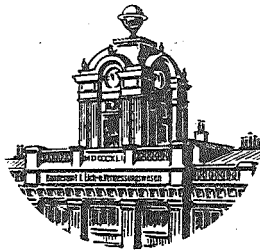


**Sonderheft 13**  
der **Österreichischen Zeitschrift**  
für **Vermessungswesen**

**Isotherme Koordinatensysteme**  
und **konforme Abbildungen des**  
**Rotationsellipsoids**

von

**Karl Hubeny, Graz**



Herausgegeben von der **Österreichischen Kommission für die**  
**Internationale Erdmessung**

**Eigentümer und Verleger:**

**Österreichischer Verein für Vermessungswesen**

**Wien, VIII., Friedrich-Schmidt-Platz 3**

**WIEN 1953**

Bisher sind folgende Sonderhefte erschienen:

- Sonderheft 1: Festschrift Eduard Dolezal, 198 Seiten, Neuauflage 1948  
Preis S 18.—
- Sonderheft 2: Die Zentralisierung des Vermessungswesens in ihrer Bedeutung für die topographische Landesaufnahme, 40 Seiten, 1935  
wird neu aufgelegt
- Sonderheft 3: Ledersteger, Der schrittweise Aufbau des europäischen Lotabweichungssystems und sein bestanschließendes Ellipsoid  
140 Seiten, 1948 Preis S 25.—
- Sonderheft 4: Zaar, Zweimedienphotogrammetrie, 40 Seiten, 1948  
Preis S 18.—
- Sonderheft 5: Rinner, Abbildungsgesetz und Orientierungsaufgaben in der Zweimedienphotogrammetrie, 45 Seiten, 1948 Preis S 18.—
- Sonderheft 6: Hauer, Entwicklung von Formeln zur praktischen Anwendung der flächentreuen Abbildung kleiner Bereiche des Rotationsellipsoids in die Ebene. 32 Seiten, 1949 Preis S 15.—
- Sonderheft 7 u. 8: Ledersteger: Numerische Untersuchungen über die Perioden der Polbewegung, 59 Seiten,  
Zur Analyse der Laplaceschen Widersprüche, 22 Seiten, 1949  
Preis S 25.—
- Sonderheft 9: Die Entwicklung und Organisation des Vermessungswesens in Österreich, I. Teil, Die Entwicklung bis zum ersten Weltkrieg, 56 Seiten, 1949 Preis S 22.—
- Sonderheft 11: Mader, Das Newtonsche Raumpotential prismatischer Körper und seine Ableitungen bis zur dritten Ordnung, 74 Seiten, 1951  
Preis S 25.—
- Sonderheft 12: Ledersteger, Die Bestimmung des mittleren Erdellipsoides und der absoluten Lage der Landestriangulationen, 140 Seiten, 1951  
Preis S 35.—
- Sonderheft 13: Hubeny, Isotherme Koordinatensysteme und konforme Abbildungen des Rotationsellipsoids, 208 Seiten, 1953,  
Preis S 60.—
- Sonderheft 14: Festschrift Eduard Dolezal, zum neunzigsten Geburtstage 1952, 800 Seiten  
Preis S 120.—

Weitere Publikationen:

- Tachymetrische Hilfstafel für sexagesimale Kreisteilung, 20 Seiten  
Normformat A 5 (148×210 mm) Preis S 10.—
- Tabuliert sind die Werte für  $\cos^2 \alpha$  und  $\frac{1}{2} \sin^2 \alpha$  auf vier Dezimalstellen von  $0^\circ$  bis  $45^\circ$  von Minute zu Minute. Daher keine Interpolation erforderlich. Infolge des praktischen Taschenformates und der besonders widerstandsfähigen Ausstattung ist die Tafel auch im Gelände verwendbar.

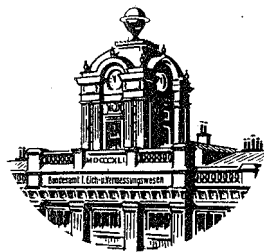
Sämtlich zu beziehen beim  
Österr. Verein für Vermessungswesen, Wien, VIII., Friedrich-Schmidtplatz 3

**Sonderheft 13**  
der **Österreichischen Zeitschrift**  
für **Vermessungswesen**

**Isotherme Koordinatensysteme  
und konforme Abbildungen des  
Rotationsellipsoids**

von

**Karl Hubeny, Graz**



Herausgegeben von der **Österreichischen Kommission für die  
Internationale Erdmessung**

**Eigentümer und Verleger:**

**Österreichischer Verein für Vermessungswesen**  
Wien, VIII., Friedrich-Schmidt-Platz 3

**WIEN 1953**

Druck: Bundesamt für Eich- u. Vermessungswesen (Landesaufnahme) in Wien

## Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Vorwort .....	1
I. Allgemeine theoretische Grundlagen	
1. Parameterdarstellung einer Fläche, krummlinige Koordinatensysteme .....	3
2. Isotherme Netze .....	5
3. Die konforme Abbildung einer Fläche in eine andere Fläche .....	8
4. Isotherme Netze am Rotationsellipsoid .....	9
5. Die Transformation der Parameter Breite und Länge in thermische Parameter .....	16
6. Meridiankonvergenz und Dichte der Koordinatenlinien in isothermen Netzen am Rotationsellipsoid .....	22
7. Die geodätischen Hauptaufgaben in isothermen Koordinaten .....	30
8. Die Beziehungen zwischen den Elementen der Geometrie am Rotationsellipsoid und in der Bildebene .....	39
9. Literaturverzeichnis .....	53
II. Die wichtigsten konformen Abbildungen des Rotationsellipsoids.	
1. Allgemeines .....	57
2. Die konforme Abbildung des Rotationsellipsoids nach Mercator .....	58
3. Die konforme Kegelprojektion .....	62
4. Die Gauß-Krügersche Abbildung (Transversale Mercatorabbildung) .....	70
a. Allgemeines .....	70
b. Die Transformation geographischer in Gauß-Krügersche Koordinaten und die inverse Transformation (Aufstellung der Abbildungsgleichungen) .....	74
c. Meridiankonvergenz und Abbildungsmaßstab ...	80
d. Richtungs- und Streckenreduktionen .....	82

