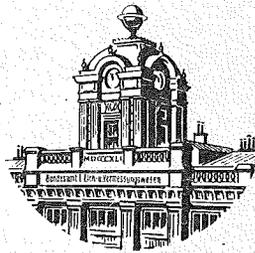


Sonderveröffentlichung 20  
der Österreichischen Zeitschrift  
für Vermessungswesen

Weitere Analogien  
zwischen Aufgaben der Mechanik  
und der Ausgleichsrechnung

H. G. Jerie



Herausgegeben vom  
Österreichischen Verein für Vermessungswesen  
Im Selbstverlag des Vereines, Wien VIII, Friedrich-Schmidt-Platz 3

Wien, Anfang März 1960

THE UNIVERSITY OF CHICAGO  
DIVISION OF THE PHYSICAL SCIENCES  
DEPARTMENT OF CHEMISTRY

1955

TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN  
INSTITUT FÜR HÖHERE GEODÄSIE  
1040 WIEN, GUSSHAUSSTRASSE 27-29

Sonderveröffentlichung 20  
der Österreichischen Zeitschrift  
für Vermessungswesen

Inventar Nr. 809/20

Weitere Analogien  
zwischen Aufgaben der Mechanik  
und der Ausgleichsrechnung

H. G. Jerie



Herausgegeben vom  
Österreichischen Verein für Vermessungswesen  
Im Selbstverlag des Vereines, Wien VIII, Friedrich-Schmidt-Platz 3

Wien, Anfang März 1960

---

Photomech. Repr. u. Druck:  
Bundesamt für Eich- u. Vermessungswesen (Landesaufnahme) in Wien

WEITERE ANALOGIEN  
ZWISCHEN AUFGABEN DER MECHANIK UND DER AUSGLEICHSRECHNUNG

H. G. Jerie

1. Einleitung.

Ueber die reichhaltige Literatur, die sich in den letzten sieben Jahrzehnten mit diesem Fragengebiet beschäftigt hat, berichtet Prof. Dr. A. Barvir ausführlich in der Einführung zu seiner in der Festschrift Dolezal (1) erschienenen Arbeit, in der auch unter anderem besonders die Zusammenhänge zwischen der Ausgleichung von Winkelnetzen nach bedingten Beobachtungen und analogen mechanischen Systemen untersucht werden.

Die Verwendung von entsprechend entworfenen und dimensionierten Analogrecheneinrichtungen auf dem Prinzip elastischer Systeme für verschiedene Ausgleichsprobleme lässt sich bereits ausreichend mit dem Satz von Castigliano begründen, demzufolge der Gleichgewichtszustand eines solchen elastischen Systems derjenige ist, in dem die geleistete Formänderungsarbeit zu einem Minimum wird.

Für gewisse theoretische Untersuchungen und nicht zuletzt auch zur Vertiefung des anschaulichen Verständnisses der mathematischen Beziehungen ist es jedoch interessant, weiteren Analogien zwischen mechanischen und Ausgleichs-Problemen nachzugehen. Die Berührungszonen verschiedener Fachgebiete bilden ja naturgemäss eine reiche Fundgrube für neue Erkenntnisse auf beiden Seiten der Grenze.

Interessant ist immerhin, dass es trotz der seit so langer Zeit bestehenden Kenntnis vieler Zusammenhänge zu keiner echten praktischen Anwendung kam, obwohl bestimmte Analogrecheneinrichtungen für die Lösung von Ausgleichsaufgaben, die zu grösseren Normalgleichungssystemen führen, besonders wertvolle Dienste leisten könnten.

Man könnte es in diesem Zusammenhang fast ein historisches Versäumnis nennen, dass man mit den Hilfsmitteln und Kenntnissen der Zeit vor 50 Jahren z. B. ohne weiteres Analogrecheneinrichtungen für die Ausgleichung von grösseren Triangulationsnetzen hätte entwickeln können, mit denen die Auf-

lösung von Normalgleichungssystemen, die immerhin sehr häufig unter grossem Arbeitsaufwand durchgeführt, und wahrscheinlich noch häufiger unter Verzicht auf mögliche bessere Ergebnisse vermieden wurden, sehr viel weniger Schwierigkeiten geboten hätte.

In der folgenden Arbeit soll in zwangloser Folge über einige Beziehungen berichtet werden, die sich dem Verfasser, der im Laufe der letzten Jahre am International Training Centre for Aerial Survey in Delft Gelegenheit hatte, Analogrecheneinrichtungen für verschiedene photogrammetrische und geodätische Aufgaben zu entwickeln, ergaben.

Hierbei wurde die von J. M. Tienstra entwickelte mathematische Formulierung der Ausgleichsaufgaben und die von ihm dabei angewandte Schreibweise für weitere Ableitungen als besonders zweckmässig gefunden. Um dem Leser, der mit der Tienstra'schen Ausgleichsrechnung noch nicht vertraut ist, das Verständnis zu erleichtern, ist im Anhang eine kurze Einführung in diese Schreibweise, ihre wichtigsten Rechenregeln und eine Zusammenstellung der Formeln für die Ausgleichsaufgaben gegeben.

## 2. Mechanische Interpretation der Formeln für Standardproblem II (Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen) in analogen elastischen Systemen.

Analogrecheneinrichtungen für Ausgleichsaufgaben müssen im wesentlichen zwei Bedingungen genügen:

### 1. Stellen die Funktionen

$$p^\alpha = f(X^\lambda) \quad [1]$$

die mathematischen Beziehungen zwischen den Grössen  $p^\alpha$  und  $X^\lambda$  des Ausgleichsproblems dar, und bezeichnet man mit  $a_\lambda^\alpha$  die Differentialquotienten dieser Funktionen nach den  $X^\lambda$

$$a_\lambda^\alpha = \frac{\delta f^\alpha}{\delta X^\lambda} \quad [2]$$

dann muss das mechanische System derart konstruiert sein, dass zwischen Veränderungen  $dX^\lambda$  der Grössen, die die Parameter  $X^\lambda$  repräsentieren, und daraus resultierenden Veränderungen  $dP^\alpha$  der Grössen, die die  $p^\alpha$  repräsentieren, folgende Beziehung besteht:

$$dP^\alpha = a_\lambda^\alpha dX^\lambda \quad [3]$$

2. Die mechanischen Grössen, die die  $p^\alpha$  repräsentieren, müssen elastisch deformierbar sein und zwar derart, dass ihre Elastizitätskoeffizienten proportional dem Gewicht  $g_{\alpha\alpha}$  der Beobachtungen  $p^\alpha$  sind.

Die erste Bedingung wird wohl häufig am leichtesten dadurch erfüllbar sein, dass man das geometrische Problem mechanisch möglichst weitgehend simuliert, doch ist dies nicht in allen Fällen unbedingt notwendig.

Da aus Gründen der Genauigkeit die Widersprüche und damit die resultierenden Veränderungen der  $X^\lambda$  in einem grösseren Masstab als die  $p^\alpha$  selbst eingeführt werden, muss beachtet werden, dass einerseits die Beziehungen [3] und andererseits das Hook'sche Gesetz über den ganzen Bereich der einzuführenden Veränderungen Gültigkeit haben.

Abweichungen von der vollständigen Strenge sind nur soweit zulässig, als damit die Genauigkeit der Endresultate nicht wesentlich verändert wird, d. h. solange die Fehler zufolge einer Nichteinhaltung dieser Bedingungen wesentlich kleiner sind (z. B. 1/3) als die Fehler, die für die Endresultate zufolge der Beobachtungsungenauigkeiten selbst erwartet werden müssen.

Sind die obigen Bedingungen erfüllt, und bezeichnet man noch die elastischen Formänderungen  $dP^\alpha$  der die Beobachtungen realisierenden mechanischen Teile mit  $e^\alpha$  (Verbesserungen), dann erhält man weiter folgende Beziehungen:

$g_{\alpha\alpha} e^\alpha$  Die für eine elastische Formänderung notwendige Kraft

$1/2 g_{\alpha\alpha} e^\alpha e^\alpha$  die für eine elastische Formänderung notwendige Energie (Formänderungsenergie)

$f^\alpha$  die Widersprüche: sie werden in das analoge elastische System eingeführt, indem die Grössen  $P^\alpha$ , ausgehend von der spannungsfreien 0-Lage, um proportionale Beträge vergrössert bzw. verkleinert werden.

$e^\alpha = a_{\lambda}^{\alpha} X^{\lambda} - f^\alpha$  Die Verbesserungsgleichungen sagen, ins Mechanische übersetzt, aus: Die elastischen Deformationen  $e^\alpha$  der Grössen  $p^\alpha$  stellen die Differenz zwischen den eingeführten Veränderungen  $f^\alpha$  und den durch die Veränderungen der  $X^\lambda$  resultierenden Veränderungen der  $p^\alpha$  dar.

