots \quad (30)$$

nämlich jene Rotationsgeschwindigkeit, für welche S selbst Niveaufläche wird. Tatsächlich gehört wegen der strengen Eindeutigkeit ihres Dichtegesetzes zu allen n -parametrischen Gleichgewichtsfiguren, zu denen auch sämtliche äußeren Niveauflächen aller $(n - 2)$ -parametrischen Gleichgewichtsfiguren zu zählen sind, stets nur

ein einziges System von Massefunktionen J_{2i} und eine bestimmte Rotationsgeschwindigkeit, wie dies aus den *Wavreschen* Schichtungsintegralen abgeleitet werden konnte.

Hier erhebt sich die Frage, ob nicht auch für die Niveausphäroide allgemeiner, rotations- und äquatorsymmetrischer Massenordnungen ein Grenzwert (30) existiert. Wir gehen von dem Gleichungssystem II (54) aus, welches unabhängig vom Gleichgewicht gilt. Bei weiterer Entwicklung liefert jede hinzutretende Kugelfunktion eine Gleichung $(f_{2i} + a J_{2i}) = g(E, S, \omega)$ und es ist ganz im Sinne des Theorems von *Stokes-Poincaré* durch die Elemente E , S und ω das System der Massefunktionen J_{2i} eindeutig bestimmt. Sieht man von den Massenverschiebungen in homogenen, konzentrischen und konfokalen Ellipsoidschalen ab, so ist jede Konfiguration der gegebenen Masse E eindeutig durch das System ihrer Massenmomente K_{2i} gekennzeichnet. Jede derartige Massenordnung hat für verschiedene Werte von ω verschiedene Scharen äußerer Niveauflächen. Dabei steht jedoch der Mannigfaltigkeit (K_{2i}, ω) nur die gleiche Mannigfaltigkeit von Flächen $S(a, e, f_{2i})$ gegenüber; denn die Zahl der Formparameter ist um eins geringer als die Zahl der Massenmomente. Daraus muß man schließen, daß im allgemeinen jeder Fläche S ein unendlicher Wertevorrat in ω zugehört.

Ziehen wir den Gesamtbereich aller Niveausphäroide in Betracht, so sind in Näherung 4. O. für alle Flächen mit $\kappa \leq 2/3$ die Grenzen der Rotationsgeschwindigkeit durch die Parabel $F = 15/7$, also durch

$$x = \frac{2}{5} (2 \pm \sqrt{6\kappa}) \quad \dots (31)$$

bestimmt (vgl. 19). Für größere κ ist die untere Grenze $x = 0$ und für $\kappa = 1,5$ die obere Grenze $x = 2$, während $F \geq 18/7$ gilt. Die Konvergenz erfolgt also bei Berücksichtigung des Bereiches $df_4/da > 0$ wesentlich langsamer.

Obige Frage kann auch so formuliert werden, ob es zu E und S zwei verschiedene Massenordnungen mit den Gravitationspotentialen V_1 und V_2 und mit verschiedener Rotationsgeschwindigkeit gibt:

$$\begin{aligned} V_1 + \frac{1}{2} \omega_1^2 (x^2 + y^2) &= C_1 \\ V_2 + \frac{1}{2} \omega_2^2 (x^2 + y^2) &= C_2 \end{aligned} \quad \dots (32)$$

Es sei $\omega_1 > \omega_2$, also in $\omega_2^2 = \lambda \omega_1^2$ der Faktor $\lambda < 1$. Wird in allen Punkten der ersten Massenkonfiguration die Dichte mit λ multipliziert und gleichzeitig die Rotationsgeschwindigkeit auf ω_2 vermindert, so bleibt S Niveaufläche und es gilt:

$$\lambda V_1 + \frac{1}{2} \omega_2^2 (x^2 + y^2) = \lambda C_1 \quad \dots (32a)$$

Subtrahiert man dies von der zweiten Gleichung (32), so erhält man das Gravitationspotential einer bestimmten Konfiguration der positiven Masse $(1 - \lambda)E$:

$$U = (V_2 - \lambda V_1) = (C_2 - \lambda C_1) = C^*. \quad \dots (33)$$

Die neue Konstante C^* ist positiv; handelt es sich doch um das Potential einer positiven Masse, welches erst im Unendlichen verschwindet. Außerdem hat die neue Massenkongfiguration denselben Schwerpunkt wie die beiden gegebenen Konfigurationen. Gemäß II (9) ist in Näherung 4. O.

$$W_0 = \frac{k^2 E}{a} \left[1 + \frac{1}{3} e + \frac{2}{15} e^2 - \frac{2}{15} f_4 \right] + \frac{1}{3} \omega^2 a^2. \quad \dots (34)$$

Demnach ist $C_1 > C_2$ und: $\lambda C_1 < C_2 < C_1$. Für $\lambda = 1$ bedeutet dies $C_2 = C_1$, womit ein sehr einfacher Beweis des Satzes von *Stokes-Poincaré* gefunden ist. Hingegen ist ein Widerspruch in der Annahme $\lambda < 1$ auch auf diesem Wege nicht zu finden.

Streng theoretisch ist jede Gleichgewichtsfigur durch $[E, S]$ eindeutig bestimmt. Aber praktisch kommt man schon bei den einparametrischen Figuren damit schlecht durch, weil man den kleinen Formparameter f_4 als Bestimmungsstück vermeiden wird. Hier liegt ja ω in Form der Gleichgewichtsbedingung $\omega(E, S)$ vor. Bei den *Wiechert*-Modellen ist die Bestimmung aus $[E, S]$ wegen der Kleinheit von f_6 bereits unmöglich. Entweder muß ω direkt gegeben sein oder aber das Dichtegesetz vorliegen: $[E, a, a_k, \rho_M, \rho_K]$; denn dann kann ω aus dem Kern berechnet werden, der ja ein *MacLaurinsches* Ellipsoid ist.

5. Zur Kritik des allgemeinen Niveuellipsoides

Wir nehmen eine bestimmte Konfiguration der gegebenen Masse E an, welche mit bestimmter Rotationsgeschwindigkeit um eine feste Achse rotiert und setzen voraus, daß die Oberfläche der Masse eine Niveaulfläche ist. Dann nennt man die Bestimmung des Schwerpotentials nach *Pizzetti* das „Problem von *Stokes*“. Die klassische Lösung dieses schwierigen Problems zeigt, daß für jeden Körper, dessen Oberfläche S eine Niveaulfläche ist, das Schwerefeld aus der Anziehung der Gesamtmasse E , die homogen im Innern von S verteilt ist, aus der Fliehkraft und aus der Anziehung einer über die Oberfläche ausgebreiteten Schicht, welche den Effekt der Inhomogenität repräsentiert und in ihrer Summe verschwindet, dargestellt werden kann. Es handelt sich also um eine Anwendung des Äquivalenzprinzips der Potentialtheorie, welche auch physikalisch voll gerechtfertigt ist, sobald die Voraussetzungen zutreffen.

Bei der speziellen Lösung des *Stokes*schen Problems für das Rotationsellipsoid nach *Pizzetti*³⁰⁾ und *Somigliana*³¹⁾ geht man jedoch nicht von einer gegebenen Massenordnung aus, sondern wählt neben E und ω frei die Fläche S , welche somit als allgemeines „Niveuellipsoid“ fingiert wird. Einen anderen Weg hat *W. D. Lambert*³²⁾ eingeschlagen. Das homogene Ellipsoid $[a, e, \omega]$ hat eine zu große Masse, welche durch eine Flächenbelegung von hoher negativer Dichte herabgedrückt wird. Am einfachsten gewinnt man das Niveuellipsoid als Lösung des *Helmert*-Systems mit den Daten $[E, \omega, a, e, f_4 = 0]$. Hier erkennt man die Fiktion an der unberechtigten Wahl der freien Parameter. Die willkürliche Annahme $f_4 = 0$ erfordert logischerweise auch die Vernachlässigung aller übrigen Parameter 4. O. Dann aber sinkt man auf die Näherung 2. O. zurück, welche jedoch für das Problem

der Erdfigur nicht genügt. Somit ist das allgemeine Niveuellipsoid in den Größen 4. O. fiktiv und dasselbe gilt für die internationale Schwereformel. So fand *Uotila*³³⁾ empirisch für die Schwereabplattung an Stelle des internationalen Wertes $\beta = 52884 \cdot 10^{-7}$ den Wert $\beta = 53016 \cdot 10^{-7}$, welcher der einparametrischen Lösung II (48) recht nahe kommt. Jedoch darf nicht übersehen werden, daß der Unterschied vorwiegend durch die Verkleinerung der Abplattung bedingt ist, die nach dem *Clairautschen* Theorem eine Vergrößerung der Schwereabplattung bedingt.

Entnimmt man die oben angeführten Daten zur Lösung des *Helmert-Systems* dem einparametrischen Normalsphäroid, so findet man

$$\gamma = 978,037 (1 + 530254 \cdot 10^{-8} \sin^2\varphi - 585 \cdot 10^{-8} \sin^2 2\varphi) \text{ gal} \quad \dots (35)$$

und erhält dafür aus dem Vergleich mit der vom Normalsphäroid auf das achsen- gleiche mittlere Erdellipsoid übertragenen Schwereformel II (50a) die Korrektur:

$$\Delta\gamma = 978,037 (+ 125 \cdot 10^{-8} \sin^2\varphi - 532 \cdot 10^{-8} \cdot \sin^2 2\varphi) \text{ gal} = (+ 1,2 \sin^2\varphi - 5,2 \sin^2\varphi) \text{ mgal.} \quad \dots (36)$$

Solange man nur das geometrische Ziel im Auge hat, die Radionektoren der Geoidpunkte zu bestimmen, ist es an sich ziemlich belanglos, welches Vergleichssystem man zugrundelegt. Zerlegt man z. B. das Potential des tatsächlichen Erdkörpers W durch beliebige Abspaltung einiger Kugelfunktionen in $W = U + T$, so ist das Potential $U = W_0$ des so definierten Niveausphäroides natürlich eine physikalische Fiktion. In diesem Falle kann man aber trotzdem den Schwerestörungen ($g - \gamma$) und den Geoidhöhen $N = T/\gamma$ einen gewissen physikalischen Sinn zubilligen. Dies gilt jedoch nicht mehr für das fiktive Niveuellipsoid, dem gleichfalls keine physikalisch mögliche Massenordnung entspricht; sowohl die Schwerestörungen wie die Lotabweichungen und die Geoidhöhen werden rein formale Größen. Benützt man jedoch das Normalsphäroid der Erde als Bezugskörper, so haben die genannten Größen einen klaren physikalischen Sinn als Funktionen der Massestörungen in der Erdkruste und besonders die Geoidhöhen gehen in die eindeutig definierten, absoluten Geoidundulationen über.

IV. Das mehrparametrische Normalsphäroid der Erde

Erfahrungsgemäß ist der Erdkörper nahezu im hydrostatischen Gleichgewicht. Andererseits aber hat die seismische Forschung erwiesen, daß auch abgesehen von der Luft- und Wasserhülle die Erde unmöglich eine einparametrische Gleichgewichtsfigur mit stetigem Dichtegesetz sein kann. An der Trennungsfläche von Mantel und Kern, in einer Tiefe von fast genau 2900 km, liegt ein Dichtesprung von 3 bis 4 Einheiten vor. Die oberste durchlaufende Diskontinuitätsfläche der Dichte, die in variabler Tiefe verlaufende *Mohorovičić-Fläche*, weist einen Dichtesprung von etwa 0,6 auf; sie wird gewöhnlich als Trennungsfläche von Mantel und Kruste aufgefaßt, welche beim Normalsphäroid eine Niveaufläche in einer Tiefe von etwa 30–33 km darstellt. Wegen der Massenunregelmäßigkeiten in der Erdkruste hat die Potentialentwicklung $W = U + T$ sicher eine Restfunktion und der mit den tatsächlichen Massefunktionen der Erde gebildete Ausdruck II (1) repräsentiert daher keine Gleich-

gewichtsfür. Durch eine exakte „Regularisierung“ der Erdkruste, worunter wir die Herstellung des hydrostatischen Gleichgewichtes verstehen wollen, kann aber die Restfunktion zum Verschwinden gebracht werden. Legen wir die Vorstellung der *Airy*schen Isostasie zugrunde, so ist die Basis der mächtigsten Sialscholle die Ausgleichsfläche des Druckes. Dann hebt man alle Massen oberhalb dieser Ausgleichsfläche ab und kann mit einem Teil davon den Mantel bis zur Oberfläche gemäß seinem als bekannt angenommenen stetigen Dichtegesetz der Form II (42) wieder aufbauen. Mit dem Rest des festen Materiales bildet man die feste Kruste abermals nach einem derartigen stetigen Dichtegesetz und gießt darüber das Meer als homogene Wasserhülle aus. Auch die Oberfläche der festen Kruste oder der Meeresboden ist natürlich eine Niveaufläche. Die gesamte Hülle besteht somit aus einem homogenen Weltozean und einer einparametrischen festen Kruste und hat dementsprechend ein Dichtegesetz mit fünf Konstanten.