	Seite
e. Gauß-Krügersche Meridianstreifen .....	85
f. Die Transformation der Gauß-Krügerschen Koordinaten zweier benachbarter Systeme ineinander .....	87
5. Die stereographische Abbildung des Ellipsoids ..	91
6. Die schiefachsige konforme Abbildung des Ellipsoids mit dem Sonderfall der querachsigen konformen Abbildung .....	98
7. Die konforme Abbildung eines Rotationsellipsoids in ein anderes Rotationsellipsoid .....	104
8. Die Transformation verschiedenartiger thermischer Parameter ineinander .....	116
9. Literaturverzeichnis .....	123

### III. Tafeln.

1. Koeffizienten der Reihenformeln zur Berechnung der isometrischen Breite .....	127
2. Tafeln für die Gauß-Krügersche Abbildung .....	128
a. Interpolationstafeln zur Berechnung der Gauß-Krügerschen aus den geographischen Koordinaten (Besselsches Ellipsoid) .....	128
b. Interpolationstafeln zur Berechnung der geographischen aus den Gauß-Krügerschen Koordinaten (Besselsches Ellipsoid) .....	146
c. Interpolationstafeln zur Berechnung der Gauß-Krügerschen Koordinaten in einem Meridianstreifen aus den Koordinaten im benachbarten Streifen (Besselsches Ellipsoid) .....	168
d. Koeffizienten der Potenzreihen zur Berechnung der Gauß-Krügerschen aus den geographischen Koordinaten und umgekehrt für breite Streifen (Besselsches und Internationales Ellipsoid) .	180
e. Koeffizienten der Potenzreihen zur Berechnung der Meridiankonvergenz und des Abbildungsmaßstabes aus geographischen und Gauß-Krügerschen Koordinaten (Besselsches und Internationales Ellipsoid) .....	190
f. Tafeln zur Berechnung der Richtungs- und Entfernungsreduktion .....	195

	Seite
3. Koeffizienten der Potenzreihen der konformen Kegelprojektion, der stereographischen und der querachsigen Abbildung (Besselsches und Internationales Ellipsoid) .....	200
a. Konforme Kegelprojektion .....	201
b. Stereographische Abbildung .....	204
c. Querachsige konforme Abbildung .....	206
Fünfstellige Tafel der Werte von $\binom{n}{2}$ für $n = 0$ bis $n = 1$ .....	208

## V o r w o r t .

Die vorliegende Arbeit ist für den Studierenden und den Praktiker des Vermessungswesens bestimmt und soll einen doppelten Zweck erfüllen: Sie soll einerseits neben einer Einführung in die Theorie der konformen Abbildungen die Entwicklung der Formelsysteme und eine Zusammenstellung derselben für die in der Geodäsie gebräuchlichsten konformen Abbildungen des Rotationsellipsoids geben, andererseits soll sie durch die beigefügten Tafeln ein Hilfsmittel in der praktischen Anwendung der konformen Abbildungen sein.

Dieser Absicht entsprechend wurde die Arbeit in drei Teile gegliedert und zwar in I.: Allgemeine theoretische Grundlagen, II.: Die wichtigsten konformen Abbildungen des Rotationsellipsoids und III.: Tafeln für die praktische Anwendung dieser konformen Abbildungen. Es ist selbstverständlich, daß der gedachte Zweck für die Art der Behandlung des Themas bestimmend war. Im ersten allgemeinen Teil sollen in gedrängter Kürze die wichtigsten theoretischen Grundlagen konformer Abbildungen unter dem Gesichtspunkt der Beschränkung auf kleine Bereiche des Rotationsellipsoids vermittelt werden. Unter Zugrundelegung der für die Theorie der konformen Abbildungen fundamentalen isothermen Koordinaten wurde versucht, zunächst in diesen krummlinigen Flächenkoordinaten alle Probleme und Begriffe in der abzubildenden Fläche selbst flächentheoretisch zu entwickeln und zu deuten. Die konforme Zuordnung einer zweiten Fläche, meist der Bildebene, wird so zu einem sich gleichsam von selbst ergebenden, äußerst durchsichtigen Vorgang. Ein Übergreifen auf den geometrischen Teil der höheren Geodäsie war damit notwendigerweise bedingt; es scheint mir dies aber durchaus berechtigt zu sein, da so der Weg zu einer gedanklich einheitlichen, geschlossenen Darstellung vorgezeichnet ist. Letzten Endes ist damit auch der Grund erklärt, warum die konformen Abbildungen kleiner Bereiche des Rotationsellipsoids - eine Spezialisierung in einem Teilgebiet der Abbildungslehre - in der vorliegenden Arbeit für sich allein behandelt werden.

Im zweiten Teil verfolgten alle - im gleichen Sinne geführten - Entwicklungen naturgemäß den Zweck, Rechenformeln für die gebräuchlichsten konformen Abbildungen des Rotationsellipsoids zu entwickeln. Auf die Herleitung von besonderen Formeln für die logarithmische Rechnung wurde dabei verzichtet, da die Verwendung der Rechenmaschine für diese Rechnungen wohl allgemein üblich ist.