$G_{\lambda\mu} X^\mu = F^\lambda$  Die Normalgleichungen entsprechen, wie weiter gezeigt werden soll, den Gleichgewichtsbedingungen (Elastizitätsgleichungen) des analogen elastischen Systems.

Dazu sollen die beiden Seiten der Gleichungen vorerst getrennt untersucht werden.

(Für die benutzten Formen siehe Anhang)

$G_{\lambda\mu} X^\mu = a_\lambda^\alpha g_{\alpha\beta} a_\mu^\beta X^\mu$ , darin sind:

$a_\mu^\beta X^\mu$  Die Wirkungskomponenten oder "Projektionen" der  $X^\mu$  auf die  $p^\beta$   
d. h. die Grössenänderungen der  $p^\beta$  zufolge der Veränderungen  $X^\mu$   
 $g_{\alpha\beta} a_\mu^\beta X^\mu$  Kräfte (Spannungen), die zufolge der Grössenänderungen der  $p^\beta$   
in den sie realisierenden mechanischen Teilen auftreten.

$a_\lambda^\alpha g_{\alpha\beta} a_\mu^\beta X^\mu$  "Projektionen" der eben genannten Kräftevektoren auf die  $X^\lambda$   
d. h. Kraftkomponenten in Richtung der  $X^\lambda$ .

Beachtet man die Summationskonvention, so bedeutet dieser Ausdruck bereits die Summe aller in Richtung  $X^\lambda$  wirkenden Kraftkomponenten, die zufolge aller Veränderungen  $X^\mu$  aufgetreten sind.

Die andere Seite der Normalgleichungen ist:

$F_\lambda = g_{\alpha\beta} a_\lambda^\alpha f^\beta$  und darin sind wieder:

$g_{\alpha\beta} f^\beta$  die Kräfte (Spannungen), die in den  $p^\beta$  zufolge der eingeführten Veränderungen (Widersprüche) auftreten.

$a_\lambda^\alpha g_{\alpha\beta} f^\beta$  die "Projektionen" der Kräftevektoren  $g_{\alpha\beta} f^\beta$  auf die  $X^\lambda$  oder,  
unter Beachtung der Summationskonvention: die Summe aller in Richtung  $X^\lambda$  wirkenden Kraftkomponenten, die zufolge der eingeführten Veränderungen  $f^\beta$  aufgetreten sind.

Damit ist eine anschauliche Deutung der Normalgleichungen als Gleichgewichtsbedingungen für analoge elastische Systeme gewonnen: In jeder Grösse  $X^\mu$  muss die Summe der angreifenden Kräfte, die zufolge der Veränderungen aller  $X^\lambda$  aufgetreten sind, ident sein mit der Summe der angreifenden Kräfte, die zufolge aller (eingeführten) Veränderungen ( $f^\beta$ ) der Grössen  $p^\beta$  auftreten.

### 3. Ein Beispiel aus der Trilaterationsnetzausgleichung.

3.1 Zuerst allgemeine Behandlung als Standardproblem II (Ausgleich vermittelnder Beobachtungen): (Bezüglich der verwendeten Formeln siehe Anhang)

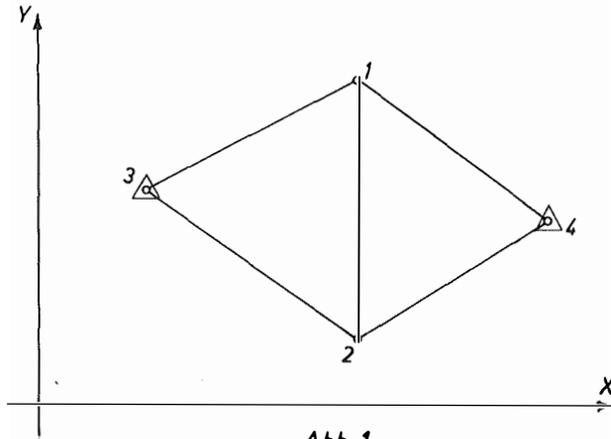


Abb. 1

Man erhält folgende Werte für die Rechnung:

$$\text{Beobachtungen } \left\| p^\alpha \right\| = \begin{Bmatrix} s^1 \\ s^2 \\ s^3 \\ s^4 \\ s^5 \end{Bmatrix} \begin{array}{l} \text{Gewichte} \\ \text{der} \\ \text{Beob.} \end{array} \left\| g_{\alpha\beta} \right\| = \begin{Bmatrix} g_{11} & & & & \\ & g_{22} & & & \\ & & g_{33} & & \\ & & & g_{44} & \\ & & & & g_{55} \end{Bmatrix}$$

$$\text{Parameter } \left\| X^\lambda \right\| = \begin{Bmatrix} dX^1 \\ dY^1 \\ dX^2 \\ dY^2 \end{Bmatrix}$$

Damit werden die Fehlergleichungen  $e^\alpha = a_\lambda^\alpha X^\lambda - f^\alpha$

$$\begin{Bmatrix} e^1 \\ e^2 \\ e^3 \\ e^4 \\ e^5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -a_1 & -b_1 & +a_1 & +b_1 \\ -a_2 & -b_2 & & \\ -a_3 & -b_3 & & \\ & -a_4 & -b_4 \\ & -a_5 & -b_5 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} dX^1 \\ dY^1 \\ dX^2 \\ dY^2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \\ f^4 \\ f^5 \end{Bmatrix}$$

worin  $a_i = \cos \nu_i$  und  $b_i = \sin \nu_i$  bedeutet,

und man erhält schliesslich folgende Koeffizienten  $G_{\lambda\mu}$  und Konstanten  $F_\lambda$  der Normalgleichungen:

$$\|G_{\lambda\mu}\| = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline g_{11} a_1 a_1 & g_{11} a_1 b_1 & -g_{11} a_1 a_1 & -g_{11} a_1 b_1 \\ \hline +g_{22} a_2 a_2 & +g_{22} a_2 b_2 & & \\ \hline +g_{33} a_3 a_3 & +g_{33} a_3 b_3 & & \\ \hline g_{11} a_1 b_1 & g_{11} b_1 b_1 & -g_{11} a_1 b_1 & -g_{11} b_1 b_1 \\ \hline +g_{22} a_2 b_2 & +g_{22} b_2 b_2 & & \\ \hline +g_{33} a_3 b_3 & +g_{33} b_3 b_3 & & \\ \hline -g_{11} a_1 a_1 & -g_{11} a_1 b_1 & g_{11} a_1 a_1 & g_{11} a_1 b_1 \\ \hline & & +g_{44} a_4 a_4 & +g_{44} a_4 b_4 \\ \hline & & +g_{55} a_5 a_5 & +g_{55} a_5 b_5 \\ \hline -g_{11} a_1 b_1 & -g_{11} b_1 b_1 & g_{11} a_1 b_1 & g_{11} b_1 b_1 \\ \hline & & +g_{44} a_4 b_4 & +g_{44} b_4 b_4 \\ \hline & & +g_{55} a_5 b_5 & +g_{55} b_5 b_5 \\ \hline \end{array} \quad \|F_{\lambda}\| = \begin{array}{|c|} \hline -a_1 g_{11} f^1 \\ \hline -a_2 g_{22} f^2 \\ \hline -a_3 g_{33} f^3 \\ \hline -b_1 g_{11} f^1 \\ \hline -b_2 g_{22} f^2 \\ \hline -b_3 g_{33} f^3 \\ \hline +a_1 g_{11} f^1 \\ \hline -a_4 g_{44} f^4 \\ \hline -a_5 g_{55} f^5 \\ \hline +b_1 g_{11} f^1 \\ \hline -b_4 g_{44} f^4 \\ \hline -b_5 g_{55} f^5 \\ \hline \end{array}$$

### 3.2 Behandlung als Stabfachwerk:

Das der obigen Ausgleichsaufgabe äquivalente mechanische Problem kann man folgendermassen stellen:

Ausgehend von einer ungespannten Nullage werden die einzelnen Stäbe um Beträge verlängert bzw. verkürzt, die den Widersprüchen  $f^\alpha$  proportional sind.

Dadurch wird das Stabfachwerk elastischen Deformationen unterworfen: Einerseits werden die freien Knotenpunkte (1 und 2) gewisse Verschiebungen erfahren, andererseits werden auch die Stäbe selbst elastische Deformationen erleiden.

Der Gleichgewichtszustand, den ein solches System einnehmen wird, ist dadurch gekennzeichnet, dass die Summe der in jedem Knotenpunkt wirkenden Kräfte zu Null wird.