Zunächst erhebt sich eine Schwierigkeit aus dem Umstand, daß das Volumen des Erdkörpers wegen der Existenz der Kontinente größer ist als das Volumen des Geoides. In der *Preys*chen Entwicklung der Höhen- und Tiefenverhältnisse der Erde³⁴⁾ ergab sich als mittlere Tiefe der Lithosphäre $L_0 = -2456$ m, als mittlere Tiefe der Hydrosphäre hingegen $H_0 = -2681$ m, so daß eine mittlere Kontinentalhöhe von 225 m resultiert, bezogen auf die ganze Oberfläche der Erdkugel. Im nichtisostatischen Falle müßte also nach der Regularisierung die Oberfläche der festen Kruste 2456 m unter dem Geoid und die Oberfläche des Weltmeeres 225 m über dem Geoid liegen. Bei idealer Isostasie müßte demgegenüber die Normalerde mit dem Geoid volumgleich sein und der Ozeanboden in einer Tiefe von 2681 m liegen. In den folgenden Rechnungen wurde ein Mittelweg gewählt. Wegen des leichteren Vergleiches mit der einparametrischen Normalerde wurde das Volumen des Geoides und gleichzeitig die mittlere Tiefe der Lithosphäre beibehalten, was allerdings zur Folge hat, daß die Masse des Wassers und sein Trägheitsmoment C_w um ungefähr 9% verringert sind. Somit liegen von den fünf Konstanten des Dichtegesetzes bereits drei fest, nämlich der Äquatorradius des Normalsphäroides $a = 6378,290$ km, der Äquatorradius der Lithosphäre $a' = 6375,834$ km und die Dichte des Ozeanwassers $\rho_w = 1,028$. Dann aber ist es nicht mehr schwer, sinngemäß über die beiden letzten freien Parameter zu verfügen. Das mehrparametrische Normalsphäroid soll ebenso wie das frühere einparametrische Normalsphäroid mit der wirklichen Erde die Daten (E, ω, a, J_2) gemeinsam haben. Demzufolge werden sich die *Stokes*schen Konstanten nur geringfügig von den entsprechenden Werten des einparametrischen Modelles unterscheiden und dasselbe gilt für Abplattung der Oberfläche. Könnte man schließlich noch für die Normalfigur des Hauptträgheitsmoment C der wirklichen Erde fordern, so wäre damit dem mechanischen Grundsatz der Erhaltung des Drehimpulses ωC des in sich geschlossenen Massensystems der Erde Genüge getan. Das so definierte Normalsphäroid darf aber nicht als eine frühere Entwicklungsstufe der Erde gedeutet werden; denn es ist sicher, daß sich im Laufe der Entwicklungsgeschichte der Erde auch die Rotationsgeschwindigkeit geändert hat. Kurz gesagt könnte die Regularisierung z. B. so erfolgen, daß die Differenz der beiden äquatorialen Trägheitsmomente $(B-A)$ verschwindet, jedoch C und $(A+B)/2$ erhalten bleiben.

Offensichtlich sind diese Forderungen eine zweckentsprechende Vervollständigung des isostatischen Konzeptes. Das Normalsphäroid hat dieselbe statische Abplattung wie die wirkliche Erde, während sich die Massefunktion $|J_4|$ kaum um eine Einheit der siebenten Dezimale ändern kann, wie die Diskussion der *Wiechert-Modelle* gelehrt hat. Überdies hat $|J_4|$ sehr nahe beim Normalsphäroid ein Minimum — vgl. Seite 81. Die statische Abplattung liefert zusammen mit der dynamischen Abplattung II (49) das Trägheitsmoment $C = 80473 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2$. Damit kann ein zweiparametrisches Modell des Normalsphäroides berechnet werden, das selbstverständlich zwischen den beiden Figuren *A* und *B* der ersten Vertikalreihe auf Seite 89 liegen muß. Da diese Lösung praktisch bedeutungslos ist, weil dabei wie im einparametrischen Falle Wasserhülle und Kruste ignoriert werden, sei nur erwähnt, daß sich eine Manteldichte von etwa 4,4 und ein Dichtesprung von rund 18 Einheiten an der Kernoberfläche ergibt, deren Radius bei 2500 km liegt. Bei der notwendigen Massenkonzentration im Mantel und Kern, also beim Übergang zu einem vierparametrischen Modell, muß sich zwecks Erhaltung des Trägheitsmomentes C der Kern gewaltig ausdehnen, was gleichzeitig mit einer starken Verminderung des Dichtesprunges an der Kernoberfläche verbunden ist.

1. Ein dreiparametrisches Modell des Normalsphäroides³⁵⁾

Ein gewisses theoretisches Interesse verdient ein dreiparametrisches Modell des Normalsphäroides, bestehend aus einem homogenen Weltmeer und einer einparametrischen Festerde. Dieses Modell hat also ein Dichtegesetz mit fünf Konstanten und ist durch $[E, \omega, a, J_2, a', \rho_w]$ eindeutig bestimmt, wobei natürlich die ersten vier Daten dem einparametrischen Normalsphäroid II (48) entnommen werden. Mit beginnender und allmählich anwachsender Ozeantiefe und mit entsprechend abnehmendem Äquatorradius a' der Lithosphäre erhält man eine lineare Reihe derartiger Modelle, die vom einparametrischen Normalsphäroid ausgeht. Infolge der relativ geringen Tiefe des Ozeans dürfen wir in der ganzen Reihe die Oberflächenabplattung $e = 335289 \cdot 10^{-8}$ beibehalten.

Nimmt man die Abplattung der oben definierten Lithosphäre vorweg: $e' = 335213 \cdot 10^{-8}$, so findet man für die Volumina der Gesamterde (V) und der Festerde (V'): $1083,285$, resp. $1082,035 \cdot 10^{24} \text{ cm}^3$ und damit für die Masse des Ozeans und der Festerde:

$$O = \rho_w (V - V') = 1,285 \cdot 10^{24} \text{ g}; \quad E' = E - O = 5975,033 \cdot 10^{24} \text{ g} \quad \dots (1)$$

Damit resultiert für die Trägheitsmomente des homogenen Ozeans:

$$C_0 = \frac{2}{5} \rho_w (Va^2 - V'a'^2) = C_1 - C_2 = 34,850 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2 \quad \dots (2)$$

$$(C - A)_0 = C_1 \left(e - \frac{1}{2} e^2 \right) - C_2 \left(e' - \frac{1}{2} e'^2 \right) = 0,129 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2$$

Wird der Ozean abgehoben, so verbleibt für die einparametrische Festerde

$$\begin{aligned} E' &= 5975,033 \cdot 10^{24} \text{ g}; \quad \omega^2 = 5,317496 \cdot 10^{-9} \text{ sec}^{-2} \\ a' &= 6,375834 \cdot 10^8 \text{ cm}; \quad (C - A)' = 263,207 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2 \quad \dots (3) \\ &\text{oder } J_2 = 108364 \cdot 10^{-8} \end{aligned}$$

Es folgt $\bar{e}' = 345821 \cdot 10^{-8}$ und aus der dritten Gleichung II (23) tatsächlich $e' = 335213 \cdot 10^{-8}$. Durch Rückgang auf das homogene Ausgangsellipsoid der zugehörigen Reihe (ω, K_2) findet man $C' = 80730,226 \cdot 10^{40}$ und nach Addition von C_0 das Trägheitsmoment des dreiparametrischen Modelles $C_3 = 80765,076 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2$, das merkwürdigerweise etwas größer ist als das Hauptträgheitsmoment des einparametrischen Normalsphäroides, was sich aus einer geringeren Massenkonzentration in der Festerde erklärt, wie durch Berechnung des Dichtegesetzes bewiesen werden kann.

Nunmehr nehmen wir an, die Erde wäre tatsächlich eine dreiparametrische Gleichgewichtsfigur, es gäbe aber keine Echolotungen und wir hätten keine Kenntnis der mittleren Meerestiefe. Aus den allein gegebenen Daten [$E, \omega, a, J_2, \rho_w$] könnten wir eine Reihe von Lösungen mit den mittleren Meerestiefen $T = 1, 2, 3, 4, \dots$ km und den zugehörigen Äquatorradien $a' = (a - T)$ gewinnen und für jede das Trägheitsmoment C_3 und die dynamische Abplattung H_3 berechnen. Lineare Interpolation mit den Werten C und H der wirklichen Erde würde die gesuchte mittlere Meerestiefe liefern. Man könnte aber auch für jeden der äquidistanten Werte von T den Einfluß des Ozeans vom empirisch gegebenen J_2 und H abziehen und sodann die einparametrische Festerde aus [E', a', J_2', H'] berechnen. Jede dieser Figuren hätte eine andere Rotationsgeschwindigkeit und man könnte durch Interpolation mit der tatsächlichen Rotationsgeschwindigkeit abermals T bestimmen. Diese theoretisch sehr interessante Möglichkeit scheidet jedoch an dem Umstand, daß das dreiparametrische Modell ebenso unzutreffend ist wie das einparametrische.

2. Das sechsexparametrische Modell des Normalsphäroides³⁶⁾

α) Die allgemeine Lösung

Das nächste Modell ist bereits sechsexparametrisch; unter Ignorierung der Kruste besteht es aus dem homogenen Weltozean, einem heterogenen Mantel und einem heterogenen Kern. Das Dichtegesetz umfaßt $2 + 3 + 3 = 8$ Konstanten. Zur leichteren Bewältigung heben wir den gegebenen Ozean ab, so daß nach dieser Entblätterung eine zweiteilige, vierparametrische Festerde bleibt, für welche folgende Daten vorliegen:

$$\begin{aligned} E &= 5975,033 \cdot 10^{24} \text{ g}; \omega^2 = 5,317496 \cdot 10^{-9} \text{ sec}^{-2}; \\ a &= 6,375834 \cdot 10^8 \text{ cm}; a' = 3,47829 \cdot 10^8 \text{ cm}; J_2 = \dots \quad (4) \\ &108369 \cdot 10^{-8} \text{ oder } (C - A) = 263,220 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2 *). \end{aligned}$$

Hierin bedeutet jetzt a' den Äquatroradius des Kernes, dessen Oberfläche genau 2900 km unter dem Geoid liegen soll: $a' = (6378,29 - 2900) = 3478,29$ km. Mit (4) ist $\bar{e} = 345821 \cdot 10^{-8}$ gegeben.

Diese Daten reichen zur eindeutigen Berechnung zweier Grenzlösungen aus, nämlich der einparametrischen Festerde [E, ω, a, J_2] und eines *Wiechert*-Modelles.

*) Infolge eines kleinen Rechenfehlers etwas verfälscht.