Um einen allzu großen Umfang der Arbeit zu vermeiden, habe ich in diesen beiden Teilen häufig wiederkehrende Entwicklungen, z.B. nach dem Taylor'schen Satz, nur angedeutet



und einfache Operationen, etwa die Bildung von Differentialquotienten u.a., stets als bekannt vorausgesetzt. Die Ergebnisse aller Entwicklungen werden, zumindest soweit es sich um die Formeln für die einzelnen Abbildungen handelt, immer bis zu den Gliedern fünfter Ordnung (einschließlich) angegeben.

Zur Ergänzung der Teile I. und II. und für ein eingehenderes Studium sei vor allem auf die - auch von mir benützte - neuere Literatur hingewiesen, von welcher ich in erster Linie die vielen Arbeiten von Wl.K.Hristow in der Deutschen Zeitschrift für Vermessungswesen, die Lehrbücher von Baeschlin, Hopfner, König u.Weise und auch das Jordan'sche Handbuch nenne. Nähere Angaben über die benützte Literatur sind den Teilen I. und II. angefügt.

Im dritten Teil werden zunächst die Zahlenwerte der Koeffizienten der Reihenentwicklungen für die gebräuchlichsten konformen Abbildungen des Bessel'schen und des Hayford'schen Ellipsoids angegeben. Der weitaus größte Raum wird hier jedoch der Gauß-Krüger'schen Abbildung des Bessel'schen Ellipsoids vorbehalten. Für die häufigsten Rechengänge in der praktischen Anwendung dieser Abbildung werden Zahlentafeln in Form von Interpolationstafeln mit zwei Eingängen mitgeteilt, mit denen sich besonders bei Benützung der Doppelrechenmaschine wohl der kürzeste Rechengang ergibt. Der Umfang der Tafelwerke ist im Großen und Ganzen auf die Ausdehnung des Bundesstaates Österreich beschränkt.

Die umfangreichen Arbeiten zur Berechnung und Zusammenstellung der erwähnten Tafelwerke wurden von meinen ebenso tüchtigen wie fleißigen Mitarbeitern, den Herren Dipl.Ing. W. Löscher und Dipl.Ing. G. Schelling, Assistenten an der Lehrkanzel für Geodäsie der Technischen Hochschule Graz, ausgeführt. Es ist mir eine angenehme Pflicht, den genannten Herren an dieser Stelle für ihre selbstlose Mitarbeit herzlich zu danken. Ebenso danke ich Herrn Dr.K.Ledersteger, Ob.Rat d.V., für einige wertvolle Hinweise.

Graz, im Herbst 1951.

K. Hubeny

## I. Allgemeine theoretische Grundlagen.

### 1. Parameterdarstellung einer Fläche, krummlinige Koordinatensysteme.

Es sei eine Fläche in einem cartesischen Koordinatensystem durch

$$z = z(x, y) \quad (1)$$

oder

$$F(x, y, z) = 0 \quad (2)$$

gegeben. Wir führen zwei beliebige Parameter  $u, v$  ein und stellen zunächst  $x$  und  $y$  als Funktionen dieser Parameter dar. Es sei

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v).$$

Durch Eintragung dieser Gleichungen in (1) folgt  $z = z(u, v)$ , womit sich die sogenannte Parameterdarstellung der Fläche aus den obigen Gleichungen in der Form

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \\ z &= z(u, v) \end{aligned} \quad (3)$$

ergibt.

Halten wir den Parameter  $v$  mit einem bestimmten Wert  $v_0$  fest und lassen wir den Parameter  $u$  alle ihm möglichen Werte durchlaufen, so erhalten wir auf der Fläche eine Kurve  $v = \text{const.}$  oder, da nur  $u$  variiert, eine  $u$ -variabel-Kurve oder einfach eine  $u$ -Linie. Durch Vertauschen des festgehaltenen mit dem variablen Parameter erhalten wir auf der Fläche ebenso eine Kurve  $u = \text{const.}$ , also eine  $v$ -variabel-Kurve oder  $v$ -Linie.

Zufolge (3) ist ein Flächenpunkt  $P_0$  durch ein Wertepaar  $u_0, v_0$  bestimmt; nach dem Vorhergehenden ist dies der Schnittpunkt der Flächenkurven (Parameterkurven)  $u = u_0$  und  $v = v_0$ . Man bezeichnet daher die Parameterkurven  $u = \text{const.}$ ,  $v = \text{const.}$  als krumme Koordinatenlinien in der Fläche; ihre Gesamtheit bildet ein die Fläche doppelt überdeckendes Netz krummer Koordinatenlinien und definiert in ihr ein krummliniges Koordinatensystem. Die Parameterwerte  $u_0$  und  $v_0$  deutet man als "krummlinige Koordinaten" des Punktes  $P_0$ .

Ein Linienelement im Raum ist durch

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (4)$$

gegeben; liegt dieses auf einer durch (3) gegebenen Fläche (Bogenelement einer Flächenkurve), so ist

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$$

Tragen wir diese Ausdrücke in (4) ein, so folgt

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 \right] du^2 \\ & + 2 \left[ \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right] du dv \\ & + \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 \right] dv^2 \end{aligned} \quad (4a)$$

Mit der Gaußschen Bezeichnung E, F, G für die Klammerausdrücke, es sind dies die Fundamentalgrößen erster Ordnung, ergibt sich das Bogenelement einer Flächenkurve durch die erste Fundamentalform