Die Längenänderungen der Stäbe bei eingetretenem Gleichgewicht errechnen sich aus:

$$\begin{aligned} ds^\alpha &= -f^\alpha + (dX^K - dX^i) \cos \nu_\alpha + (dY^K - dY^i) \sin \nu_\alpha \\ &= -f^\alpha + (dX^K - dX^i) a_\alpha + (dY^K - dY^i) b_\alpha \end{aligned}$$

Die demzufolge auftretenden Spannungen werden:

$$P^\alpha = \frac{E^\alpha \cdot S^\alpha}{L^\alpha} \cdot ds^\alpha$$

bzw. wenn man für die mech. Konstanten  $\frac{E^\alpha S^\alpha}{L^\alpha} = g_{\alpha\alpha}$  setzt.

$$P^\alpha = g_{\alpha\alpha} \cdot ds$$

Die Komponenten dieser Kräfte in den Richtungen der Koordinatenachsen sind:

$$P_x^\alpha = a_\alpha \cdot g_{\alpha\alpha} \cdot ds^\alpha$$

$$P_y^\alpha = b_\alpha \cdot g_{\alpha\alpha} \cdot ds^\alpha$$

Die Gleichgewichtsbedingung verlangt, dass in jedem Knotenpunkt die Summe der dort wirkenden Kräfte zu Null werden muss.

$$\sum_{\alpha=1}^n P_x^\alpha = 0$$

$$\sum_{\alpha=1}^n P_y^\alpha = 0$$

Substituiert man nun, so wird

$$\sum_{\alpha=1}^n a_\alpha \cdot g_{\alpha\alpha} \cdot ds^\alpha = 0$$

$$\sum_{\alpha=1}^n b_\alpha \cdot g_{\alpha\alpha} \cdot ds^\alpha = 0$$

und, nach Multiplikation und Neuordnung:

$$\sum_{\alpha=1}^n ( -g_{\alpha\alpha} \cdot a_\alpha \cdot a_\alpha \cdot dX^i - g_{\alpha\alpha} a_\alpha \cdot b_\alpha \cdot dY^i + g_{\alpha\alpha} a_\alpha \cdot a_\alpha \cdot dX^k + g_{\alpha\alpha} \cdot a_\alpha \cdot b_\alpha \cdot dY^k ) = \sum_{\alpha=1}^n g_{\alpha\alpha} \cdot a_\alpha \cdot f^\alpha$$

$$\sum_{\alpha=1}^n ( -g_{\alpha\alpha} a_\alpha \cdot b_\alpha \cdot dX^i - g_{\alpha\alpha} b_\alpha \cdot b_\alpha \cdot dY^i + g_{\alpha\alpha} a_\alpha \cdot b_\alpha \cdot dX^k + g_{\alpha\alpha} b_\alpha \cdot b_\alpha \cdot dY^k ) = \sum_{\alpha=1}^n g_{\alpha\alpha} \cdot b_\alpha \cdot f^\alpha$$

Setzt man in diese allgemeinen Beziehungen die Werte des obigen Beispiels ein, so erhält man für die beiden freien Knotenpunkte 1 und 2 je ein Paar derartiger Gleichungen. Ein Vergleich mit den Matrizen der Normalgleichungskoeffizienten und Konstanten zeigt unmittelbar die Identität der beiden Gleichungssysteme.

#### 4. Die Bedeutung der Kofaktoren in analogen elastischen Systemen.

In Abschnitt 2 wurde gezeigt, dass der Ausdruck  $G_{\lambda\mu} X^\mu$  die Summe aller in Richtung der Grösse  $X^\lambda$  wirkenden Kräfte, zufolge der Veränderungen  $X^\mu$  darstellen.

Lässt man nun in  $X^i$  eine Kraft  $P^i$  von aussen angreifen, dann wird das System einen Gleichgewichtszustand einnehmen, wenn das folgende Gleichungssystem erfüllt ist:

$$\begin{aligned}
 G_{1\mu} X^\mu &= 0 \\
 G_{2\mu} X^\mu &= 0 \\
 \dots\dots\dots \\
 G_{i\mu} X^\mu &= P^i && [4] \\
 \dots\dots\dots \\
 G_{n\mu} X^\mu &= 0
 \end{aligned}$$

Löst man dieses Gleichungssystem nach den  $X^\mu$  auf, so erhält man diejenigen Veränderungen  $X^\mu$ , die durch die von aussen wirkende Kraft  $P^i$  im elastischen System hervorgerufen wurde.

Wählt man insbesondere die Kraft  $P^i$  als Einheitskraft, und lässt sie der Reihe nach in sämtlichen  $X^\lambda$  angreifen, so erhält man jedesmal als Lösung des Gleichungssystems [4] eine Gruppe  $X^\mu$ , die, wie leicht einzusehen ist, ident mit den Werten  $G^{i\mu}$ , d. h. mit den Werten der i-ten Zeile der zu den  $G_{\lambda\mu}$  inversen Matrix  $G^{\lambda\mu}$  ist. Diese Werte sind aber bekanntlich die Kofaktoren der  $X^\lambda$ .

$$\overline{X^\lambda}, \overline{X^\mu} = G^{\lambda\mu}$$

Damit ist also bewiesen, dass die elastischen Formänderungen der Grössen  $X^\mu$  unter Einwirkung einer Einheitskraft in  $X^\lambda$  den Kofaktoren  $\overline{X^\lambda}, \overline{X^\mu}$  proportional sind.

Wie natürlich zu erwarten ist, reichen die Analogien in vielen Beziehungen weiter. Es kann z. B. auch gezeigt werden, dass die Veränderungen der  $P^\alpha$  bei Einwirkung von Einheitskräften auf die  $X^\lambda$  den Kofaktoren zwischen diesen Grössen, also den  $\overline{X^\alpha}, \overline{P^\lambda}$  proportional sind.

Aus der Ausgleichsrechnung erhält man folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned}
 \overline{X^\lambda}, \overline{P^\alpha} &= \overline{X^\lambda}, \overline{p^\alpha} + e^{\alpha'} = \overline{X^\lambda}, \overline{p^\alpha} + \overline{X^\lambda}, e^{\alpha'} \\
 &= \overline{X^\lambda}, \overline{p^\alpha} + \overline{X^\lambda}, a_{\lambda'}^{\alpha'} \overline{X^{\lambda'}} - \overline{f^{\alpha'}} \\
 &= \overline{X^\lambda}, \overline{p^\alpha} + \overline{X^\lambda}, a_{\lambda'}^{\alpha'} \overline{X^{\lambda'}} - \overline{X^\lambda}, \overline{f^{\alpha'}}
 \end{aligned}$$

da die  $f^{\alpha'}$  als stochatischen Anteil nur die  $p^{\alpha'}$  enthalten, ist

$$\overline{X^\lambda}, \overline{f^{\alpha'}} = \overline{X^\lambda}, \overline{p^{\alpha'}}$$

und damit wird schliesslich

$$\overline{X^\lambda}, \overline{P^\alpha} = \overline{X^\lambda}, a_{\lambda'}^{\alpha'} \overline{X^{\lambda'}} = \overline{a_{\lambda'}^{\alpha'} X^\lambda}, \overline{X^{\lambda'}} = a_{\lambda'}^{\alpha'} \cdot G^{\lambda\lambda'} \quad [5]$$

Für das analoge mechanische System kann man die Veränderungen der  $p^\alpha$  zufolge einer Veränderung  $X^i$  aus der Beziehung

$$dP^{\alpha(i)} = a_{\lambda}^{\alpha} X^{\lambda(i)}$$

erhalten, wobei die  $X^{\lambda(i)}$  die Veränderungen der  $X^\lambda$  zufolge der Einwirkungen einer Einheitskraft auf  $X^i$  darstellen.

Man erhält also tatsächlich: Die Veränderungen der  $P^\alpha$  zufolge der Einwirkung einer Einheitskraft auf  $X$  sind den Kofaktoren zwischen diesen Grössen, den  $X^\lambda$ ,  $P^\alpha$  proportional.

Die zuletzt gefundene Beziehung ist auch umkehrbar: Nicht nur die Deformationen der  $P^\alpha$  unter Einwirkung von Einheitskräften in  $X^\lambda$ , sondern auch die Deformationen der  $X^\lambda$  unter Einwirkung von Einheitskräften in den  $P^\alpha$  sind den Kofaktoren zwischen diesen Grössen, den  $X^\lambda$ ,  $P^\alpha$  proportional.

In den Grössen  $F_\lambda = a_\lambda^\alpha g_{\alpha\beta} f^\beta$  wurde der Ausdruck  $g_{\alpha\beta} f^\beta$  als die in Richtung  $P^\beta$  wirkende Kraft zufolge der Deformation  $f^\beta$  interpretiert. Soll jedoch in Richtung  $P^\beta$  nur eine Einheitskraft wirksam sein, dann muss  $g_{\alpha\beta} f^\beta = 1$  und damit  $F_\lambda = a_\lambda^\alpha$  werden.