Für die einparametrische Festerde, bei welcher die Kernoberfläche ihren Sinn verliert, weil kein Wechsel des Dichtegesetzes eintritt, wird in Näherung 4. O.:

$$\begin{aligned} e &= 335219 \cdot 10^{-2}; x = 1,03162; f_4 = -419 \cdot 10^{-8}; \\ \chi &= 0,37336; J_4 = -332 \cdot 10^{-8}; \xi = 0,29584; F = 2,827 \quad \dots (5) \end{aligned}$$

Für das Wiechert-Modell ergibt sich zunächst unter Beibehaltung der Abplattung (5):

$$\begin{aligned} E_1 &= 4595,816 \cdot 10^{24} \text{ g}; E_2 = 1379,217 \cdot 10^{24} \text{ g}; e_k = 196908 \cdot 10^{-8} \\ E_k &= 2126,442 \cdot 10^{24} \text{ g}; J_4 = -298 \cdot 10^{-8}; J_6 = +1,11 \cdot 10^{-8} \quad \dots (6) \\ \xi &= 0,26522; f_4 = -269 \cdot 10^{-8}; \chi = 0,23949; f_6 = -0,83 \cdot 10^{-8}. \\ F &= 2,538 \end{aligned}$$

Damit liefert jetzt die erste Gleichung II (54) ohne die Glieder 6.O. in zweiter Approximation $e = 335242 \cdot 10^{-8}$ und man sieht, daß eine Wiederholung der Rechnung mit dieser verbesserten Abplattung nicht nötig ist.

Zur allgemeinen Auflösung fehlen in (4) noch zwei Bestimmungsstücke. Die Daten (4) lassen ∞^2 Lösungen zu, die sich im Diagramm 6 in die kurze Vertikalreihe $x = 1,03162$ zwischen $0,23949 \leq x \leq 0,37336$ oder $2,538 \leq F \leq 2,827$ abbilden. In den übrigen Größen erhalten wir folgende Spannungen: $\Delta e = +23 \cdot 10^{-8}$; $\Delta J_4 = +34 \cdot 10^{-8}$; $\Delta f_4 = +150 \cdot 10^{-8}$. Diese geringen Streuungen legen es nahe, den Mittelwert der Oberflächenabplattung $e = 335230 \cdot 10^{-8}$ als konstant einzuführen, wodurch eine zweite Approximation entfällt und sogar die Berechnung der Formparameter und der Massefunktionen J_4 und J_6 überflüssig wird, falls man sich auf das Dichtegesetz und die Trägheitsmomente beschränken will. An Stelle der fehlenden Bestimmungsstücke wählen wir als zusätzliche freie Parameter wie bei der Berechnung der *Wiechert-Modelle* eine Teilmasse E_1 zum Aufbau der fiktiven Mantelfigur sowie die Oberflächendichte ρ_0 . Aus $[E_1, a, e, \rho_0]$ kann eine einparametrische Gleichgewichtsfigur berechnet werden, welche dasselbe Dichtegesetz wie der Mantel besitzt, aber eine andere Abplattungsfunktion und eine andere Rotationsgeschwindigkeit hat. Aus E_1 und dem Volumen der Festerde resultiert sofort die mittlere Dichte der Mantelfigur:

$$\rho_m = E_1 : 1082,035 \cdot 10^{24}. \quad \dots (a)$$

Sodann folgen die beiden spezifischen Konstanten des Dichtegesetzes aus:

$$\rho_0 = \rho_{max} (1 - \nu)^2; 0,9998 \rho_m = \rho_{max} \left(1 - \frac{6}{5} \nu + \frac{3}{7} \nu^2 \right) \quad \dots (b)$$

Mit der Wahl eines Näherungswertes $e_h < e$ für die Abplattung des homogenen Ausgangsellipsoides der zugehörigen Reihe $(\omega_1, C_1) \equiv (\omega_1, K_{2,1})$ findet man das Trägheitsmoment C_1 und die Äquatorachse a_h dieses Ellipsoides gemäß II (29), (36) und (36a) aus:

$$C_1 = \frac{2}{5} E_1 a^2 \frac{1 - e_h}{1 - e} \frac{\rho_{max}}{\rho_m} \left(1 - \frac{10}{7} \nu + \frac{5}{9} \nu^2 \right) = \frac{2}{5} E_1 a_h^2 \quad \dots (c)$$

Anschließend liefern die beiden Gleichungen

$$\omega_1^2 = \frac{k^2 E_1}{a_h^3} \left(\frac{4}{5} e_h + \frac{22}{35} e_h^2 \right); K_{2,1} = \frac{2}{5} a_h^2 \left(e_h - \frac{1}{2} e_h^2 \right) \quad \dots (d)$$

ω_1 und $K_{2,1}$. Mit diesen Werten gehen wir zur Mantelfigur zurück und sollten aus den Gleichungen

$$J_2 = (K_{2,1} : a^2); \bar{\varepsilon} = (\omega_1^2 a^3 : k^2 E_1);$$

$$2e = \left(3 J_2 + \bar{\varepsilon} - \frac{25}{56} \bar{\varepsilon}^2 \right) + e^2 - \frac{13}{14} e \bar{\varepsilon} \quad \dots (e)$$

wieder die gegebene Abplattung erhalten, was erst bei sukzessiver Approximation eintreten wird. Bei der Wiederholung kann bereits in (b) der Koeffizient 0,9998 durch die bessere Näherung $[1 - 2(e - e_h)]$ ersetzt werden.

Die Methode der Entblätterung führt sodann zur Teilmasse E_1' von E_1 , welche im Kern liegt, zu

$$v' = v \left(\frac{a'}{a} \right)^2 = 0,297617 v, \quad \dots (f)$$

zur Dichte des Mantels an der Kernoberfläche

$$\rho_{ko} = \rho_{max} (1 - v')^2 \quad \dots (g)$$

und zur mittleren Dichte

$$\rho_m' = \rho_{max} \left(1 - \frac{6}{5} v' + \frac{3}{7} v'^2 \right) \frac{1 - \bar{\varepsilon}_2'}{1 - e'}, \quad \dots (h)$$

worin vorerst der letzte Faktor unterdrückt oder geschätzt wird. Jetzt kann mit einem Näherungswert e' für die Abplattung der Mantelfigur an der Kernoberfläche die Teilmasse E_1' berechnet werden:

$$E_1' = \frac{\rho_m'}{\rho_m} \left(\frac{a'}{a} \right)^3 \frac{1 - e'}{1 - e} E_1 \sim 0,162363 \frac{\rho_m'}{\rho_m} \frac{1 - e'}{1 - e} E_1 \quad \dots (i)$$

worauf mit einer Näherungsannahme für die Abplattung e_h' des homogenen Ausgangselliipsoides der zugehörigen Reihe (ω_1, C_1') dessen Achse a_h' folgt:

$$\left(\frac{a_h'}{a'} \right)^2 = \frac{1 - e_h'}{1 - e'} \frac{\rho_{max}}{\rho_m'} \left(1 - \frac{10}{7} v' + \frac{5}{9} v'^2 \right) \quad \dots (j)$$

Anschließend liefert

$$\bar{\varepsilon}_h' = \frac{\omega_1^2 a_h'^3}{k^2 E_1'} = \frac{4}{5} e_h' + \frac{22}{35} e_h'^2 \quad \dots (k)$$

einen verbesserten Wert für e_h' , mit welchem

$$K_{2,1}' = \frac{2}{5} a_h'^2 \left(e_h' - \frac{1}{2} e_h'^2 \right) \quad \dots (l)$$

berechnet wird. Schließlich resultiert mit

$$(K_{2,1}' : a'^2) \text{ und } \bar{\varepsilon}_1' = \frac{\omega_1^2 a'^3}{k^2 E_1'} \quad \dots (m)$$

und mit der letzten Gleichung (e) eine zweite Näherung für e' . Mit den neuen Werten e_h' und e' wird die Rechnung ab (i) wiederholt, worauf C_1' gewonnen wird:

$$C_1' = \frac{2}{5} E_1' a_h'^2. \quad \dots (n)$$

Dabei fällt ein Fehler in der mittleren Dichte ρ_m' exakt aus, wie man aus der Verbindung von (n) mit (j) und (i) erkennt:

$$C_1' = \frac{8}{15} \pi a'^5 \rho_{max} \left(1 - \frac{10}{7} v' + \frac{5}{9} v'^2 \right) (1 - e_h') \quad \dots (n')$$

Nunmehr haben wir den Fehler abzuschätzen, der aus der Tatsache resultiert, daß die berechnete einparametrische Mantelfigur eine andere Abplattungsfunktion als der wirkliche Mantel hat. Die Abplattungsdifferenz verschwindet an der Oberfläche und erreicht an der Kernoberfläche den Maximalbetrag $14 \cdot 10^{-4}$, wie das *Wiechert-Modell* lehrt. Schreiben wir für das Trägheitsmoment C_1 der Masse E_1 gemäß II (29) und (42):

$$C_1 = 2 E a \frac{1 - \bar{e}_4}{1 - e} \frac{\rho_{max}}{\rho_m} \int_0^a \left(\frac{x}{a} \right)^4 \left[1 - v \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^2 dx, \quad \dots (7)$$

so erkennen wir, daß sich der Mittelwert \bar{e}_4 der Abplattung nicht viel von dem Wert e_h der einparametrischen Mantelfigur unterscheiden kann, d. h. von der Abplattung des homogenen Ausgangsellipsoides der Figurenreihe (ω_1, C_1). Die Differenz kann näherungsweise aus dem Verhältnis

$$(e - e_h) : (e_h - \bar{e}_4) = (e - e') : (e' - e_k) \quad \dots (8)$$

abgeleitet werden, in welchem e_k die Abplattung der wirklichen Kernoberfläche bedeutet. Die Differenz kann $3 \cdot 10^{-5}$ übersteigen und darf nicht vernachlässigt werden. Die dadurch bedingte Verfälschung von C_1 um etwa $0,030/00$ oder $3 \cdot 10^{40} g \text{ cm}^2$ scheint zwar tragbar zu sein, aber die aus (d) gewonnene Differenz der Trägheitsmomente, die korrekt durch

$$(C - A)_1 = C_1 \left(\bar{e}_4 - \frac{1}{2} \bar{e}_4^2 \right) \quad \dots (9)$$

gegeben ist, enthält beinahe denselben Fehler, jedoch mit entgegengesetztem Vorzeichen. Der Fehler von (d) kann bereits bis zu 1% betragen. Damit erkennt man klar die Bedeutung der fiktiven Mantelfigur; sie dient als Grundlage für die Bestimmung des Durchschnittswertes \bar{e}_4 der inneren Abplattung, welche sonst ohne die Kenntnis der Abplattungsfunktion nicht mit der nötigen Sicherheit bestimmt werden könnte.

Ganz ähnlich muß für die Korrektur des Trägheitsmomentes C_1' die Abplattung e_h' durch den neuen Mittelwert \bar{e}_4' ersetzt werden:

$$(e - e_h') : (e_h' - \bar{e}_4') = (e - e') : (e' - e_k). \quad \dots (8a)$$

Damit geht (n') über in:

$$C_1' = \frac{8}{15} \pi a'^5 \rho_{max} \left(1 - \frac{10}{7} v' + \frac{5}{9} v'^2 \right) (1 - \bar{e}_4') \quad \dots (n'')$$

Für die Teilmasse E_1' innerhalb des Kernes und ihre mittlere Dichte ρ_m' folgen die verbesserten Werte:

$$\rho_m'' = \rho_{max} \left(1 - \frac{6}{5} v' + \frac{3}{7} v'^2 \right) \frac{1 - \bar{e}_2''}{1 - e_k}, \quad \dots \text{(h')}$$

$$E_1'' = \frac{\rho_m''}{\rho_m} \left(\frac{a'}{a} \right)^3 \frac{1 - e_k}{1 - e} E_1,$$

also:

$$E_1'' = E_1' (1 - \bar{e}_2'' + \bar{e}_2'), \quad \dots \text{(i')}$$

worin man noch die bereits als berechtigt erkannte interpolatorische Annahme $(e - \bar{e}_2) = 2(e - e_h)$ verwenden kann.