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2. \quad (5)$$

Für  $dv = 0$  erhalten wir das Bogenelement der Parameterkurve  $v = \text{const.}$  ( $u$ -variabel); ebenso für  $du = 0$  jenes der Parameterkurve  $u = \text{const.}$  ( $v$ -variabel). Es ist - der Index deutet den variablen Parameter an -  $ds_u = \sqrt{E} du$ ,  $ds_v = \sqrt{G} dv$

Die Richtung eines beliebigen Bogenelementes einer Flächenkurve wird in einem Netz krummer Koordinatenlinien durch den geodätischen Richtungswinkel desselben angegeben. Ebenso wie in ebenen cartesischen Koordinatensystem zählen wir diesen von einer Linie  $v = \text{const.}$  zur betrachteten Flächenkurve hin. Genauer: Der geodätische Richtungswinkel einer Flächenkurve in einem bestimmten Punkt ist der von der Linie  $v = \text{const.}$  durch diesen Punkt gezählte Winkel zwischen jenen Richtungen der Kurve  $v = \text{const.}$  und der Flächenkurve, in denen der Parameter  $u$  und die Bogenlänge der Flächenkurve positiv zunehmen. Den positiven Zählsinn definieren wir durch jene Drehung, die auf kürzestem Wege von der Linie  $v = \text{const.}$  zur Linie  $u = \text{const.}$  führt und zwar zwischen jenen Richtungen derselben, in denen die Parameter  $u, v$  positiv zunehmen (positive Richtungen der Linien  $u = \text{const.}, v = \text{const.}$ ).

Zwei Linien  $u = \text{const.}, v = \text{const.}$  schneiden sich unter dem Winkel  $\omega$ . Das Bogenelement in einer beliebigen Richtung läßt sich daher nach Abb. 1 auch in der Form

$$ds^2 = E du^2 + 2\sqrt{EG} \cos \omega du dv + G dv^2 \quad (6)$$

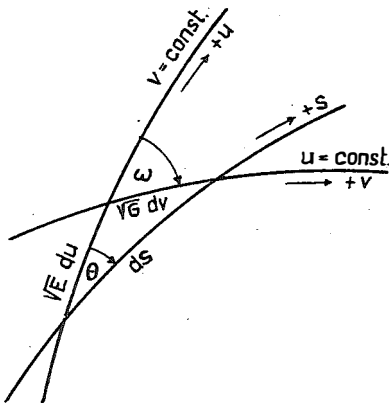


Abb. 1.

anschreiben. Eine Vergleichung mit (5) ergibt

$$\cos \omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

und damit den Schnittwinkel zweier Parameterkurven in irgendeinem Flächenpunkt. Wir erkennen, daß die Orthogonalität der krummen Koordinatenlinien durch die Bedingung  $F = 0$  ausgedrückt wird. Netze krummer Koordinatenlinien, die dieser Bedingung in allen Punkten der Fläche genügen, bezeichnen wir als orthogonale Netze krummer Koordinatenlinien.

## 2. Isotherme Netze.

Als isotherm bezeichnen wir ein Netz orthogonaler krummer Koordinatenlinien oder einfach ein orthogonales krummliniges Koordinatensystem in einer Fläche dann, wenn zwischen den Fundamentalgrößen die Bedingung  $E = G$  und, selbstverständlich,  $F = 0$  erfüllt ist. Gehen wir von einem Punkt  $u, v$  der Fläche aus und lassen wir die diesen Punkt bestimmenden Parameter um die gleichen Beträge  $\varepsilon$  zunehmen, so sind offensichtlich - für  $E = G$  - die Bogenelemente in Richtung der beiden Parameterkurven einander gleich. Die Linien  $u, u + \varepsilon$  und  $v, v + \varepsilon$  bilden auf der Fläche eine Figur, die sich mit kleiner werdendem  $\varepsilon$  immer mehr dem ebenen Quadrat annähert.

Man erklärt daher: Ein Netz orthogonaler krummer Koordinatenlinien ist isotherm, wenn die Linien  $u, u + \varepsilon, u + 2\varepsilon \dots v, v + \varepsilon, v + 2\varepsilon \dots$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  die Fläche in infinitesimale Quadrate unterteilen. Parameter, welche in der Fläche ein derartiges Netz von Parameterkurven erzeugen, heißen isometrische oder thermische Parameter. Die in diesem Zusammenhang gebrauchten Bezeichnungen isotherme Netze, auch Isothermennetze und Isothermensysteme sind gleichbedeutend und wurden aus physikalischen Gründen (Wärmelehre) gewählt; die Bezeichnung Isothermen für die Parameterkurven (Koordinatenlinien) dieser Netze stammt von Lamé.

Für thermische Parameter läßt sich das Linienelement in der charakteristischen Form

$$ds^2 = E(u, v)(du^2 + dv^2) \quad (7)$$

anschreiben. Wir werden später thermische Parameter aus einem im Hinblick auf die Entwicklung der konformen Abbildungen

leicht erklärlichen Grund nicht mehr mit  $u$  und  $v$ , sondern mit  $x$  und  $y$  bezeichnen; ebenso werden wir die Fundamentalgrößen  $E$  und  $G$  durch den Ausdruck

$$E = G = \frac{1}{m^2} \quad (8)$$

ersetzen, womit das Linienelement in die Form

$$ds^2 = \frac{1}{m^2} (dx^2 + dy^2) \quad (9)$$

umgeschrieben werden kann. Der Größe  $m$  kommt eine sehr anschauliche geometrische Bedeutung zu: Sie ist die Maßzahl der Dichte der Koordinatenlinien an der betrachteten Stelle, denn der in der Linie  $v$  oder  $y = \text{const.}$  gemessene Abstand zweier Linien  $u$ ,  $u + du$  oder  $x$ ,  $x + dx$  ist proportional  $\sqrt{E}$ ; da aber  $\sqrt{E} = \frac{1}{m}$  gesetzt wurde, ist mit  $E = G$  die obige Behauptung bewiesen.