Setzt man diese Werte in die Normalgleichungen (Elastizitätsgleichungen) ein, so erhält man

$$G_{\lambda\mu} X^\mu = a_\lambda^\alpha$$

und, wenn man nach  $X^\mu$  auflöst

$$X^\mu = a_\lambda^\alpha \cdot G^{\lambda\mu} = X^\mu, P^\alpha \quad [6]$$

Die eben abgeleiteten Beziehungen lassen den Schluss zu, dass allgemein gilt:

In einem analogen elastischen System ist die Veränderung einer Grösse unter Einwirkung einer Einheitskraft in einer anderen Grösse proportional dem Kofaktor zwischen diesen beiden Grössen.

Aus dem eben Gefundenen, zusammen mit dem Superpositionsgesetz, könnte eine weitere Beziehung abgeleitet werden, die man aber auch durch zweckmässige Umwandlungen der Ausgleichsformeln erhält:

Die Beziehung

$$X^\mu = G^{\lambda\mu} \cdot F_\lambda$$

kann man folgendermassen in Worten ausdrücken: Man erhält die Verschiebungen  $X^\mu$ , wenn man die Summen der in allen  $X^\lambda$  wirkenden Kräfte mit der Kofaktorenmatrix  $X^\lambda$ ,  $X^\mu$  multipliziert.

Wandelt man den obigen Ausdruck folgendermassen um:

$$\begin{aligned} X^\mu &= G^{\lambda\mu} \cdot F_\lambda \\ &= G^{\lambda\mu} \cdot g_{\alpha\beta} \cdot a_\lambda^\alpha \cdot f^\beta \\ &= a_\lambda^\alpha \cdot G^{\lambda\mu} \cdot g_{\alpha\beta} \cdot f^\beta \\ &= X^\mu, P^\alpha \cdot g_{\alpha\beta} \cdot f^\beta \end{aligned} \quad [7]$$

so kann man die erhaltenen Beziehungen [7] wieder in Worten ausdrücken: man erhält die Verschiebungen  $X^\mu$  ebenfalls, wenn man die in den  $P^\beta$  wirk-

samen Kräfte mit der Kofaktorenmatrix  $\overline{X^\mu}$ ,  $P^\beta$  multipliziert.

Eine gleichartige Beziehung lässt sich auch für das Standardproblem I nachweisen (Ausgleichung bedingter Beobachtungen: siehe Anhang): Die Verbesserungen sind

$$e^\alpha = g^{\alpha\beta} u_\beta^\rho K_\rho$$

substituiert man für die Korrelaten

$$K_\rho = G_{\rho\tau} t^\tau$$

so wird weiter

$$e^\alpha = g^{\alpha\beta} \cdot u_\beta^\rho \cdot G_{\rho\tau} \cdot t^\tau$$

Berechnet man nun andererseits die Kofaktoren zwischen den  $e^\alpha$  und  $t^\tau$

$$\begin{aligned} \overline{e^\alpha, t^\tau} &= g^{\alpha\beta} u_\beta^\rho \overline{G_{\rho\tau} t^\tau, t^\tau} \\ &= g^{\alpha\beta} u_\beta^\rho \overline{G_{\rho\tau} G^{\tau\tau'}} \end{aligned}$$

(bekanntlich sind die  $t^\tau$ ,  $t^{\tau'}$  ident mit den  $G^{\tau\tau'}$ ) so erhält man, da die Grössen  $G_{\rho\tau}$  und  $G^{\tau\tau'}$  zueinander invers sind, weiter:

$$\overline{e^\alpha, t^\tau} = g^{\alpha\beta} u_\beta^\tau \quad [9]$$

Setzt man diese Beziehung in [8] ein, so wird sie zu

$$e^\alpha = \overline{e^\alpha, t^\rho} G_{\rho\tau} t^\tau \quad [10]$$

Da die  $G^{\rho\tau}$  ident mit den Kofaktoren der  $t^\rho$  sind, müssen die zu ihnen inversen  $G_{\rho\tau}$  den Gewichten der  $t^\rho$  entsprechen.

Man kann also die Beziehung [10] wieder folgendermassen in Worten ausdrücken: Man erhält die Grössen  $e^\alpha$ , wenn man die mit ihren Gewichten  $G_{\rho\tau}$  multiplizierten Widersprüche  $t^\tau$  mit den Kofaktoren zwischen den  $e^\alpha$  und  $t^\rho$  multipliziert.

Man darf also annehmen, dass ganz allgemein zwischen zwei Gruppen von stochastischen Grössen  $X^i$  und  $Y^l$  folgender Zusammenhang besteht:

$$\overline{X^i, Y^l} = X^i, Y^l \cdot g_{lm} Y^m$$

worin  $\overline{X^i, Y^l}$  die Kofaktoren zwischen den  $X^i$  und  $Y^l$ , und die  $g_{lm}$  die Gewichte der  $Y^l$  bedeuten.

Diese Beziehung hat im Hinblick auf analoge elastische Systeme insofern praktische Bedeutung, als man für bestimmte häufig zu wiederholende Ausgleichsaufgaben die Kofaktoren  $X^i$ ,  $Y^l$  "messen" könnte und damit eine formelle Lösung der Ausgleichsaufgabe erzielt hätte.

Allerdings muss es sich bei den  $Y^l$  um unkorrelierte Grössen handeln, da sonst ihre Gewichtsmatrix nicht bekannt wäre.

## 5. Einige Ausgleichsprobleme und ihnen entsprechende Analogrecheneinrichtungen.

In diesem Abschnitt sollen zur Illustration des Vorhergehenden einige geodätische und photogrammetrische Ausgleichsprobleme und die hierfür vom Verfasser entwickelten Analogrecheneinrichtungen beschrieben werden.

### 5.1 Vielfache Anfelderung.

Die z. B. bei der Blockausgleichung von Aerotriangulation anwendbare Aufgabe kann folgendermassen definiert werden:

Ein Gebiet ist durch einen ungefähr quadratischen Punktraster in Sektionen geteilt. Die Koordinaten der vier Eckpunkte jeder Sektion (Bindepunkte) sowie eventuell in ihr vorhandene terrestrisch gegebene Punkte sind durch irgendeine Messmethode in jeder Sektion unabhängig bestimmt worden.

Durch lineare Ähnlichkeitstransformationen sind sämtliche Sektionen näherungsweise in ein einheitliches Koordinatensystem gebracht, wobei jedoch zufolge der unvermeidlichen Bestimmungsfehler der Koordinaten Widersprüche zwischen den einander entsprechenden Punkten einerseits und zwischen den gemessenen und den Sollwerten der gegebenen terrestrischen Punkte andererseits übrigbleiben.

Durch die Ausgleichung soll nun jede Sektion einer weiteren differentiellen Ähnlichkeitstransformation unterworfen werden mit dem Ziel, dass diese eben genannten Widersprüche bestmöglichst zum Verschwinden gebracht werden.

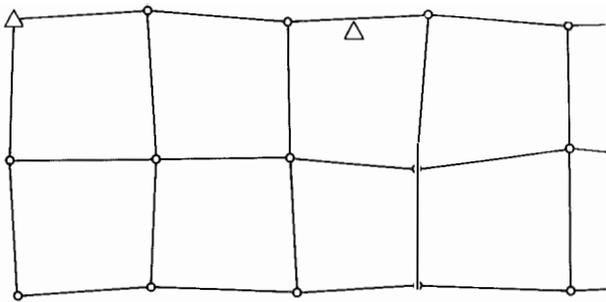


Abb. 2

Die Parameter  $X^{\wedge}$  der Ausgleichsaufgabe setzen sich zusammen:

1. Aus je vier Transformationsparametern für jede Sektion ( $ds, dr, c_x, c_y$ ) (das sind Masstabsänderung, Verdrehung und Verschiebungen in X- und Y-Richtung)

2. aus Verbesserungen zu den vorläufigen gemittelten Koordinaten der Bindepunkte (Sektionseckpunkte)  $dX_0^i$ ,  $dY_0^i$ .