Wir setzen den Berechnungsgang fort. Man wählt eine Näherung für e_k , bestimmt aus (8) den Durchschnittswert \bar{e}_4 und findet gemäß (c) das verbesserte Trägheitsmoment C_1 :

$$C_1^{(r)} = C_1 \frac{1 - \bar{e}_4}{1 - e_h} \quad \dots \text{(c')}$$

und weiters

$$(C - A)_1^{(r)} = C_1^{(r)} \left[\bar{e}_4 - \frac{1}{2} \bar{e}_4^2 \right] \quad \dots \text{(d')}$$

(8a) liefert den Durchschnittswert \bar{e}_4' , womit aus (n) das korrigierte Trägheitsmoment

$$C_1'^{(r)} = C_1' \frac{1 - \bar{e}_4'}{1 - e_h'} \quad \dots \text{(o)}$$

und

$$(C - A)_1'^{(r)} = C_1'^{(r)} \left[\bar{e}_4' - \frac{1}{2} \bar{e}_4'^2 \right] \quad \dots \text{(p)}$$

folgen. Lassen wir den Index (r) weg, so gilt für die Differenz der Trägheitsmomente von Mantel und Kern:

$$(C - A)_M = (C - A)_1 - (C - A)_1' \\ (C - A)_K = (C - A) - (C - A)_M = 263,220 \cdot 10^{40} - (C - A)_M \quad \dots \text{(q)}$$

Nach Berechnung von E_1'' hat man für die Massenanteile von Mantel und Kern:

$$E_M = E_1 - E_1''; \quad E_K = E - E_M = E_2 + E_1'' \quad \dots \text{(r)}$$

Mit

$$K_k = \left(\frac{C - A}{E} \right)_K; \quad J_{2,k} = K_k : a'^2 \quad \dots \text{(s)}$$

ist der einparametrische Kern durch $[E_k, \omega, a', J_{2,k}]$ bestimmt und man findet aus

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\omega^2 a'^3}{k^2 E_K} \quad \dots \text{(t)}$$

gemäß der letzten Gleichung (e) einen verbesserten Wert für die Abplattung e_k der Kernoberfläche. Resultiert e_k größer (kleiner) als die erste Annahme, so ist für die zweite Approximation ebenfalls ein größerer (kleinerer) Näherungswert anzusetzen.

Die weitere Berechnung der Kernfigur ist von Fall zu Fall verschieden und muß gesondert diskutiert werden.

β) Die Reihe der Grenzfiguren mit homogenem Kern

Die ∞^2 möglichen Lösungen für die vierparametrische Festerde mit den Ausgangsdaten (4) können in einem ebenen Koordinatensystem (Fig. 9) mit den Achsen ρ_0 und E_1 dargestellt werden. Das Hauptproblem ist dabei die Abgrenzung des Gültigkeitsbereiches. Als Ausgangsfigur kann das eindeutig bestimmte *Wiechert-Modell* gelten, welches bereits einen Eckpunkt A des Gültigkeitsbereiches definiert. Für eine bestimmte Oberflächendichte, die kleiner ist als die Manteldichte des *Wiechert-Modelles*, erhält man durch Variation von E_1 einen Vertikalschnitt durch das Gebiet der physikalisch sinnvollen Lösungen. Wählt man E_1 zu klein, so findet man für die Äquatorachse des homogenen Ausgangselliipsoides der zum einparametrischen Kern gehörenden Reihe (ω, K) einen Wert $> a'$, was natürlich sinnlos ist. Für ein bestimmtes E_1 ergibt sich schließlich die Achse dieses Ellipsoides gleich a' , was besagt, daß der Kern homogen ist. Mit zunehmendem E_1 wird der Kern heterogen, seine Massenkonzentration wächst und der Dichtesprung an der Kernoberfläche nimmt ab. Die zweite Grenzfigur des Vertikalschnittes ist erreicht, wenn der Dichtesprung verschwindet ($\Delta\rho = 0$). Je kleiner wir die Oberflächendichte wählen, um so kürzer wird der Vertikalschnitt oder um so kleiner wird schon in der Grenzfigur mit homogenem Kern der Dichtesprung an der Kernoberfläche, bis sich schließlich die beiden Grenzreihen mit homogenem Kern und mit verschwindendem Dichtesprung in einem Punkt S schneiden.

Bei der Berechnung der Grenzfiguren mit homogenem Kern hat man zu einem gegebenen ρ_0 vorerst einen Wert für E_1 zu wählen und damit wie im vorhergehenden Abschnitt vorzugehen. War die Wahl richtig und ist der Kern homogen, so erhält man neben (s) für K_k den zweiten Ausdruck:

$$K_k = \frac{2}{5} a'^2 \left(e_k - \frac{1}{2} e_k^2 \right) = K_h \quad \dots (s')$$

Ist dieser Wert kleiner als der Wert (s), so liegt der absurde Fall $a_h > a'$ vor und man muß ein größeres E_1 wählen. Ist umgekehrt $K_h > K$, so muß E_1 vermindert werden. Für den homogenen Kern finden wir aus E_k und

$$V_K = \frac{4}{3} \pi a'^3 (1 - e_k) = 176,273 (1 - e_k) \cdot 10^{24} \text{ cm}^3 \quad \dots (u)$$

die Dichte ρ_K des Kernes und zusammen mit der Dichte ρ_{ko} des Mantels an der Kernoberfläche den Dichtesprung

$$\Delta\rho = \rho_K - \rho_{ko} \quad \dots (v)$$

Für die Trägheitsmomente gilt:

$$C_M = C_1 - C_1'; \quad C_K = \frac{2}{5} E_K a'^2; \quad C = C_M + C_K \quad \dots (w)$$

Bemerkenswerterweise verteilt sich die gegebene Differenz der Trägheitsmomente bei allen Figuren der Reihe mit homogenem Kern fast gleich auf Mantel und Kern. Denn für den homogenen Kern ist:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{4}{5} e_k + \frac{22}{35} e_k^2; \quad \left(e_k - \frac{1}{2} e_k^2 \right) = \frac{5}{4} \bar{\varepsilon} \left(1 - \frac{45}{28} \bar{\varepsilon} \right)$$

also

$$\begin{aligned}(C - A)_K &= \frac{2}{5} E_K a'^2 \left(e_k - \frac{1}{2} e_k^2 \right) = \frac{\omega^2 a'^5}{2k^2} \left(1 - \frac{45}{28} \bar{\varepsilon} \right) = \\ &= 20,295 \left(1 - \frac{45}{28} \bar{\varepsilon} \right) \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2 \quad \dots (10)\end{aligned}$$

Für das *Wiechert*-Modell ist E_K ein Maximum und e_k ein Minimum, für die zweite Grenzfigur der Reihe umgekehrt E_k ein Minimum und e_k ein Maximum. Dabei gilt in Einheiten 10^{40} :

$$20,24 > (C - A)_K > 20,22; 242,98 < (C - A)_M < 243,00 \quad \dots (10a)$$

Die Figuren dieser Reihe sind dreiparametrig und es ist E_1 eine eindeutige Funktion von ρ_0 , die jedoch nicht gegeben ist, so daß bei dieser Wahl der freien Parameter keine Abkürzung des Berechnungsganges möglich zu sein scheint.

γ) Die Reihe der Grenzfiguren mit homogenem Mantel

In Richtung zunehmender Oberflächendichte geht vom *Wiechert*-Modell eine zweite Grenzreihe dreiparametriger Figuren mit homogenem Mantel aus. Die Mantelfigur ist ein *MacLaurinsches* Ellipsoid und nach Gleichung (a) der allgemeinen Lösung ist mit der Wahl von E_1 die Dichte ρ_0 gegeben. Im Diagramm 9 geht die auffallend kurze Reihe schräg nach oben, da das *Wiechert*-Modell durch das Minimum von E_1 ausgezeichnet ist. Sie endet in der zweiten Ecke des Gültigkeitsbereiches, d.h. in der Grenzfigur mit homogenem Mantel und verschwindendem Dichtesprung an der Kernoberfläche. Diese Ecke B kann mit dem Punkt S durch die dritte Grenzlinie $\Delta\varphi = 0$ verbunden werden. In der Reihe AB (homogener Mantel) nimmt der Dichtesprung an der Kernoberfläche auffallend rasch ab.

Für die homogene Mantelfigur gilt jeweils:

$$C_1 = \frac{2}{5} E_1 a^2; (C - A)_1 = C_1 \left(e - \frac{1}{2} e^2 \right) \quad \dots (a)$$

Mit einer genäherten Annahme für die Abplattung e_k der Kernoberfläche folgt der Reihe nach:

$$E_1' = \left(\frac{a'}{a} \right)^3 \frac{1 - e_k}{1 - e} E_1; E_M = E_1 - E_1'; E_K = E - E_M;$$

$$C_1' = \frac{2}{5} E_1' a'^2; (C - A)_{1'} = C_1' \left(e_k - \frac{1}{2} e_k^2 \right); (C - A)_M = \dots (b)$$

$$= (C - A)_1 - (C - A)_{1'}; (C - A)_K = (C - A) - (C - A)_M$$

Damit ist die einparametrische Kernfigur durch $[E_K, \omega, a', (C - A)_K]$ bestimmt. Man rechnet:

$$J_2 = \frac{(C - A)_K}{E_K a'^2}; \bar{\varepsilon} = (\omega^2 a'^3; k^2 E_K);$$

$\dots (c)$

$$2 e_k = \left(3J_2 + \bar{\varepsilon} - \frac{25}{56} \bar{\varepsilon}^2 \right) + e_k^2 - \frac{13}{14} e_k \bar{\varepsilon}$$

und hat jetzt so wie bei der allgemeinen Lösung die Möglichkeit, eine bessere Wahl für e_k zu treffen.

Mit einer Näherung für die Achse a_h' des homogenen Ausgangsellipsoides der Reihe (ω, K) , die zur Kernfigur gehört, resultieren aus

$$\bar{e}_h = (\omega^2 a_h'^2 : k^2 E_K) = \frac{4}{5} e_h' + \frac{22}{35} e_h'^2; \quad K' = \frac{2}{5} a_h'^2 \left(e_h' - \frac{1}{2} e_h'^2 \right) \dots (d)$$

Näherungswerte für e_h' und K' . Ist $\Delta K = (K - K')$ positiv, so war a_h' zu klein gewählt. Für das richtige a_h' muß natürlich $\Delta K = 0$ sein. Schließlich folgt

$$C_K = \frac{2}{5} E_K a_h'^2; \quad C = C_M + C_K \dots (e)$$

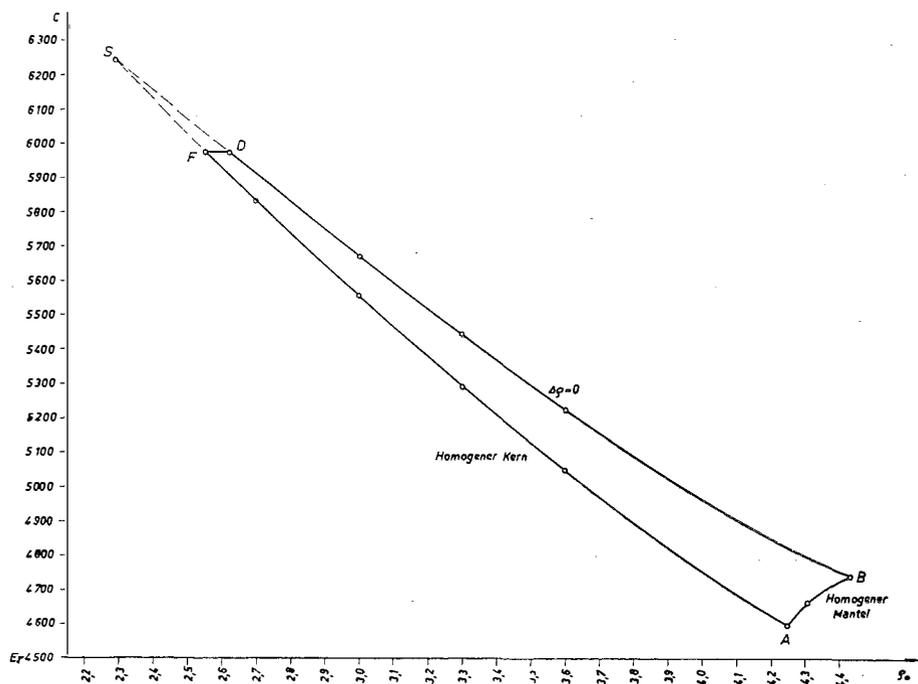


Fig. 9

Setzt man näherungsweise wieder

$$(1 - e_k) : (1 - \bar{e}_2') = 1 - 2(e_k - e_h'), \dots (f)$$

so ergeben sich die Unbekannten n und ν des Dichtegesetzes aus

$$1 - 2(e_k - e_h') = n \left(1 - \frac{6}{5} \nu + \frac{3}{7} \nu^2 \right) \dots (g)$$

$$(1 - e_k + e_h') \left(\frac{a_h'}{a} \right)^2 = n \left(1 - \frac{10}{7} \nu + \frac{5}{9} \nu^2 \right)$$