Nicht jedes Netz orthogonaler krummer Koordinatenlinien kann unter Beibehaltung derselben Koordinatenlinien nur durch eine Änderung der Graduierung oder einfach der Bezifferung der Koordinatenlinien (dies würde der Einführung thermischer Parameter entsprechen) in ein isothermes Netz übergeführt werden. Man pflegt daher orthogonale Netze, für die diese Möglichkeit besteht, im Hinblick darauf ebenfalls als isotherm zu bezeichnen. Wir übergehen die Frage, unter welchen Voraussetzungen ein vorliegendes Netz orthogonaler krummer Koordinatenlinien unter Beibehaltung derselben Koordinatenlinien in ein isothermes Netz übergeführt werden kann und erwähnen dazu nur, daß diese Überführung lediglich durch die Zuordnung  $x = x(u)$ ,  $y = y(v)$ , also einfach durch eine Änderung der Bezifferung der Koordinatenlinien oder der Parameterwerte möglich sein muß.<sup>1</sup>

Eine andere, für die Theorie der konformen Abbildungen jedoch fundamentale Frage ist die, wie ein gegebenes Netz isothermer krummer Koordinatenlinien in ein anderes, gleichfalls isothermes Netz übergeführt werden kann, oder, genauer, welche Beziehungen zwischen zwei Paaren thermischer Parameter  $x, y$  und  $x', y'$  einer Fläche bestehen müssen.

Setzen wir für eine Fläche die thermischen Parameter  $x, y$  und  $x', y'$  als gegeben voraus, so läßt sich mit (9) für ein Bogenelement  $ds$  die Identität

$$\frac{1}{m^2} (dx^2 + dy^2) = \frac{1}{m'^2} (dx'^2 + dy'^2) \quad (10)$$

anschreiben. Im Sinne unserer Problemstellung fragen wir nach den Bedingungen, die die Funktionen

$$x' = x'(x, y), \quad y' = y'(x, y) \quad (11)$$

erfüllen müssen, um die thermischen Parameter  $x, y$  in gleichfalls thermische Parameter  $x', y'$  überzuführen. Wir zerlegen zunächst die Klammerausdrücke von (10) in ihre konjugiert komplexen Faktoren

$$(dx + idy)(dx - idy) \quad (dx' + idy')(dx' - idy')$$

und bezeichnen weiter mit  $a, b$  zwei einander konjugierte komplexe Zahlen. Es lassen sich dann sicherlich für  $a$  und  $b$  Werte angeben, die den Gleichungen

$$\frac{1}{m} (dx + idy) = a (dx' + idy') \quad (12a)$$

$$\frac{1}{m} (dx - idy) = b (dx' - idy') \quad (12b)$$

genügen. Aus (11) folgt

$$dx' = \frac{\partial x'}{\partial x} dx + \frac{\partial x'}{\partial y} dy \quad dy' = \frac{\partial y'}{\partial x} dx + \frac{\partial y'}{\partial y} dy$$

Wir tragen diese Ausdrücke in (12) ein und erhalten

$$\frac{1}{m} (dx + idy) = a \left( \frac{\partial x'}{\partial x} dx + \frac{\partial x'}{\partial y} dy \right) + ia \left( \frac{\partial y'}{\partial x} dx + \frac{\partial y'}{\partial y} dy \right) \quad (13a)$$

$$\frac{1}{m} (dx - idy) = b \left( \frac{\partial x'}{\partial x} dx + \frac{\partial x'}{\partial y} dy \right) - ib \left( \frac{\partial y'}{\partial x} dx + \frac{\partial y'}{\partial y} dy \right). \quad (13b)$$

Durch Koeffizientenvergleichung in den obigen Gleichungen -  $dx$  und  $dy$  sind zwei voneinander unabhängige, frei variable Größen - folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} &= a \left( \frac{\partial x'}{\partial x} + i \frac{\partial y'}{\partial x} \right), & i \frac{1}{m} &= a \left( \frac{\partial x'}{\partial y} + i \frac{\partial y'}{\partial y} \right), \\ \frac{1}{m} &= b \left( \frac{\partial x'}{\partial x} - i \frac{\partial y'}{\partial x} \right), & -i \frac{1}{m} &= b \left( \frac{\partial x'}{\partial y} - i \frac{\partial y'}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Multiplizieren wir die erste der beiden rechtsstehenden Gleichungen mit  $-i$ , die zweite mit  $i$ , so erhalten wir anstelle dieser die Ausdrücke

$$\frac{1}{m} = a \left( \frac{\partial y'}{\partial y} - i \frac{\partial x'}{\partial y} \right) \quad \text{und} \quad \frac{1}{m} = b \left( \frac{\partial y'}{\partial y} + i \frac{\partial x'}{\partial y} \right),$$

woraus durch Gleichsetzen mit den linken Gleichungen

$$\frac{\partial x'}{\partial x} \pm i \frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial y} \mp i \frac{\partial x'}{\partial y}$$

und durch Aufspaltung in den reellen und imaginären Teil

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial y} \quad \frac{\partial y'}{\partial x} = -\frac{\partial x'}{\partial y} \quad (14)$$

folgt. Diese letzteren Gleichungen, die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, sind erfüllt, wenn die Gleichungen (11) den reellen und den imaginären Teil einer analytischen Funktion bilden, wenn also

$$x' + iy' = f(x + iy) \quad (15)$$

ist. Damit ist die gestellte Frage beantwortet. Nach (15) können aus der Gesamtheit aller analytischen Funktionen  $f$  alle Paare thermischer Parameter der Fläche aus einem gegebenen Paar thermischer Parameter derselben gefunden werden.