Die verbesserungsbedürftigen Beobachtungen  $p^\alpha$  sind die in jeder Sektion gemessenen Koordinaten der Sektionseckpunkte und der gegebenen terrestrischen Punkte.  $X_p^i$ ,  $Y_p^i$  (Punkt  $i$  in Sektion  $p$ )

Die Verbesserungsgleichungen lauten in klassischer Schreibweise für die Bindepunkte:

$$\begin{aligned} v_{x_p^i} &= \Delta X_p^i \cdot ds_p - \Delta Y_p^i \cdot dr_p + C_{x_p} - dX_0^i - w_{x_p^i} \\ v_{y_p^i} &= \Delta Y_p^i \cdot ds_p + \Delta X_p^i \cdot dr_p + C_{y_p} - dY_0^i - w_{y_p^i} \end{aligned}$$

und für die gegebenen terrestrischen Punkte:

$$\begin{aligned} v_{x_p^i} &= \Delta X_p^i \cdot ds_p - \Delta Y_p^i \cdot dr_p + C_{x_p} && - w_{x_p^i} \\ v_{y_p^i} &= \Delta Y_p^i \cdot ds_p + \Delta X_p^i \cdot dr_p + C_{y_p} && - w_{y_p^i} \end{aligned}$$

worin bedeutet:

$v_{x_p^i}$ ,  $v_{y_p^i}$  Verbesserungen der Koordinaten des Punktes  $i$  in der Sektion  $p$ .

$\Delta X_p^i$ ,  $\Delta Y_p^i$  Koordinaten des Punktes  $i$  im lokalen Koordinatensystem der Sektion  $p$ , auf das die Transformationsparameter bezogen sind.

$dX_0^i$ ,  $dY_0^i$  Verbesserungen der vorläufigen Werte der gemittelten Koordinaten der Sektionseckpunkte (Parameter)

$w_{x_p^i}$ ,  $w_{y_p^i}$  Widersprüche.

Ohne nun auf die mathematische Behandlung der Aufgabe, die keinerlei theoretische Schwierigkeiten bietet, weiter einzugehen, soll schematisch eine mechanische Realisierung gezeigt werden.

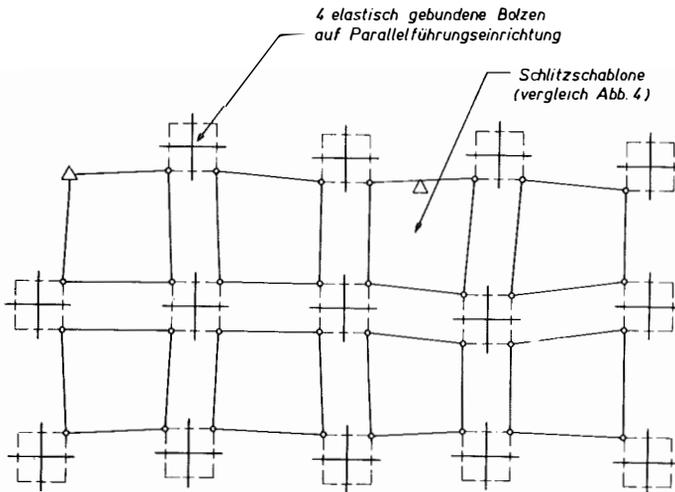


Abb. 3

Die einzelnen Sektionen werden mechanisch durch je ein Paar von Schlitzschablonen dargestellt (Abb. 4). In den Schnittpunkten einander entsprechender Schlitze werden Bolzen geführt, die damit gezwungen sind, relativ zueinander in einer geometrisch ähnlichen Lage zu verbleiben.

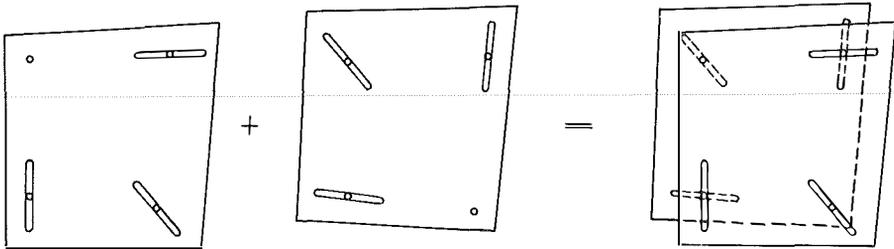


Abb. 4

Doch kann natürlich das Punktsystem einer Sektion durch Einwirkung äusserer Kräfte auf diese Bolzen Verschiebungen ( $c_x$ ,  $c_y$ ), Verdrehungen ( $dr$ ) und Masstabsänderungen ( $ds$ ) unterworfen werden.

Die Koordinaten der Bindepunkte werden durch Bolzen realisiert, die einzeln auf ihren Unterlagen durch eine Art Spiralfeder elastisch gebunden sind. Je vier derartiger elastisch gebundener Bolzen sind auf einer gemeinsamen Unterlage fixiert und können mittels einer Parallelführungseinrichtung zusammen mit dieser Unterlage parallel zu sich verschoben werden. Diese freie Verschiebbarkeit entspricht den Parametern  $dX_0^i$ ,  $dY_0^i$ .

In der Ausgangslage des Gesamtverbandes (ungespannte Nulllage) sind die vier Bolzen in der Form eines Quadrates angeordnet.

Die terrestrisch gegebenen Punkte schliesslich sind ebenfalls durch elastisch gebundene Bolzen über ihrer kartierten Lage realisiert.

Zur Lösung der Ausgleichsaufgabe werden die numerisch errechneten Widersprüche  $w_{xp}^i$ ,  $w_{yp}^i$  auf folgende Art in den mechanischen Verband eingeführt:

Die Widersprüche in den terrestrisch gegebenen Punkten durch Verschiebung der entsprechenden elastisch gebundenen Bolzen auf der Unterlage (Abb. 5a).

Die Widersprüche in den Sektionseckpunkten (Bindepunkten) durch Verschiebung der elastisch gebundenen Bolzen relativ zueinander auf ihrer frei verschiebbaren gemeinsamen Unterlage (Abb. 5b).

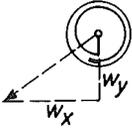


Abb. 5a

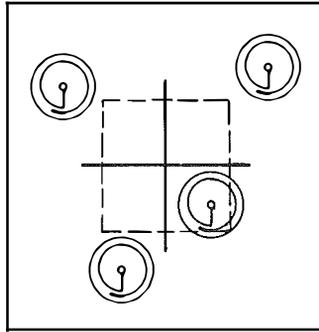
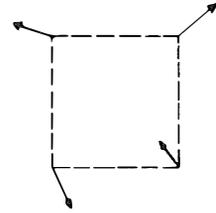


Abb. 5b



Für diese Verschiebungen wird ein wesentlich grösserer Masstab als für die Schlitzschablonen gewählt.

Durch die in den Nullverband eingeführten Veränderungen beginnen im elastischen System Kräfte zu wirken, die einerseits in Veränderungen der Freiheitsgrade (Transformationsparameter der Sektionen und Verschiebungen der die Bolzen der Sektionseckpunkte tragenden gemeinsamen Unterlagen), andererseits in Formänderungen der elastisch gebundenen Bolzen resultieren.

Diese letzteren entsprechen den Verbesserungen der Beobachtungen  $v_{x_p}^i$ ,  $v_{y_p}^i$ .

Nimmt das Gesamtsystem einen Gleichgewichtszustand ein, so ist, entsprechend dem in den vorigen Abschnitten Gesagten, das gewünschte Ausgleichsziel erreicht.

## 5.2 Ausgleichung von Trilaterationsnetzen.

Diese Aufgabe ist mechanisch ziemlich direkt zu simulieren. Die Punkte des Netzes werden durch Bolzen realisiert, wobei die koordinatenmässig bekannten Punkte über ihrer kartierten Lage fixiert, die neu zu bestimmenden Punkte dagegen frei verschiebbar bleiben.

Die gemessenen Strecken werden durch Vorrichtungen dargestellt, in denen der eine Streckenendpunkt an einem Stahlstab fixiert, der andere Streckenendpunkt jedoch durch Federn elastisch festgehalten wird, sodass er unter Kraftwirkung in der Stabrichtung verschiebbar ist.

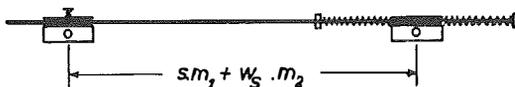


Abb. 6

Man bestimmt die ungespannte Nulllage des mechanischen Systems indem man in die Streckenstäbe die gemessenen Distanzen ( $s$ ) im Kartiermassstab ( $m_1$ ) einführt. In diesem Masstab sind die auszugleichenden Messfehler der Strecken nicht fühlbar.

Die Lage der Neupunktsbolzen wird markiert. Nun werden die in den Streckenstäben eingeführten Distanzen um Beträge verlängert bzw. verkürzt, die den errechneten Widersprüchen ( $\omega_s$ ) in einem stark vergrösserten Massstab proportional sind ( $\omega_s m_2$ ).