Mit E_K und $V_K = 176,273 (1 - e_k)$ resultiert die mittlere Dichte ρ_m' und anschließend die Maximaldichte, die Dichte an der Kernoberfläche und der Dichtesprung:

$$\rho_{max} = n \rho_m'; \quad \rho_{ko} = \rho_{max} (1 - \nu)^2; \quad \Delta \rho = \rho_{ko} - \rho_o \dots (h)$$

δ) Die Reihe der Grenzfiguren $\Delta\rho = 0$

Die Berechnung dieser Reihe *BS* bietet keine prinzipiellen Schwierigkeiten mehr. Man folgt der im Abschnitt α) gegebenen allgemeinen Lösung (a) bis (t) und berechnet die Kernfiguren nach den Formeln (d) bis (h) des vorhergehenden Abschnittes. Resultiert $\Delta\rho$ größer (kleiner) Null, so muß die Teilmasse E_1 bei festem ρ_0 ebenfalls größer (kleiner) angenommen werden. Abermals ist die Lösung nur in sukzessiver Approximation möglich.

Diese Reihe enthält nun bei $\rho_0 = 2,628$ die einparametrische Festerde und muß darüber hinaus ($\rho_0 < 2,628$) bereits physikalisch sinnlos sein, wie man aus der Darstellung in der kurzen Vertikalreihe des Diagramms 6 erkennt. Denn oberhalb der Kurve ($A = 0$) der einparametrischen Gleichgewichtsfiguren gibt es keine weiteren Gleichgewichtslösungen. Man erkennt dies auch an E_1 . Für die einparametrische Festerde ist nämlich $E_1 = E = 5975,033 \cdot 10^{24}$ g und für alle weiteren Figuren mit kleinerer Oberflächendichte müßte die Teilmasse E_1 bereits größer als E werden. Wohl ergeben sich damit noch positive Werte für $\Delta\rho$, was mit dem fünften Punkt unserer Definition der mehrparametrischen Gleichgewichtsfiguren noch verträglich ist. Jetzt aber erkennen wir, daß die Forderung 5, derzufolge die Dichte nach innen niemals abnehmen darf, ergänzt werden muß: Die Kernmasse E_K darf niemals kleiner sein als der Anteil E_1' , der sich mit dem Dichtegesetz des Mantels ergeben würde. Dasselbe gilt natürlich auch für die Reihe der Grenzfiguren mit homogenem Kern. Auch diese Reihe endet mit jener Figur, für welche $E_1 = E$ wird, was für $\rho_0 = 2,56$ der Fall ist. Mithin stellt die einparametrische Festerde *D* die dritte Ecke des Gültigkeitsbereiches dar, während die vierte Grenzlinie durch die Gerade $E_1 = E$ dargestellt wird, die sich mit der Reihe der Figuren mit homogenem Kern in der soeben genannten vierten Ecke *F* schneidet. Damit aber ist der Gültigkeitsbereich der physikalisch sinnvollen Lösungen abgeschlossen. Die Schnittfigur *S* mit homogenem Kern und gleichzeitig verschwindendem Dichtesprung liegt außerhalb dieses Bereiches (Figur 9).

ε) Die numerischen Ergebnisse

Neben den Eckpunkten *A*, *B*, *D* und *F* sowie der bereits fiktiven Schnittfigur *S* liegen noch folgende Figuren vor: in der Reihe mit homogenem Kern $\rho_0 = 2, 7; 3, 0; 3, 3; 3, 6$; in der Reihe $\Delta\rho = 0: \rho_0 = 3, 0; 3, 3; 3, 6$; in der Reihe mit homogenem Mantel: $\rho_0 = 4,307$.

Es seien kurz die wesentlichen Eigenschaften der drei Reihen von Grenzfiguren beschrieben. In der Figurenreihe mit homogenem Kern wächst die Mantelmasse trotz abnehmender Oberflächendichte. Besonders rasch wächst die Dichte an der Kernoberfläche, während das Trägheitsmoment des Mantels nur mäßig zunimmt (2,18%). Bemerkenswert ist auch der rasche Anstieg der Abplattung der Kernoberfläche. Masse, Dichte und Trägheitsmoment des Kernes sinken, ebenso der Dichtesprung an der Kernoberfläche von 7,84 bis 1,26. Das gesamte Trägheitsmoment schwankt zwischen dem Maximum (Figur *A*) und dem Minimum (Figur *F*) nur um rund $800 \cdot 10^{40}$ oder 1%. In der Reihe mit homogenem Mantel wachsen Masse und Dichte des Mantels nur mäßig, während infolge starker Massenkonzentration im Kern der Dichtesprung rasch auf Null absinkt (Figur *B*). Das Anwachsen der Mantel-

Tabelle 1

Grenzfiguren mit homogenem Kern

	A (Wiechert)		F				S
E_1	4595,816	5048,093	5290,199	5554,690	5838,091	5975,033	6246,910 · 10 ²⁴ g
ρ_0	4,247	3,600	3,300	3,000	2,700	2,560	2,292
E_M	3848,591	4015,919	4102,299	4196,589	4294,790	4340,644	4428,915 · 10 ²⁴ g
E_K	2126,442	1959,114	1872,734	1778,444	1680,243	1634,389	1546,118 · 10 ²⁴ g
e_k	196908	213732	223566	235374	249068	256071	270675 · 10 ⁻⁸
ρ_m	4,247	4,665	4,889	5,134	5,395	5,522	5,773
ρ_{ko}	4,247	5,507	6,173	6,894	7,668	8,044	8,795 Mantel
ν	0	0,252126	0,343517	0,423496	0,493821	0,523823	0,577216
ρ_k	12,087	11,138	10,648	10,113	9,556	9,296	8,795 Kern
$\Delta\rho$	7,840	5,631	4,475	3,219	1,888	1,251	0,000
C_M	71114,16	71548,26	71850,84	72195,41	72543,42	72686,23	72928,38 · 10 ⁴⁰ g cm ²
C_K	10290,70	9480,94	9062,91	8606,60	8131,37	7909,46	7482,28 · 10 ⁴⁰ g cm ²
C	81404,86	81029,20	80913,75	80802,01	80674,79	80595,69	80410,66 · 10 ⁴⁰ g cm ²
$(C - A)_M$	242,98	242,98	242,98	242,99	242,99	242,99	243,00 · 10 ⁴⁰ g cm ²
$(C - A)_K$	20,24	20,24	20,24	20,23	20,23	20,23	20,22 · 10 ⁴⁰ g cm ²

Tabelle 2

Grenzfiguren mit homogenem Mantel

	A (Wiechert)		B ($\Delta\rho = 0$)	
E_1	4595,816	4660,000	4732,342	4732,342 · 10 ²⁴ g
ρ_0	4,247	4,307	4,374	
E_M	3848,591	3902,192	3962,586	3962,586 · 10 ²⁴ g
E_K	2126,442	2072,841	2012,447	2012,447 · 10 ²⁴ g
e_k	196908	177414	153644	153644 · 10 ⁻⁸
ρ_{ko}	12,087	8,413	+ 4,374	
ρ_m	12,087	11,780	11,434	
ρ_{max}	12,087	17,541	25,867	Kern
$\Delta\rho$	7,840	4,106	0,000	
ν	0	0,307442	0,588810	
C_M	71114,16	72066,61	73225,11	73225,11 · 10 ⁴⁰ g cm ²
C_K	10290,70	9160,82	7743,77	7743,77 · 10 ⁴⁰ g cm ²
C	81404,86	81227,43	80968,88	80968,88 · 10 ⁴⁰ g cm ²
$(C - A)_M$	242,98	247,08	251,80	251,80 · 10 ⁴⁰ g cm ²
$(C - A)_K$	20,24	16,14	11,42	11,42 · 10 ⁴⁰ g cm ²

Tabelle 3

Grenzfiguren $\Delta\rho = 0$

	D einparam. Festerde				B homogener Mantel
E_1	5975,033	5677,081	5444,637	5224,305	4732,432 · 10 ²⁴ g
ρ_0	2,628	3,000	3,300	3,600	4,374
E_M		4272,380	4199,395	4127,381	3962,586 · 10 ²⁴ g
E_K		1702,653	1775,638	1847,652	2012,447 · 10 ²⁴ g
e_k		217991	199452	183571	153644 · 10 ⁻⁸
ρ_m	5,522	5,247	5,032	4,828	4,374
ρ_{ko}		7,106	6,437	5,805	4,374 Mantel
ν	0,513777	0,434247	0,360922	0,277577	0
ρ_{ko}		7,106	6,437	5,805	4,374
ρ_m		9,680	10,093	10,501	11,434 Kern
ρ_{max}	11,118	14,042	16,587	19,215	25,867
ν		0,288626	0,377021	0,450388	0,588810
C_M		73310,19	73288,38	73235,35	73225,11 · 10 ⁴⁰ g cm ²
C_K		7577,62	7630,80	7678,32	7743,77 · 10 ⁴⁰ g cm ²
C	80730,23	80887,81	80919,18	80913,67	80968,88 · 10 ⁴⁰ g cm ²
$(C - A)_M$		246,81	248,18	249,38	251,80 · 10 ⁴⁰ g cm ²
$(C - A)_K$		16,41	15,04	13,84	11,42 · 10 ⁴⁰ g cm ²

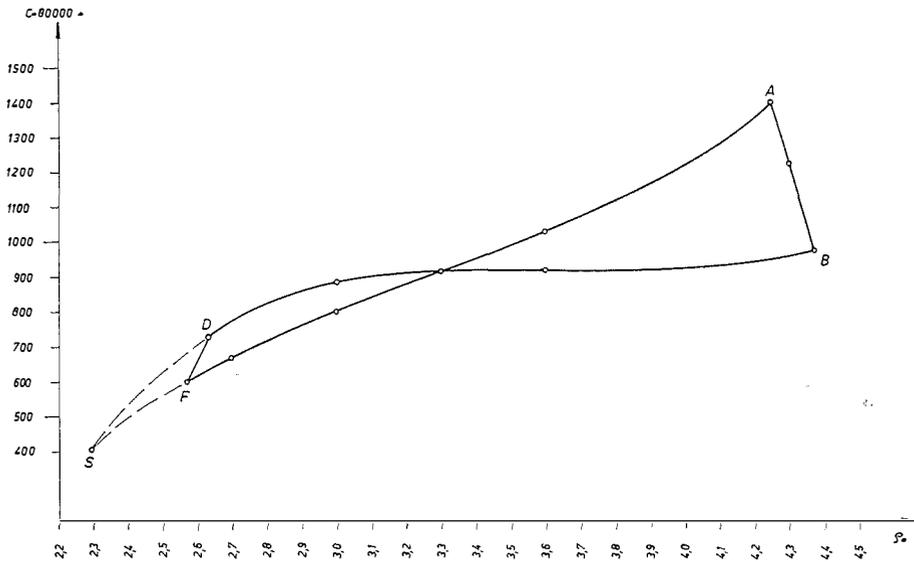


Fig. 10

dichte wird durch die Massenkonzentration im Kern überkompensiert, so daß das gesamte Trägheitsmoment um $436 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2$ oder $0,54\%$ absinkt. In der Reihe ($D \rightarrow B$) wächst die Oberflächendichte des Mantels mit fortschreitender Homogenisierung trotz abnehmender Masse, während im Kern Masse und Konzentration anwachsen. Dies hat zur Folge, daß das Trägheitsmoment nicht mehr monoton ansteigt, sondern die C -Kurve einen schwach ausgeprägten Wendepunkt besitzt (Fig. 10).