### 3. Die konforme Abbildung einer Fläche in eine andere Fläche.

Unter einer Abbildung der Fläche  $S$  in die Fläche  $\bar{S}$  verstehen wir die umkehrbar eindeutige Zuordnung der Punkte  $P$  von  $S$  zu den Punkten  $\bar{P}$  von  $\bar{S}$ . Die Flächen  $S$  und  $\bar{S}$ , dargestellt durch

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) & x &= x(\bar{u}, \bar{v}) \\ y &= y(u, v) & y &= y(\bar{u}, \bar{v}) \\ z &= z(u, v) & z &= z(\bar{u}, \bar{v}) \end{aligned} \quad (16a) \text{ und } \quad (16b)$$

können durch

$$\bar{u} = \bar{u}(u, v) \quad \bar{v} = \bar{v}(u, v) \quad (17)$$

einander zugeordnet werden, da ein Wertepaar  $u, v$  einen Punkt von  $S$  und zufolge (17) auch einen Punkt von  $\bar{S}$  bestimmt. Jede so mögliche Zuordnung ist durch bestimmte Eigenschaften der dadurch entstehenden Abbildung gekennzeichnet, wobei wir unter den Eigenschaften einer Abbildung im Großen und Ganzen jene Änderungen verstehen wollen, denen irgendein Netz krummer Koordinatenlinien  $u, v$  in  $S$  bei der Abbildung in  $\bar{S}$  unterworfen wird.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit betrachten wir nur eine große Gruppe der möglichen Abbildungen einer Fläche in eine andere, nämlich die konformen oder winkeltreuen Abbildungen. Wir erklären diese als jene Abbildungen, bei denen Ähnlichkeit in kleinsten Teilen zwischen dem Ur- und Abbild besteht. Es muß demnach jede als klein im Sinne von differentiell klein gedachte Figur in  $S$  in eine ähnliche Figur in  $\bar{S}$  übergehen. Daher müssen auch irgendwelche isothermen Parameterkurven  $x, x + \varepsilon, x + 2\varepsilon \dots y, y + \varepsilon, y + 2\varepsilon \dots$  (unserer früheren Vereinbarung gemäß bezeichnen wir die thermischen Parameter mit  $x, y$ ), die für  $\varepsilon \rightarrow 0$  die Fläche  $S$  in infinitesimale Quadrate unterteilen, sich als Netz gleicher Eigenschaft in  $\bar{S}$  abbilden. Oder, einfacher, ein isothermes Netz von Parameterkurven in  $S$  muß durch eine konforme Abbildung wieder in ein isothermes Netz in  $\bar{S}$  übergehen. Daraus folgt aber, daß eine konforme Abbildung einer Fläche in eine andere dann entsteht, wenn irgendwelchen thermischen Parametern  $x, y$  von  $S$  irgendwelche anderen gleichfalls thermischen Parameter  $\bar{x}, \bar{y}$  von  $\bar{S}$  durch die einfache Beziehung

$$\bar{x} = x \quad \bar{y} = y \quad (18)$$

zugeordnet werden.

Wir haben früher gezeigt, daß aus einem Paar gegebener thermischer Parameter  $x, y$  einer Fläche alle übrigen thermischen Parameterpaare  $x', y'$  der Fläche aus

$$x' + iy' = f(x + iy)$$

hervorgehen; wir finden daher alle möglichen konformen Abbildungen zweier Flächen ineinander, wenn wir deren Punkte durch

$$\bar{x} + i\bar{y} = x' + iy'$$

oder

$$\bar{x} + i\bar{y} = f(x + iy) \quad (19)$$

einander zuordnen. Damit haben wir das allgemeine Abbildungsgesetz konformer Abbildungen gefunden; die Eigenschaften der so bewirkten Abbildung hängen von der Wahl der Funktion  $f$  ab.

#### 4. Isotherme Netze am Rotationsellipsoid.

Um alle thermischen Parameterpaare des Rotationsellipsoids und damit alle isothermen Netze auf demselben zu bestimmen, gehen wir von einem ein für allemal gegebenen thermischen Parameterpaar des Rotationsellipsoids aus und lassen die analytische Funktion (15) die Gesamtheit aller Funktionen durchlaufen. Dieser Operation legen wir ein thermisches Parameterpaar zugrunde, welches wir aus jenen Parametern des Rotationsellipsoids herleiten, die auf diesem das ausgezeichnete Orthogonalnetz der Parallelkreise und Meridiane erzeugen. Es sind dies die als geographische Koordinaten bezeichneten Parameter geographische Breite und Länge.

Wir stellen zunächst das Rotationsellipsoid durch diese Parameter, die wir mit  $\varphi$  und  $\lambda$  bezeichnen, dar. Sind  $\xi, \eta, \zeta$  die Koordinaten eines Punktes des Rotationsellipsoids in einem cartesischen Koordinatensystem, so ist - die Herleitung dieser Ausdrücke setzen wir als bekannt voraus<sup>2</sup> -

$$\xi = N \cos \varphi \cos \lambda, \quad \eta = N \cos \varphi \sin \lambda, \quad \zeta = N \sin \varphi \frac{1}{1+e'^2}. \quad (20)$$

Hier und in weiterer Folge verwenden wir die folgenden Bezeichnungen:

$\varphi$  = geographische Breite

$\lambda$  = geographische Länge

$a, b$  = große und kleine Halbachse des Rotationsellipsoids

$e^2$  = erste Exzentrizität =  $\frac{a^2 - b^2}{a^2}$

$e'^2$  = zweite Exzentrizität =  $\frac{a^2 - b^2}{b^2}$

$M$  = Meridiankrümmungshalbmesser

$N$  = Normalkrümmungshalbmesser

$\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$        $t = t_0 \varphi$