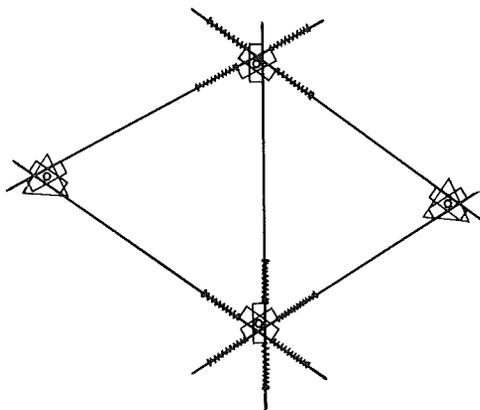


Abb.7 (vergleich Abb.1)

Auf Grund der damit wirksam werdenden Kräfte werden die Bolzen, die den Neupunkten entsprechen, gewisse Verschiebungen erfahren. Nimmt das System einen Gleichgewichtszustand ein, dann entsprechen diese Verschiebungen den gesuchten Parametern (ist gleich Verbesserungen der vorläufigen Koordinaten der Neupunkte) und zwar in demselben vergrösserten Masstab, in dem die Widersprüche eingeführt wurden.

Die (ungespannte) Nulllage eines solchen analogen Systems eignet sich auch besonders gut für die direkte mechanische Messung der Kofaktoren bzw. der Bestimmungsstücke der Fehlerellipsen für die neu zu bestimmenden Punkte. Damit bietet eine solche Einrichtung nicht nur Vorteile bei der Netzberechnung, sondern bereits bei der Netzplanung.\*

\* Eine ausführlichere Beschreibung dieser vom Verfasser entwickelten Analogrecheneinrichtung für Trilaterationsnetzberechnungen sowie der Arbeitsmethode und Erfahrungen mit ihr wird in einem weiteren Aufsatz erfolgen.

### 5.3 Ausgleichung von Differenzen zwischen ersten Summationen von Beobachtungen und Absolutmessungen dieser Werte mit geringerer Genauigkeit.

Diese in allgemeiner Form beschriebene Ausgleichsaufgabe tritt bei einer Reihe von geodätischen bzw. photogrammetrischen Problemen auf:

1. Wenn bei einem Polygonzug die Brechungswinkel aufeinanderfolgender Seiten und gleichzeitig auch die magnetischen Azimute dieser Seiten gemessen werden.
2. Wenn bei photogrammetrischer Aerotriangulation die durch fortlaufenden Folgebildanschluss erhaltenen Werte der Kammerneigungen  $\varphi^i$  und  $\omega^i$  mit den aus Hilfsgeräten (Horizontkammern, Gyroskop, Solarperiskop etc) erhaltenen Werte dieser Grössen verglichen werden sollen.
3. Wenn die durch Aerotriangulationen bestimmten Werte  $Z^i$  (Abstand der Nadirpunkte von den entsprechenden Projektionszentren) mit den entsprechenden aus Radaraltimetern erhaltenen Werte verglichen werden. (Durch diese Grössen wird der Modellmasstab kontrolliert)

Alle diese Aufgaben haben einige gemeinsame wesentliche Charakteristiken:

1. Die Relativmessungen haben eine wesentlich höhere Genauigkeit als die Absolutmessungen.
2. Durch die Summation der Fehler der Relativmessungen wird die absolute Genauigkeit jedoch rasch verringert.
3. In der Praxis verwendet man bis jetzt im allgemeinen bei allen diesen Aufgaben (aus Scheu vor der sonst notwendigen Ausgleichung) nur eine der beiden Beobachtungsgruppen.
4. Eine gleichzeitige Verwendung beider Beobachtungsgruppen unter Ausgleichung der Widersprüche würde jedoch zu sehr viel besseren Resultaten führen, da sowohl die hohe Relativgenauigkeit der ersten Gruppe, als auch die bessere Absolutgenauigkeit der zweiten Gruppe erhalten oder sogar noch gesteigert würde.

Zur Verfügung steht eine graphische Ausgleichungsmethode, bei der die Differenzen zwischen den absolut gemessenen Werten und den entsprechenden Summationen der relativen Messungen graphisch aufgetragen werden, und dann versucht wird, durch diese Werte hindurch eine ausgleichende Kurve zu legen.

Eine dem gleichen Problem analoge mechanische Recheneinrichtung würde schematisch folgendermassen aussehen:

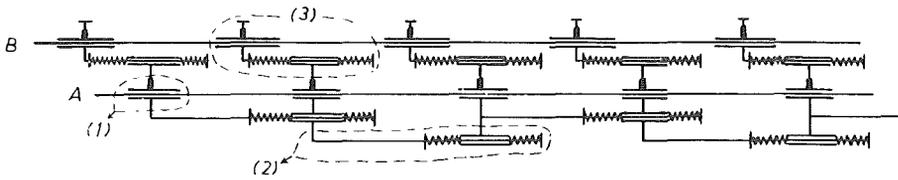


Abb. 8

Die auf der Schiene A verschiebbaren Einheiten (1) korrespondieren mit den Parametern  $X^\lambda$ . Sie sind jeweils mit den beiden Nachbareinheiten durch einen elastischen Stab (2) verbunden. Ausserdem sind die auf der Schiene B gleitenden Einheiten (3) durch Klemmen zu fixieren. Die auf diesen Einheiten (3) elastisch gebundenen Bolzen können ebenfalls mit den Einheiten (1) verbunden werden.

In der Ausgangslage werden die Einheiten (3) derart fixiert, dass sämtliche Federn ungespannt sind.

Für die Ausgleichung werden die Einheiten (3) um Beträge verschoben und wieder fixiert, die den Widersprüchen zwischen den absolut gemessenen Werten und den entsprechenden Summationen der Relativmessungen proportional sind.

Wenn die Elastizitätsfaktoren (Federnkonstanten) der in den elastischen Stäben (2) und den Einheiten (3) verwendeten Federn proportional den Gewichten der Relativ- und Absolutmessungen sind, entspricht der Gleichgewichtszustand des elastischen Systems der gesuchten Ausgleichung, und die Verschiebungen der Einheiten (1) aus ihrer Position in der Ausgangslage den Verbesserungen der vorläufigen Werte der Parameter.

#### 5.4 Ausgleichung von Differenzen zwischen zweiten Summationen von Beobachtungen und Absolutmessungen dieser Werte mit geringerer Genauigkeit.

Auch diese Ausgleichungsaufgabe tritt bei einer Reihe von photogrammetrischen Problemen auf.

1. Bei der Ausgleichung von den durch Aerotriangulation erhaltenen bz-Werten und den ihnen entsprechenden Statoskopablesungen.
2. Bei der Ausgleichung von den durch Aerotriangulation erhaltenen Koordinaten der Aufnahmestationen und den ihnen entsprechenden Shoran-Koordinaten.

Bei diesen Aufgaben gelten die im vorigen Abschnitt beschriebenen Charakteristiken in noch stärkerem Masse.

Für die Ausglei chung kann folgende mechanische Einrichtung verwendet werden:



Abb. 9

Eine Anzahl starrer Stabstücke ist durch elastische Gelenke miteinander verbunden und zwar derart, dass der Gesamtstab im Ruhezustand eine Gerade bildet.

Denkt man sich nun die Verbesserung einer Relativbeobachtung  $p^\alpha$  durch die seitliche Ausbiegung eines Stabes gegenüber seinem vorhergehenden realisiert, d. h. also durch eine elastische Deformation des die beiden aufeinanderfolgenden Stabstücke verbindenden elastischen Gelenkes,

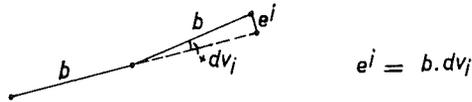


Abb. 10

dann stellt die seitliche Ausbiegung  $u^i$  des Gesamtstabes am  $(i + 1)$ -ten Gelenk die zweite Summe aller Werte  $e^i$  dar.

$$u^i = \sum_{j=1}^i \sum_{\alpha=1}^j e^\alpha$$

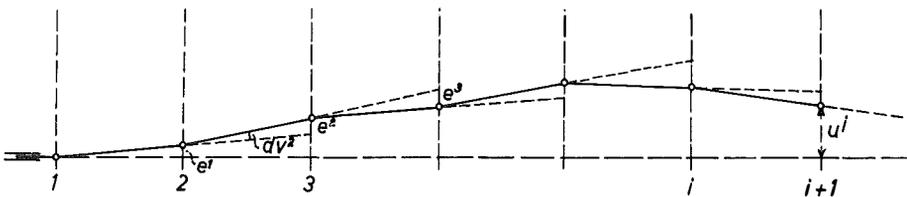


Abb. 11

Die Widersprüche  $f^\alpha$ , die zwischen den zweiten Summen der Relativmessungen und den ihnen entsprechenden Absolutbeobachtungen bestehen, werden dadurch realisiert, dass man elastisch gebundene Führungen um proportionale Beträge quer zur Stabachse versetzt, fixiert.