Die C -Kurven der beiden Reihen AF und BD haben einen Schnittpunkt bei $\rho_0 = 3,3$. Für größere Werte von ρ_0 nimmt C in den Vertikalschnitten $\rho_0 = \text{const}$ beim Übergang vom homogenen Kern bis zum Dichtesprung Null ab, für kleinere Werte jedoch zu. Man könnte leicht in Fig. 9 Kurven konstanter C -Werte konstruieren; sie bilden einen nach oben offenen Fächer. Im allgemeinen gehören zu jedem möglichen C unendlich viele Figuren des Gültigkeitsbereiches. Jedoch haben die Lösungen, welche annähernd der herrschenden Vorstellung vom Aufbau des Erdinneren entsprechen, Trägheitsmomente, die um rund $500 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2$ oder um rund $60/_{00}$ größer sind als das aus der statischen und dynamischen Abplattung gewonnene Trägheitsmoment der Festerde $(80473 - 35) = 80438 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2$.

3. Das achtparametrische Modell des Normalsphäroides

Die Aufklärung für diesen Fehlbetrag im Trägheitsmoment wird man in erster Linie darin vermuten, daß das sechspannetrische Modell dem komplizierten Aufbau des Erdinneren noch nicht genügend gerecht wird. Tatsächlich liegt ja die Manteloberfläche oder die idealisierte *Mohorovičić*-Fläche in einer Tiefe von etwa 33 km. Wir schieben daher zwischen den homogenen Ozean und den heterogenen Mantel noch eine feste Kruste der Dichte 2,67 ein; die Kruste wird also als homogen angenommen, wodurch sich die Zahl der Konstanten des Dichtegesetzes und gleichzeitig die Zahl der Formparameter um zwei erhöht. Es sei $a' = 6,375834 \cdot 10^8 \text{ cm}$ wieder der Äquatorradius des Ozeanbodens $a = 6,34529 \cdot 10^8 \text{ cm}$ der Äquator der Manteloberfläche und $a_k = 3,47829 \cdot 10^8 \text{ cm}$ der Kernradius. Aus der Abplattungsfunktion des einparametrischen Erdmodells ergibt sich für die Abplattung der Manteloberfläche $e = 333930 \cdot 10^{-8}$ und damit das Volumen der reduzierten Festerde (Mantel + Kern):

$$V = 1066,5725 \cdot 10^{24} \text{ cm}^3 \quad \dots (11)$$

Damit folgt für die Masse und die Trägheitsmomente der festen Kruste:

$$Kr = 2,67 (V' - V) = 41,285 \cdot 10^{24} \text{ g};$$

$$C_{Kr} = \frac{2}{5} 2,67 (V' a'^2 - V a^2) = 1113,917 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2; \quad \dots (12)$$

$$\begin{aligned} (C - A)_{Kr} &= 1,068 \left[V' a'^2 \left(e' - \frac{1}{2} e'^2 \right) - V a^2 \left(e - \frac{1}{2} e^2 \right) \right] = \\ &= 4,317 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2 \end{aligned}$$

und zusammen mit (1) und (2) für die Summe aus Ozean und fester Kruste:

$$Kr^* = 42,570 \cdot 10^{24} \text{ g}; C^* = 1148,767 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2;$$

$$(C - A)^* = 4,446 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2 \quad \dots (13)$$

Als Ausgangsdaten für die Berechnung der vierparametrischen reduzierten Festerde dienten:

$$E = 5933,745 \cdot 10^{24} \text{ g}; \omega^2 = 5,317496 \cdot 10^{-9} \text{ sec}^{-2};$$

$$a = 6,34529 \cdot 10^8 \text{ cm}; a_k = 3,48729 \cdot 10^8 \text{ cm}; \quad \dots (14)$$

$$(C - A) = 258,950 \cdot 10^{40} \text{ g cm}^2 \text{ oder } J_2 = 108388 \cdot 10^{-8}$$

Hierin sind E und $(C - A)$ infolge eines kleinen Rechenfehlers etwas verfälscht. Allen ∞^2 Lösungen ist der Parameter $\bar{\epsilon} = 343247 \cdot 10^{-8}$ gemeinsam, ferner näherungsweise auch die Oberflächenabplattung $e = 333969 \cdot 10^{-8}$, welche sich mit (14) für das einparametrische Modell ergibt.

Tabelle 4
Die vierparametrische Festerde des achtparametrischen Modells

	A	H	G	D	B	
E_1	4580,357	5306,618	5866,841	5933,745	4716,902	10^{24} g
ρ_0	4,295	3,300	2,685	2,685	4,422	
E_M	3824,900	4085,840	4278,371		3938,550	10^{24} g
E_K	2108,845	1847,905	1655,373		1995,195	10^{24} g
e_k	19 8489	22 6534	25 2830		15 5642	10^{-8}
ρ_m	4,295	4,975	5,501	5,563	4,422	
ρ_{ko}	4,295	6,319	7,856		4,422	Mantel
ν	0,000000	0,354242	0,503852	0,508343	0,000000	
ρ_m	11,987	10,507	9,415		11,336	
ρ_{ko}	11,987	10,507	9,415		4,422	
ρ_{max}	11,987	10,507	9,415	11,109	25,402	Kern
ν	0,000000	0,000000	0,000000		0,582749	
$\Delta\rho$	7,692	4,188	1,559		0,000	
C_M	70111,07	70869,96	71549,21		72199,34	10^{40} g cm^2
C_K	10205,54	8942,75	8011,01		7706,39	10^{40} g cm^2
C	80316,61	79812,71	79560,22	79649,20	79905,74	10^{40} g cm^2
$(C - A)_M$	238,71	238,71	238,72		247,42	10^{40} g cm^2
$(C - A)_K$	20,24	20,24	20,23		11,53	10^{40} g cm^2
C_8	81430,53	80926,63	80674,14	80763,12	81019,66	10^{40} g cm^2
C_6	81404,86	80913,75		80730,23	80968,88	10^{40} g cm^2
ΔC	+25,67	+12,88		+32,89	+50,78	10^{40} g cm^2

Die Berechnung erfolgte analog dem sechseparametrischen Modell. Zwecks Vergleiches wurde jeweils das resultierende Trägheitsmoment C um das Trägheitsmoment der festen Kruste vermehrt: $C_8 = C + 1113,92$ und dem Resultat C_6 des sechseparametrischen Modelles gegenübergestellt. Es dürfte genügen, die Eckfiguren des Gültigkeitsbereiches auszuweisen. Dabei ist zu beachten, daß wegen der angenommenen Krustendichte 2,67 die Oberflächendichte nicht unter diesen Wert sinken

darf. Mithin endet die Reihe mit homogenem Kern nicht in der Figur F , sondern bereits in der Figur G , welche dieselbe Oberflächendichte $\rho_0 = 2,685$ wie das einparametrische Modell der reduzierten Festerde besitzt. In dieser Reihe wurde überdies noch die Figur H mit $\rho_0 = 3,3$ tabuliert, weil dies der allgemein angenommenen Dichte an der Manteloberfläche entspricht. Wegen der Dichtedifferenz $(3,30 - 2,67) = 0,63$ könnte man in dieser Figur gemäß der zweiten Gleichung (12) eine Verminderung des Trägheitsmomentes um einen Bruchteil von $262,83 \cdot 10^{40}$ g cm² erwarten; statt dessen tritt aber infolge einer beträchtlichen Verminderung der Kerndichte sogar eine kleine Zunahme des Trägheitsmomentes auf, wie übrigens auch in sämtlichen Eckfiguren. Ansonst ist bloß eine kleine Verschiebung und Verdrehung des Gültigkeitsbereiches festzustellen. Der Minimalwert des Trägheitsmomentes liegt jetzt sogar um rund $80 \cdot 10^{40}$ g cm² höher als im sechsparametrischen Falle.

Um den Einfluß der angenommenen Krustendichte näher zu untersuchen, wurde für einige äquidistante Werte dieser Dichte das fünfparametrische Modell des Normalsphäroides durchgerechnet, bestehend aus dem homogenen Ozean, einer homogenen Kruste und einer einparametrischen reduzierten Festerde. Der inneren Übereinstimmung wegen wurde der oben erwähnte kleine Fehler berichtigt. Die gesamte Festerde hat demnach die Masse $E = 5975,033 \cdot 10^{24}$ g und die Differenz der Trägheitsmomente $(C - A) = 263,207 \cdot 10^{40}$ g cm². Man findet für den einparametrischen Kern, die homogene Kruste und für das totale Trägheitsmoment der Festerde folgende Tabelle 5:

Tabelle 5

	2,67	2,60	2,50	2,40	2,30
E_{Kr}	41,2851	40,2032	38,6574	37,1116	$35,5658 \cdot 10^{24}$ g
E_K	5933,7478	5934,8297	5936,3755	5937,9213	$5939,4671 \cdot 10^{24}$ g
$J_{2,k}$	10 8363	10 8394	10 8437	10 8479	$10 8522 \cdot 10^{-8}$
e_k	33 3931	33 3946	33 3965	33 3985	$33 4004 \cdot 10^{-8}$
ρ_{min}	2,6842	2,6871	2,6910	2,6951	2,6990
ρ_m	5,5634	5,5644	5,5658	5,5673	5,5687
ρ_{max}	11,1121	11,1082	11,1030	11,0977	11,0925
v	0,508 512	0,508 167	0,507 689	0,507 201	0,506 722
$(C - A)_{Kr}$	4,31	4,19	4,03	3,86	$3,69 \cdot 10^{40}$ g cm ²
$(C - A)_K$	258,90	259,02	259,18	259,35	$259,52 \cdot 10^{40}$ g cm ²
C_{Kr}	1113,92	1084,72	1043,01	1001,30	$959,58 \cdot 10^{40}$ g cm ²
C_K	79641,89	79671,22	79712,80	79754,45	$79795,97 \cdot 10^{40}$ g cm ²
C	80755,81	80755,94	80755,81	80755,75	$80755,56 \cdot 10^{40}$ g cm ²

Man sieht, daß bei abnehmender Krustendichte die Dichte an der idealisierten *Mohorovičić*-Fläche ansteigt und das Trägheitsmoment der gesamten Festerde nahezu konstant wird. Die schwach angedeutete C -Kurve hat bei der Krustendichte 2,58 ihr Maximum. Mithin ist das Trägheitsmoment des fünfparametrischen Modells fast unabhängig von der angenommenen Krustendichte. Überdies wäre bei diesem Modell die größtmögliche Krustendichte 2,6837.

4. Die vierparametrische Festerde bei variablem Kernradius

Ein weiterer Test für das Trägheitsmoment besteht in der Annahme einer variablen Kerntiefe. Um aber die mühevoll Berechnung der Grenzlinien des Gültigkeitsbereiches für die vierparametrische Festerde nicht für eine Reihe von Kernradien a_k wiederholen zu müssen, beschränken wir uns auf die beiden Grenzfiguren mit dem maximalen und minimalen Trägheitsmoment, nämlich auf das *Wiechert*-modell A und auf die bereits fiktive Figur S mit homogenem Kern und verschwindendem Dichtesprung. Als Ausgangswerte dienten die Daten (4) für E , ω , a , und $(C - A)$. Für die Berechnung der *Wiechert*-Modelle diente als freier Parameter nicht der Kernradius, sondern bequemlichkeitshalber die Manteldichte ρ_M . Für $\rho_M = 0$ erhalten wir natürlich eine äußere Niveaufläche jenes *MacLaurin*schen Ellipsoides, welches am Anfang der zur einparametrischen Festerde gehörenden Reihe (ω , C) steht. Für die zweite Figur wurde $\rho_M = 1,028$ gewählt; der Wassermantel hat bereits eine Tiefe von 692 km. Die folgende Tabelle enthält u. a. auch die frühere Figur mit der Kerntiefe 2900 km, sowie die zweite Grenzfigur $a_k = 0$, bei welcher eine Masse von $1138 \cdot 10^{24}$ g im punktförmigen Kern konzentriert ist. In Fig. 11 ist das Trägheitsmoment in Funktion des Kernradius dargestellt. Die sinus-ähnliche Kurve hat ein Maximum $C = 81581 \cdot 10^{40}$ g cm² für $a_k = 4236,4$ km. Das Minimum des Verhältnisses (Kerndichte:Manteldichte) dürfte zumindest annähernd demselben Kernradius entsprechen (Tabelle 6).