Man erhält nach (4a) als Fundamentalgrößen

$$\begin{aligned} E &= M^2 \\ F &= 0 \\ G &= N^2 \cos^2 \varphi \end{aligned} \quad (21)$$

und erkennt, daß die Kurven konstanter geographischer Länge, die Meridiane, und die Kurven konstanter geographischer Breite, die Parallelkreise, wie auf jeder Rotationsfläche ein Orthogonalsystem krummer Koordinatenlinien bilden. Das Bogenelement am Rotationsellipsoid, ausgedrückt durch diese Parameter, ergibt sich mit

$$ds^2 = M^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2. \quad (22)$$

Soll das vorliegende Netz orthogonaler Parameterkurven isotherm gemacht werden, so sind neue Parameter - wir bezeichnen diese abweichend von der früheren Vereinbarung mit  $q$  und  $l$  - einzuführen, wobei

$$q = q(\varphi) \quad l = l(\lambda) \quad (23)$$

sein muß. Die Bezifferung oder die Graduierung der ursprünglichen Parameter muß durch die vorstehenden Gleichungen so geändert werden, daß das Bogenelement einer Flächenkurve in der Form

$$ds^2 = \frac{1}{m^2} (dq^2 + dl^2) \quad (24)$$

angeschrieben werden kann, wobei der vor der Klammer stehende Faktor eine Funktion von  $q$  und  $l$  oder, zufolge (23), auch eine Funktion der geographischen Breite und Länge ist. Wir schreiben (22) um in

$$ds^2 = N^2 \cos^2 \varphi \left( \frac{M^2}{N^2 \cos^2 \varphi} d\varphi^2 + d\lambda^2 \right)$$

und, indem wir

$$\frac{M}{N \cos \varphi} d\varphi = dq \quad (25a)$$

$$d\lambda = dl \quad (25b)$$

setzen, erkennen wir, daß die Ummummerierung nur den Parameter  $\varphi$  betrifft. Wir finden

$$ds^2 = N^2 \cos^2 \varphi (dq^2 + dl^2) \quad (26)$$

mit

$$\frac{1}{m^2} = N^2 \cos^2 \varphi \quad \text{oder} \quad m = \frac{1}{N \cos \varphi}. \quad (27)$$

Den mit (25a) aus der geographischen Breite gefundenen thermischen Parameter  $q$  bezeichnet man als die "isometrische Breite". Da durch (25b) der Parameter  $l$  gleich der geographischen Länge ist, stellen  $q$  und  $l = \lambda$  ein Paar

thermischer Parameter des Rotationsellipsoids dar, welches am Rotationsellipsoid ein aus Meridianen und Parallelkreisen bestehendes isothermes Netz von Parameterkurven oder von krummen Koordinatenlinien erzeugt. Dieses Netz liegt der in der Nautik vielfach verwendeten konformen Abbildung des Ellipsoids nach Mercator zugrunde, weshalb man es auch als Mercatornetz bezeichnet. Die Parameter  $q, l$  desselben bezeichnet man einfach als Mercatorkoordinaten.

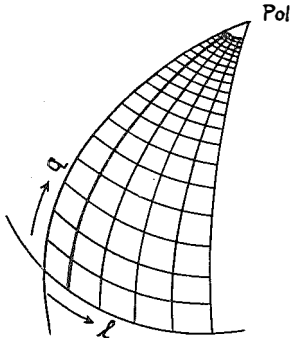


Abb.2.

Die Gleichung (27) sagt aus, daß die Dichte der Koordinatenlinien gegen die Pole hin zunimmt und in diesen unendlich groß wird. Dies lehrt auch schon die Anschauung. Da die Meridiane nach den Polen hin konvergieren, müssen die Parallelkreise in immer kleineren Abständen aufeinander folgen, um die Oberfläche des Rotationsellipsoids gemeinsam mit der Schar der Meridiane in kleine Quadrate zu unterteilen. In der Geodäsie wird für das aus der Schar der Meridiane und Parallelkreise gebildete isotherme

Netz krummer Koordinatenlinien, im besonderen für den Parameter  $q$ , meist die Bezeichnung "isometrisch" verwendet. Dieses Wort, etwa mit "gleichmäßig" zu übersetzen, soll andeuten, daß die Bogenelemente in Richtung beider Parameterkurven einander gleich sind. Es ist in diesem Zusammenhang natürlich gleichbedeutend mit der wegen ihrer umfassenderen Bedeutung vorzuziehenden Bezeichnung isotherm.

Sämtliche thermischen Parameter des Rotationsellipsoids, die wir nunmehr mit  $x$  und  $y$  bezeichnen, erhalten wir aus

$$x + iy = f(q + il) \quad (28)$$

Es sind nun jene Entwicklungen anzugeben, die die Transformation der geographischen in die isometrische Breite ermöglichen. Wir gehen von der Differentialgleichung (25a) aus und formen diese mit Hilfe der bekannten Zusammenhänge<sup>3</sup>

$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}} \quad N = \frac{a}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{1/2}}$$

um in<sup>4</sup>

$$dq = \frac{1-e^2}{(1-e^2\sin^2\varphi)\cos\varphi} d\varphi = \left( \frac{1}{\cos\varphi} - e^2 \frac{\cos\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi} \right) d\varphi.$$

Die einem Wert der geographischen Breite zugeordnete isometrische Breite ergibt sich demnach aus

$$Q = \int_0^{\varphi} \frac{1}{\cos \varphi} d\varphi - e^2 \int_0^{\varphi} \frac{\cos \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (29)$$

Die Ausführung der ersten der beiden angezeigten Integrationen in den Grenzen von Null bis zur betrachteten geographischen Breite ergibt für die isometrische Breite den als "Mercatorfunktion" bezeichneten Ausdruck

$$q = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$$

Die Bezeichnung "Mercatorfunktion" bezieht sich auf die Kugel, d.h. die Integration von (29) ergibt mit  $e = 0$  den vorstehenden Ausdruck.