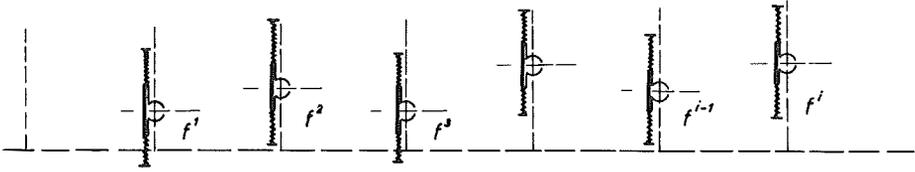


Abb. 12

Spannt man dann den elastischen Gesamtstab in diese Führungen ein, so entsprechen die in einem Gleichgewichtszustand erhaltenen Querverschiebungen der Gelenkspunkte den gesuchten Parametern  $X^\lambda$ , d. h. den Verbesserungen der vorläufigen Werte der zweiten Summationen der Relativbeobachtungen. Unter der Voraussetzung natürlich, dass die elastischen Widerstände erstens gegen eine Verbiegung aufeinanderfolgender Stabstücke (Deformation der elastischen Gelenke) und zweitens gegen eine Verschiebung der elastisch gebundenen Führungen den Gewichten der Relativ- und Absolutmessungen proportional sind.

Für praktische Ausgleichsaufgaben kann die Vorrichtung insofern vereinfacht werden, als an Stelle des beschriebenen elastischen Stabes, (bestehend aus einer Anzahl starrer Stabstücke, die durch elastische Gelenke miteinander verbunden sind) ein kontinuierlich elastischer Stab verwendet wird.

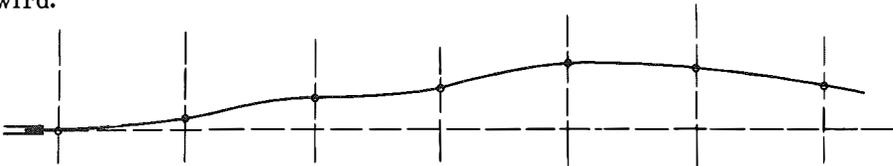


Abb. 13

Ein solcher elastischer Stab wird unter Einfluss der Querkräfte in Form einer glatten Kurve deformiert, wobei die Sehnen zwischen den den Beobachtungen entsprechenden Punkten die Rolle der Stabstücke, und das Integral über die differentiellen Winkeldeformationen die Rolle der Abbiegungen in den elastischen Gelenken übernehmen.

$$d\nu^i = \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \delta\nu$$

Eine weitere vom Verfasser entwickelte Analogrecheneinrichtung für die Höhenblockausgleichung von Aerotriangulationsstreifen ist in Photogrammetria 1957/58, Heft 4, beschrieben

## 6. Die Fehlerellipse.

Bei manchen Ausgleichsproblemen, in denen die Parameter Punktkoordinaten darstellen, ist der Praktiker für die Bewertung der Ergebnisse nicht so sehr an der Kenntnis der Kofaktoren sondern mehr an den Bestimmungsstücken der Fehlerellipsen interessiert.

Diese Bestimmungsstücke können nach bekannten Formeln (2) aus den Kofaktoren errechnet werden,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\theta &= \frac{2 G^{ik}}{G^{ii} - G^{kk}} \\ A^2 &= \frac{G^{ii} + G^{kk} + K}{2} & B^2 &= \frac{G^{ii} + G^{kk} - K}{2} \\ K &= \sqrt{(G^{ii} + G^{kk})^2 + 4G^{ik}} \end{aligned}$$

es wäre natürlich einfacher, wenn sie anstelle dessen wie die Kofaktoren direkt mechanisch bestimmbar wären.

Dass dies tatsächlich möglich ist, lässt sich auf Grund einiger einfacher Ueberlegungen leicht nachweisen:

Bekanntlich ist die Fehlerellipse invariant gegen Koordinatentransformationen.

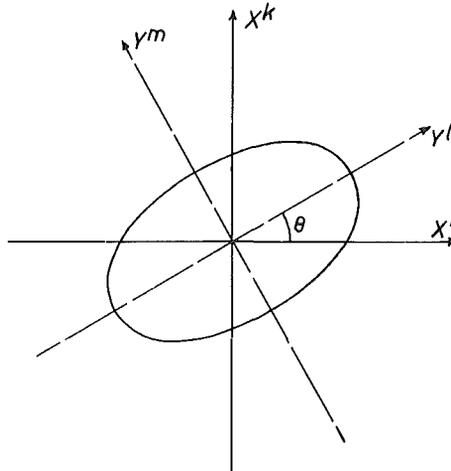


Abb. 14

Denkt man sich also für eine bestehende Fehlerellipse ein neues Koordinatensystem  $Y^l$ ,  $Y^m$  derart gelegt, dass die Koordinatenachsen mit den Hauptachsenrichtungen der Fehlerellipse zusammenfallen und lässt nun eine Einheitskraft in Richtung von  $Y^l$  wirken, so erhält man als resultierende Verschiebung den Kofaktor  $Y^l$ ,  $Y^l$ .

Da bei einer derartigen Wahl des Koordinatensystems zwischen  $Y^l$  und  $Y^m$  keine Korrelation besteht, d. h.  $\overline{Y^l Y^m} = 0$ , entspricht die resultierende Verschiebung  $\overline{Y^l}, \overline{Y^l}$  direkt dem Quadrat der einen Hauptachse. Das gleiche gilt auch für die zweite Hauptachse.

Zur Bestimmung der Fehlerellipse ist es also nur notwendig, eine Einheitskraft in allen Richtungen wirken zu lassen. Die resultierenden Verschiebungsvektoren entsprechen dann den Quadraten der Hauptachsen der Fehlerellipse, wenn sie entweder ein Maximum oder ein Minimum werden.

#### Anhang:

Zusammenstellung von Formeln und Rechenregeln für die  
Ausgleichsrechnung nach J. M. Tienstra.

Zur Anschreibung der Rechenformeln und für theoretische Ableitungen wird mit Vorteil die Indexschreibweise (Ricci-notation) angewendet, die, der Matrizenschreibweise sehr nahe verwandt, dieser gegenüber aber den Vorteil hat, dass die Reihung von Faktoren ohne Einfluss ist und Ueberlegungen bezüglich des jeweiligen Ranges von Matrizen wegfallen.

Die hierbei angewandte Summationskonvention ist eine Uebereinkunft, der zufolge in Ausdrücken, in denen irgend ein Index bei einem Faktor unten, bei einem zweiten Faktor oben vorkommt, über diesen Index zu summieren ist. Z. B.:

$$Y^i = a_k^i X^k \quad k = 1 \dots 3$$

$$Y^i = a_1^i X^1 + a_2^i X^2 + a_3^i X^3$$

Der Rang eines Index ist die Zahlenfolge, die er durchlaufen kann. Ähnliche Indices sind solche, die den gleichen Rang haben. Sie können unter Beachtung bestimmter Regeln untereinander ausgetauscht werden.

Allgemeines Kofaktoren-Fortpflanzungsgesetz:

Bestehen zwischen zwei Gruppen von stochastischen Grössen  $Y^i$  und  $X^l$  die allgemeinen linearen (oder linearisierten) Beziehungen

$$Y^i = a_l^i \frac{X^l}{\overline{X^l}}$$

und sind die  $X^l$ ,  $X^m$  die Kofaktoren der  $X^l$ , so erhält man die Kofaktoren der  $Y^i$  aus

$$\overline{Y^i}, \overline{Y^j} = a_l^i a_m^j \overline{X^l}, \overline{X^m}$$

Standardproblem I: Ausgleichung bedingter Beobachtungen.

$p^\alpha$	Beobachtungen
$e^\alpha$	Verbesserungen der Beobachtungen
$p^\alpha$	Verbesserte Beobachtungen
$g^{\alpha\beta}$	Kofaktoren der $p$
$g^{\alpha\beta}$	Gewichte der $p$
$u_\alpha^0 P^\alpha = u_0^0$	} Bedingungs- gleichungen
$u_\alpha^0 \cdot e^\alpha = t^0$	
$t^0 = u_0^0 - u_\alpha^0 \cdot p^\alpha$	Widersprüche
$K_\rho$	Korrelaten
$G^{\rho\tau} \cdot K_\rho = t^\tau$	Normalgleichungen, wobei
$G^{\rho\tau} = u_\alpha^0 u_\beta^\tau \cdot g^{\alpha\beta}$	Lösung der Normalgleichungen
$K_\rho = G^{\rho\tau} \cdot t^\tau$	
$e^\alpha = g^{\alpha\beta} \cdot u_\beta^0 \cdot K_\rho$	Verbesserungsgleichungen

dazu wurden von Tienstra nachfolgende Beziehungen abgeleitet:

$$\overline{t^0}, \overline{t^\tau} = G^{\rho\tau}$$

Kofaktoren der Widersprüche

$$\overline{K_\rho}, \overline{K_\tau} = G^{\rho\tau}$$

Kofaktoren der Korrelaten

$$\overline{e^\alpha}, \overline{e^{\alpha'}} = g^{\alpha\beta} u_\beta^0 g^{\alpha'\beta'} u_{\beta'}^0 \cdot G^{\rho\rho'}$$

Kofaktoren der Verbesserungen

$$\overline{p^\alpha}, \overline{p^{\alpha'}} = p^\alpha, p^{\alpha'} - e^\alpha, e^{\alpha'}$$

Kofaktoren der verb. Beobachtungen.