Tabelle 6

Wiechert-Modelle mit variablem Kernradius									
E_1	0	1112,332	2164,070	3246,105	4328,140	4595,816	4760,954	4815,056	4837,103 $\cdot 10^{24}$ g
ρ_M	0	1,028	2,000	3,000	4,000	4,247	4,400	4,450	4,470
E_M	0	324,063	781,179	1562,529	3155,633	3848,59	4413,338	4660,263	4837,103 $\cdot 10^{24}$ g
E_K	5975,033	5650,970	5193,854	4412,504	2819,400	2126,44	1561,695	1314,773	1137,930 $\cdot 10^{24}$ g
e_k	32 6582	32 3047	31 6934	30 2313	24 7477	19 6908	12 0383	6 2952	$\cdot 10^{-8}$
a_k	5811,900	5684,157	5491,395	5122,083	4124,276	3478,290	2662,936	2025,482	0 km
C_M	0	7 899,6	18 508,2	35 115,4	62 400,2	71 114,2	76 429,5	78 041,2	78 653,7 $\cdot 10^{40}$ g cm ²
C_K	80 730,3	73 032,3	62 649,1	46 306,1	19 182,8	10 290,7	4 429,7	2 157,6	0 $\cdot 10^{40}$
C	80 730,3	80 931,9	81 157,3	81 421,5	81 583,0	81 404,9	80 859,2	80 198,8	78 653,7 $\cdot 10^{40}$
$(C - A)_M$	0	27,67	64,98	123,23	215,81	242,98	257,89	261,86	263,22 $\cdot 10^{40}$ g cm ²
$(C - A)_K$	263,22	235,55	198,24	139,99	47,41	20,24	5,33	1,36	0 $\cdot 10^{40}$
ρ_K	7,290	7,369	7,512	7,863	9,618	12,087	19,767	37,796	∞
$\Delta\rho$	7,290	6,341	5,512	4,863	5,618	7,840	15,367	33,346	∞
$\rho_K : \rho_M$	∞	7,169	3,756	2,621	2,405	2,846	4,493	8,494	∞

Bei der Berechnung der Figuren S diente als freier Parameter der Kernradius. Die physikalisch allein mögliche Anfangsfigur $a_k = 0$ ist natürlich identisch mit der einparametrischen Festerde. Mit wachsendem Kernradius nimmt die Kerndichte ab und nähert sich einem endlichen Grenzwert. Auch die Oberflächendichte kann in der (gar nicht berechneten) Grenzfigur nicht ganz auf Null absinken; ihr Mantel hat ja das Dichtegesetz eines einparametrischen Sphäroides der größten Massenkonzentration. Dies erklärt auch den gewaltigen Anstieg der „Teilmasse“ E_1 . Es folgt, daß das rapide anwachsende Verhältnis (Kerndichte:Oberflächendichte)

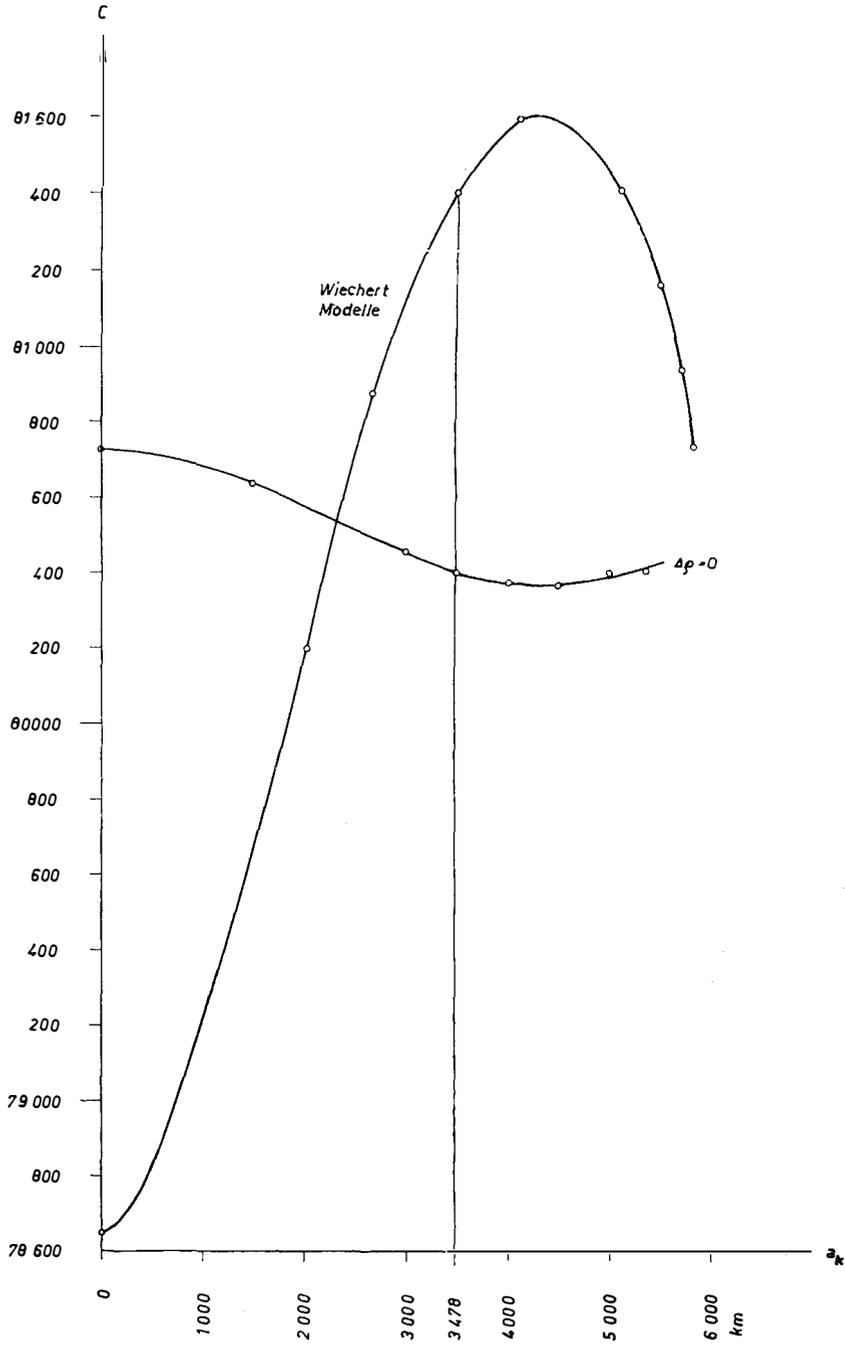


Fig. 11

einen endlichen Grenzwert besitzt. Der gleichfalls sinus-ähnliche Verlauf des Trägheitsmomentes hat eine wesentlich kleinere Amplitude als bei den *Wiechert*-Modellen. Die gesamte Variation in C ist nur etwa $358 \cdot 10^{40}$ g cm² oder rund 0,44 %. Das Minimum ist nicht sehr sicher bestimmbar; es fällt anscheinend nahe mit dem Maximum bei den *Wiechert*-Modellen zusammen (Tabelle 7).

Tabelle 7

Die fiktiven Schnittfiguren S mit homogenem Kern und verschwindendem Dichtesprung

E_1	5975,033	5978,570	6094,575	6246,910	6619,892	7521,901	10392,585	17829,949	10^{24} g
ρ_0	2,628	2,609	2,442	2,292	2,017	1,577	0,874	0,157	
E_M	5975,033	5826,273	4933,953	4428,915	3740,096	2936,741	1984,349	1246,797	10^{24} g
E_K	0	148,760	1041,080	1546,117	2233,937	3038,292	3990,684	4728,236	10^{24} g
a_k	0	1500,000	3000,000	3478,290	4000,000	4500,000	5000,000	5340,320	km
e_k	21 4295	22 5689	25 7930	27 0657	28 4729	29 8180	31 1380	32 0184	10^{-8}
ν	0,513777	0,516859	0,548003	0,577216	0,630670	0,713364	0,838683	0,951548	Mantel
ρ_{max}	11,118	11,177	11,954	12,823	14,787	19,194	32,536	66,876	
ρ_K	11,118	10,546	9,229	8,795	8,359	7,980	7,637	7,413	
C_M	80 730,2	80 506,6	76 710,1	72 928,4	66 070,7	55 755,7	40 505,0	26 478,2	10^{40} g cm ²
C_K	0	133,9	3 747,9	7 482,3	14 303,6	24 610,2	39 906,8	53 937,9	10^{40} g cm ²
C	80 730,2	80 640,5	80 458,0	80 410,7	80 374,3	80 365,9	80 411,9	80 416,1	10^{40} g cm ²
$(C - A)_M$	263,22	262,92	253,57	243,00	222,55	189,95	139,15	90,80	10^{40} g cm ²
$(C - A)_K$	0	0,30	9,65	20,22	40,67	73,27	124,07	172,42	10^{40} g cm ²
$\rho_K : \rho_0$	4,231	4,042	3,780	3,837	4,145	5,060	8,738	47,217	

Hinsichtlich unseres Problem es ist das Ergebnis negativ. Eine geringe Abnahme des Kernradius würde beim *Wiechert*-Modell nur einen Bruchteil des Überschusses in C beseitigen. Überdies ist zu beachten, daß mit wachsender Entfernung von diesem in der Reihe der Grenzfiguren mit homogenem Kern der Effekt abnimmt und bei Annäherung an S sogar das Vorzeichen wechselt. Andererseits ist die seismische Bestimmung der Kerntiefe erstaunlich sicher. Die Zahl 2900 km könnte den Anschein erwecken, daß sich es nur um eine rohe Näherung handelt; der exakte Wert ist aber 2898 km.

5. Abschließende Betrachtungen

Nachdem das achtparametrische Modell den Widerspruch des sechspanparametrischen Modells sogar geringfügig verschärft hat, ist durch eine höherparametrische Figur keine Beseitigung des Widerspruches zu erhoffen. Dies gilt vor allem auch für die naheliegende Zweiteilung des Kernes, wie auch Versuchsrechnungen in dieser Richtung erwiesen haben. Wollte man z. B. in der Figur H der Tabelle 4 mit der sehr plausiblen Dichte 3,3 an der Manteloberfläche den homogenen Kern mit der Dichte 10,507 durch ein *Wiechert*-Modell ersetzen, um das Trägheitsmoment um den nötigen Betrag $(80926,6 + 34,8 - 80473) = 488,4 \cdot 10^{40}$ g cm² zu vermindern, so würde die Dichte des äußeren Kernes auf 9,846 absinken, wenn man für den Äquatorradius des inneren Kernes $1,25729 \cdot 10^8$ cm annimmt, der Tiefe 5121 km entsprechend. Der Dichtesprung an der Oberfläche des äußeren Kernes sinkt dabei von 4,188 auf

$(9,846 - 6,319) = 3,527$ ab, was gleichfalls recht gut mit der herrschenden Anschauung der Geophysiker übereinstimmt. Jedoch würde sich dabei die Differenz der Trägheitsmomente um $1,11 \cdot 10^{40}$ g cm² oder um 0,42% vermindern. Tatsächlich kann ja ein homogenes Ellipsoid nur als *Wiechert*-Modell mit beliebigem Kernradius bei verschwindendem Dichtesprung gedeutet werden, wenn die *Stokessche* Konstante J_2 erhalten bleiben soll.

Zur Beseitigung des Widerspruches wäre eine Vergrößerung des empirischen Wertes für C oder eine Verkleinerung der berechneten Trägheitsmomente um beinahe $500 \cdot 10^{40}$ g cm², also um rund 0,6% nötig. Ein derart großer Fehler ist aber weder in den empirischen Werten für die statische und die dynamische Abplattung, noch in den berechneten C -Werten zu vermuten. Empirisch wäre eine Abnahme der dynamischen Abplattung um rund $20 \cdot 10^{-6}$ erforderlich. In seiner jüngsten Arbeit hat aber *Jeffreys*³⁷⁾ gefunden:

$$E = (81,299 \pm 0,022) M; H = 0,0032730 (1 \pm 0,00018) \quad \dots (15)$$

Die Unsicherheit in der empirischen Bestimmung von H aus der Präzessionskonstante liegt in erster Linie in der Unsicherheit des Massenverhältnisses von Erde und Mond (M). *Jeffreys'* Ergebnis führt also auf einen mittleren Fehler in H von bloß $\pm 0,6 \cdot 10^{-6}$. Soll andererseits der Widerspruch aus der statischen Abplattung erklärt werden, so wäre eine Zunahme von J_2 um $6 \cdot 10^{-6}$ erforderlich, was anscheinend auf den älteren, aus dem natürlichen Mond abgeleiteten Wert zurückführt. Dem sind aber zwei Argumente entgegenzuhalten. Das größere J_2 würde das in II, (3) aus H abgeleitete einparametrische Normalsphäroid verifizieren; alle drei dort angeführten Lösungen würden zusammenfallen und das Normalsphäroid der Erde wäre einparametrisch, wogegen es über jeden Zweifel erhaben ist, daß die wirkliche Erde und damit das zugehörige Normalsphäroid unmöglich ein stetiges Dichtegesetz haben können. Auch würde das größere J_2 eine weitere Zunahme der Trägheitsmomente der berechneten Modelle zur Folge haben, was eine abermalige Vergrößerung von J_2 erfordern würde. Schließlich könnte man daran denken, daß die in den Figuren berechneten Trägheitsmomente infolge der notwendigen Vereinfachungen bei der Integration etwas zu groß sind. Da sich aber das Trägheitsmoment des *Wiechert*-schen Modelles streng berechnen läßt und auch das einparametrische Normalsphäroid, das ziemlich sicher berechnet ist, recht gut in die Figurenreihe mit verschwindendem Dichtesprung an der Kernoberfläche paßt, können auch die berechneten Trägheitsmomente kaum um 0,6% falsch sein.

Die berechneten Trägheitsmomente hängen selbstverständlich wesentlich von der angenommenen Erdmasse ab. Diese kann aber nie direkt, sondern nur in Kombination mit der Gravitationskonstante k^2 entweder nach dem dritten *Kepler*-Gesetz: $k^2 E = n^2 a^3$ oder aus der Berechnung von Gleichgewichtsfiguren oder aus der allgemeinen Auflösung des *Helmert*-schen Gleichungssystems abgeleitet werden. *W. Kaula*³⁸⁾ berichtet zehn neuere Bestimmungen, vorwiegend aus künstlichen Satelliten, die auf das arithmetische Mittel

$$k^2 E = (3,986\ 0624 \pm 506 \cdot 10^{-7}) \cdot 10^{20} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-2} \quad \dots (16)$$

führen, während man aus den Daten $[\gamma_0, \omega, a, J_2]$ für das einparametrische Normalsphäroid der Erde (stetiges Dichtegesetz!) findet:

$$k^2 E = (3,986\ 2041 \cdot 10^{20} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-2}) \quad \dots (16a)$$

Die Übereinstimmung ist also recht gut. Aus dem letzten Wert ergibt sich mit dem derzeit als besten anerkannten Wert für die Gravitationskonstante $k^2 = 66,7 \cdot 10^{-9} \text{ g}^{-1} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-2}$ die Erdmasse $E = 5976,3 \cdot 10^{24} \text{ g}$, während mit $k^2 = 66,8 \cdot 10^{-9}$ folgen würde: $E = 5967,4 \cdot 10^{24} \text{ g}$, was eine Abnahme des Trägheitsmomentes C um $1,50/00$ verursachen würde. Zur restlosen Aufklärung des obigen Widerspruches wäre also eine Zunahme von k^2 um $0,4 \cdot 10^{-9}$ erforderlich. Dies würde aber die ohnehin beträchtliche Unsicherheit der Gravitationskonstante (1:2000) um das Zwölfwache übersteigen.

Möglicherweise kann also der Widerspruch durch Verbesserungen der empirischen Daten um etwa 10% vermindert werden. Der Restbetrag müßte aber wohl als reelle Abweichung des wirklichen Erdkörpers vom hydrostatischen Gleichgewicht gedeutet werden. Es wäre etwa denkbar, daß die Erde seit der Abtrennung des Mondes und seit der Ausbildung der Kruste noch nicht wieder das hydrostatische Gleichgewicht erlangt hat. Krustenverschiebungen bewirken eine Veränderung der Trägheitsmomente und eine Verlagerung der Rotationsachse und selbst bei idealem isostatischem Gleichgewicht in der Kruste braucht das Trägheitsmoment C noch nicht das Maximum erreicht zu haben. Dynamische Betrachtungen überschreiten aber den Rahmen der vorliegenden Arbeit.

Literatur

- 1) *L. Lichtenstein*: Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, Berlin 1933.
- 2) *R. Wavre*: Figures Planétaires et Géodésie, Paris 1932.
- 3) *P-S-Laplace*: Mécanique céleste, Livre III, ch. 3, 1799–1825.
- 4) *C. MacLaurin*: A Treatise of Fluxions, Edinburgh 1742.
- 5) *K. Ledersteger*: Die möglichen Gleichgewichtsfiguren der rotierenden Erdmasse, Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart 1959, Seite 73–90.
- 6) *H. Jacobi*: Über die Figur des Gleichgewichtes, Annal. Phys. 33, 1834; „Gesammelte Werke“. Band 2, 1882, S. 19.
- 7) *C. Kostka*: Monatsberichte der Akad. d. Wiss. Berlin, Februar 1870.
- 8) *K. Ledersteger*: Zur Begründung einer Theorie der hydrostatischen Gleichgewichtsfiguren auf dem Außenraumpotential, Sitzungsberichte d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-Nat. Kl., München 1962, Seite 45–55.
- 9) *M. Volterra*: Sur la stratification d'une masse fluide en rotation, Acta Math., Bd. 27, S. 105, 1903.
- 10) *A. C. Clairaut*: Théorie de la figure de la terre, tirée des principes de l'hydrostatique, Paris 1743.
- 11) *R. Radau*: Remarques sur la théorie de la figure des planètes, Bull. Astr., Vol. 2, 1885; Acad. Paris, C. R., Vol. 100, 972, 1885.
- 12) *K. Ledersteger*: Das Prinzip der Entblätterung und die Clairautsche Theorie der heterogenen sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren, Gerlands Beiträge zur Geophysik, Bd. 71, Seite 272 bis 281, Leipzig 1962.
- 13) *H. Poincaré*: Figures d'équilibre d'une masse fluide, Paris 1903.
- 14) *A. M. Legendre*: Suite de la recherche sur la figure des planètes, Acad. Paris Mém. 1789.
- 15) *M. Lévy*: Sur la théorie de la terre, Acad. Paris, C. R. Vol. 106, 1888.
- 16) *R. Lipschitz*: Versuch zur Herleitung eines Gesetzes, das die Dichtigkeit für die Schichten im Innern der Erde annähernd darstellt, aus den gegebenen Beobachtungen, Journal f. reine u. angew. Mathem., Bd. 62, 1863; Bd. 63, 1863.
- 17) *E. Roche*: Note sur le roi de densité à l'intérieur du globe terrestre, Acad. Montpellier, Mém., Vol. 10, 1881.

18) *F. R. Helmert*: Die mathem. u. physikal. Theorieen der Höheren Geodäsie, Bd. 2, Leipzig 1884; S. 478–92.

19) *G. H. Darwin*: Theory of the Figure of the Earth Carried to the Second Order of Small Quantities, Monthly Not. R. A. S., London 1900.

20) *S. Oppenheim*: Die Theorie der Gleichgewichtsfiguren der Himmelskörper, Enzyklopädie der mathem. Wiss., Bd. VI/2, Leipzig 1922–34.

21) *F. Hopfner*: Physikalische Geodäsie, Mathematik und ihre Anwendungen, Bd. 14, Leipzig 1933.

22) *K. Ledersteger*: Die heterogenen sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren und das Normal-sphäroid der Erde, Geofisica pura e applicata, Bd. 44, S. 1–19, Milano 1959.

23) *K. Ledersteger*: Zur Frage des Dichtegesetzes der einparametrischen heterogenen Gleichgewichtsfiguren, Schweizerische Zeitschrift f. Vermessung, Kulturtechnik u. Photogrammetrie, Winterthur 1960, S. 110–115.

24) *A. H. Cook*: Developments in Dynamical Geodesy, Geophys. Journal, Vol. 2, Nr. 3, London 1959.

25) *E. C. Bullard*: The Figure of the Earth, Monthly Not. Royal Astr. Soc., Suppl. Vol. V, Nr. 6, 1948.

26) *G. Oliwa*: Das äußere Schwerfeld eines Rotationssphäroides, Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen, Baden bei Wien, 1960, S. 113–19.

27) *K. Ledersteger*: Die künstlichen Satelliten und die Massefunktionen der Erde, Acta Technica Acad. Scient. Hung., Tom 43, Fasc. 1–2, Budapest 1963, S. 231–58.

28) *E. Wiechert*: Über die Massenverteilung im Innern der Erde, Akad. Göttingen Nachr. 1897; Über die Beschaffenheit des Erdinnern, ebenda, 1924.

29) *Z. Kopal und R. James*: Techn. Summary Report, Nr. 193, Math. Res. Center, U.S. Army, Univ. of Wisconsin, Oct. 1960.

30) *P. Pizzetti*: Sulla espressione della gravità alla superficie del geoide, supposto ellissoidico, Atti della R. Acc. dei Lincei, Vol. 3, Roma 1894.

31) *C. Somigliana*: Teoria del campo gravitazionale dell'ellissoide di rotazione, Mem. della Soc. Astr. Ital., Vol. IV, Milano 1929 — Sul campo gravitazionale esterno del geoide ellissoidico, Rendiconti Lincei, 1930.

32) *W. D. Lambert*: The Gravity Field of an Ellipsoid of Revolution as a Level Surface, Ann. Acad. Scient. Fennicae, Helsinki 1961.

33) *U. A. Uotila*: Harmonic Analysis of World-Wide Gravity Material, Ann. Acad. Scient. Fennicae, Ser. A/III, Helsinki 1962.

34) *A. Prey*: Darstellung der Höhen- und Tiefenverhältnisse der Erde durch die Entwicklung nach Kugelfunktionen bis zur 16. O., Nachr. d. kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Bd. 11, 1922.

35) *K. Ledersteger*: Das Normalsphäroid der Erde als zweiteilige Gleichgewichtsfigur und die mittlere Tiefe der Lithosphäre, Sitzungsber. d. Öst. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Kl. II, 1961, P. 225–39.

36) *K. Ledersteger*: Der physikalische Zusammenhang zwischen der statischen Abplattung und dem inneren Aufbau der Erde auf der Grundlage einer sechseparametrischen Gleichgewichtsfigur, Geofisica pura e applicata, Vol. 51, Milano 1962, S. 1–27.

37) *Sir Harald Jeffreys*: On the Hydrostatic Theory of the Figure of the Earth, Geophysical Journal, Vol. 8, No. 2, London 1963.

38) *W. Kaula*: Determination of the Earth's Gravitational Field, Reviews of Geophysics, Vol. I, Nr. 4, Richmond, Virg., 1963, S. 507–51.

39) *K. Ledersteger*: Das Normalsphäroid der Erde, Vermessungstechnik, 11. Jg., 1963, Heft 5, S. 167–171.

40) *K. Ledersteger*: Die Theorie der sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren, Forschungen und Fortschritte, 37. Jg., Berlin 1963, Heft 12, S. 353–356.