## Standardproblem II: Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen

$p^\alpha, e^\alpha, P^\alpha, g^{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta}$	wie in Standardproblem I
$X^\lambda$	Parameter (bzw. Verbesserungen zu den vorläufigen Werten der Parameter)
$P^\alpha = a_\lambda^\alpha X^\lambda + a_o^\alpha$	Vorgegebene Beziehungen zwischen ausgeglichenen Beobachtungen und gesuchten Parametern
$e^\alpha = a_\lambda^\alpha X^\lambda - f^\alpha$	Verbesserungsgleichungen
$f^\alpha = p^\alpha - a_o^\alpha$	
$G_{\lambda\mu} X^\mu = F_\lambda$	Normalgleichungen, wobei
$G_{\lambda\mu} = g_{\alpha\beta} a_\lambda^\alpha \cdot a_\mu^\beta$	
$F_\lambda = g_{\alpha\beta} a_\lambda^\alpha \cdot f^\beta$	
$X^\mu = G^{\lambda\mu} \cdot F_\lambda$	Lösung der Normalgleichungen
$\overline{X^\mu}, X^{\mu'} = G^{\mu\mu'}$	Kofaktoren der Parameter

### Literatur:

- (1) Prof. Dr. A. Barvir: Analoge statische und geodätische Verfahren; Fachwerke, die geodätischen Winkel-Netzen entsprechen. Festschrift Eduard Dolezal, Sonderveröffentlichung 14 der Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1952

Siehe auch dort angegebene Literatur.

- (2) Prof. Dr. W. Grossmann: Grundzüge der Ausgleichsrechnung Springer Verlag, 1953
- (3) Dr. H. G. Jerie: Block Adjustment by Means of Analogue Computers. Photogrammetria Nr. 4, 1957/58

## Zusammenfassung

Nach einer Darstellung der grundsätzlichen Bedingungen, denen zu Ausgleichsaufgaben analoge elastische Systeme genügen müssen, wird eine mechanische Deutung der Formeln und Grössen von Standardproblem II gegeben.

Weiter wird bewiesen, dass in analogen elastischen Systemen die elastischen Formänderungen einer "Grösse" unter Einwirkung einer Einheitskraft auf eine andere "Grösse" den entsprechenden Kofaktoren der Ausgleichsrechnung proportional sind.

Kofaktoren und damit auch die Bestimmungsstücke von Fehlerellipsen können in analogen mechanischen Systemen also direkt "gemessen" werden.

Für eine Reihe von geodätischen und photogrammetrischen Ausgleichsaufgaben werden vom Verfasser entwickelte Analogrecheneinrichtungen schematisch beschrieben.

## Summary

After representation of those conditions which elastic systems - analogous to adjustment problems - have to satisfy, a mechanical interpretation of the formulae and expressions of standardproblem II is given.

Further it is shown that in analogue elastic systems the elastic deformation of a "variable", caused by a unit force which operates another "variable" is proportional to the corresponding cofactor in the adjustment problem.

Cofactors and consequently the parameters of the error ellipses may, therefore in analogue elastic systems be "measured" directly.

A number of analogue computers which the author has developed for some geodetic and photogrammetric adjustment problems, are described schematically.





# Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen

6 Hefte, je 32 Seiten. Jahresabonnement S 72.—.

## Sonderhefte zur Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen

- Sonderheft 1: Festschrift Eduard Doležal. Zum 70. Geburtstag. 198 Seiten, Neuauflage, 1948 Preis S 18.—. (Vergriffen)
- Sonderheft 2: Lego (Herausgeber), Die Zentralisierung des Vermessungswesens in ihrer Bedeutung für die topographische Landesaufnahme. 40 Seiten, 1935. Preis S 24.—. (Vergr.)
- Sonderheft 3: Ledersteger, Der schrittweise Aufbau des europäischen Lotabweichungssystems und sein bestanschließendes Ellipsoid. 140 Seiten, 1948. Preis S 25.—.
- Sonderheft 4: Zaar, Zweimedienphotogrammetrie. 40 Seiten, 1948. Preis S 18.—.
- Sonderheft 5: Rinner, Abbildungsgesetz und Orientierungsaufgaben in der Zweimedienphotogrammetrie. 45 Seiten, 1948. Preis S 18.—.
- Sonderheft 6: Hauer, Entwicklung von Formeln zur praktischen Anwendung der flächentreuen Abbildung kleiner Bereiche des Rotationsellipsoids in die Ebene. 31 Seiten, 1949. Preis S 15.—. (Vergriffen)
- Sonderheft 7/8: Ledersteger, Numerische Untersuchungen über die Perioden der Polbewegung. Zur Analyse der Laplace'schen Widersprüche. 59 + 22 Seiten, 1949. Preis S 25.—.
- Sonderheft 9: Die Entwicklung und Organisation des Vermessungswesens in Österreich. 56 Seiten, 1949. Preis S 22.—.
- Sonderheft 11: Mader, Das Newton'sche Raumpotential prismatischer Körper und seine Ableitungen bis zur dritten Ordnung. 74 Seiten, 1951. Preis S 25.—.
- Sonderheft 12: Ledersteger, Die Bestimmung des mittleren Erdellipsoids und der absoluten Lage der Landestriangulationen. 140 Seiten, 1951. Preis S 35.—.
- Sonderheft 13: Hubeny, Isotherme Koordinatensysteme und konforme Abbildungen des Rotationsellipsoids. 208 Seiten, 1953. Preis S 60.—.
- Sonderheft 14: Festschrift Eduard Doležal. Zum 90. Geburtstag. 764 Seiten und viele Abbildungen. 1952. Preis S 120.—.
- Sonderheft 15: Mader, Die orthometrische Schwerekorrektion des Präzisions-Nivellements in den Hohen Tauern. 26 Seiten und 12 Tabellen. 1954. Preis S 28.—.
- Sonderheft 16: Theodor Scheimpflug — Festschrift. Zum 150jährigen Bestand des staatlichen Vermessungswesens in Österreich. 90 Seiten mit 46 Abbildungen und XIV Tafeln, 1956. Preis S 60.—.
- Sonderheft 17: Ulbrich, Geodätische Deformationsmessungen an österreichischen Staumauern und Großbauwerken. 72 Seiten mit 40 Abbildungen und einer Luftbildkarten-Beilage, 1956. Preis S 48.—.
- Sonderheft 18: Brandstätter, Exakte Schichtlinien und topographische Geländedarstellung. 94 Seiten mit 49 Abbildungen und Karten und 2 Kartenbeilagen. 1957. Preis S 80.— (DM 14.—).
- Sonderheft 19: Vorträge aus Anlaß der 150-Jahr-Feier des staatlichen Vermessungswesens in Österreich, 4.—9. Juni 1956
- Teil 1: Über das staatliche Vermessungswesen, 24 Seiten, 1957. Preis S 28.—.
- Teil 2: Über Höhere Geodäsie. 28 Seiten, 1957. Preis S 34.—.
- Teil 3: Vermessungsarbeiten anderer Behörden. 24 Seiten, 1957. Preis S 28.—.
- Teil 4: Der Sachverständige. - Das k. u. k. Militärgeographische Institut. 18 Seiten, 1958. Preis S 20.—.
- Teil 5: Über besondere photogrammetrische Arbeiten. 38 Seiten, 1958. Preis S 40.—.
- Teil 6: Markscheidewesen und Probleme der Angewandten Geodäsie. 42 Seiten, 1958. Preis S 42.—.
- Sonderheft 20: Jerie, Weitere Analogien zwischen Aufgaben der Mechanik und der Ausgleichsrechnung. 24 Seiten mit 14 Abbildungen. Preis S 32.—.

Sämtliche Publikationen zu beziehen durch den  
Österreichischen Verein für Vermessungswesen

Wien VIII, Friedrich-Schmidt-Platz 3