Um das zweite Integral in (29) und damit das ellipsoidische Zusatzglied zur Mercatorfunktion der Kugel zu berechnen, setzen wir

$$\sin \varphi = x, \quad \cos \varphi d\varphi = dx$$

und erhalten damit für dieses Integral und dessen Lösung mit den obigen Grenzen

$$\begin{aligned} e^2 \int \frac{dx}{1 - e^2 x^2} &= \frac{e}{2} \ln \frac{1 + ex}{1 - ex} = \ln \left( \frac{1 + ex}{1 - ex} \right)^{\frac{e}{2}} = \\ &= \ln \left( \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} = - \ln \left( \frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \end{aligned}$$

Die Integration von (29) ergibt demnach für die isometrische Breite den Ausdruck

$$q = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) / \left( \frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \quad (30a)$$

oder, entlogarithmiert (das  $e$  linker Hand bedeutet die Basis der natürlichen Logarithmen)

$$e^2 = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) / \left( \frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \quad (30b)$$

Eine für die Zahlenrechnung bequemere Form läßt sich angeben, wenn man die Gleichung (30a) in

$$q = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2} \ln \left( \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right)$$

umschreibt und das zweite Glied rechter Hand durch eine Reihenentwicklung nach

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \dots \right)$$

ersetzt.<sup>5</sup> Man erhält

$$q = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - e^2 \sin \varphi - \frac{e^4}{3} \sin^3 \varphi - \frac{e^6}{5} \sin^5 \varphi - \frac{e^8}{7} \sin^7 \varphi - \dots \quad (31a)$$

Für die Maschinenrechnung empfiehlt es sich noch, in den auf das erste Glied folgenden Termen die Sinuspotenzen durch die Sinus der Winkelvielfachen zu ersetzen. Diese u.a. von der Berechnung der Meridianbogen her bekannte Substitution gibt für die Berechnung der isometrischen Breite den Ausdruck

$$\begin{aligned}
q &= \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \\
&- (e^2 + \frac{1}{4} e^4 + \frac{1}{8} e^6 + \frac{5}{64} e^8 + \frac{7}{128} e^{10}) \sin \varphi \\
&+ ( \frac{1}{12} e^4 + \frac{1}{16} e^6 + \frac{3}{64} e^8 + \frac{7}{192} e^{10} ) \sin 3\varphi \\
&- ( \frac{1}{80} e^6 + \frac{1}{64} e^8 + \frac{1}{64} e^{10} ) \sin 5\varphi \\
&+ ( \frac{1}{448} e^8 + \frac{1}{256} e^{10} ) \sin 7\varphi \\
&- ( \frac{1}{2304} e^{10} ) \sin 9\varphi \\
&+ \dots
\end{aligned} \tag{31b}$$

Wünscht man eine nur kleine Breitendifferenz zwischen zwei Punkten  $P(\varphi)$  und  $P_0(\varphi_0)$  in die zugeordnete isometrische Breitendifferenz zu verwandeln, so genügt es, die Differentialgleichung (25a) durch eine Reihenentwicklung etwa in  $P_0$  zu integrieren.<sup>6</sup> Mit

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 \quad \Delta q = q - q_0$$

erhalten wir

$$\Delta q = \frac{1}{1!} \frac{dq}{d\varphi} \Delta\varphi + \frac{1}{2!} \frac{d^2q}{d\varphi^2} \Delta\varphi^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3q}{d\varphi^3} \Delta\varphi^3 + \dots \tag{32}$$

und als Umkehrung

$$\Delta\varphi = \frac{1}{1!} \frac{d\varphi}{dq} \Delta q + \frac{1}{2!} \frac{d^2\varphi}{dq^2} \Delta q^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3\varphi}{dq^3} \Delta q^3 + \dots \tag{33}$$

Wie angedeutet, sind die Differentialquotienten

$$\frac{d^n q}{d\varphi^n} \quad \frac{d^n \varphi}{dq^n}$$

im Punkt  $P_0$  zu nehmen. Wir finden sie, indem wir die Differentialgleichung (25a) mit  $\frac{N}{M} = 1 + \eta^2$  in

$$\frac{dq}{d\varphi} = \frac{M}{N \cos \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} (1 - \eta^2 + \eta^4 - \eta^6 \dots) \tag{34}$$

und

$$\frac{d\varphi}{dq} = \frac{N \cos \varphi}{M} = \cos \varphi (1 + \eta^2) \tag{35}$$

umschreiben und diese Ausdrücke aufeinanderfolgend nach  $\varphi$  und nach  $q$  ableiten.

Es sei daran erinnert, daß sich die Ableitungen in (33) auch aus jenen in (32) herleiten lassen; es ist nämlich

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi}{dq} &= \frac{1}{\frac{dq}{d\varphi}} \\
\frac{d^2\varphi}{dq^2} &= \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{\frac{dq}{d\varphi}} \right) \frac{d\varphi}{dq} = - \frac{\frac{d^2q}{d\varphi^2}}{\left(\frac{dq}{d\varphi}\right)^3} \\
\frac{d^3\varphi}{dq^3} &= \frac{d}{d\varphi} \left( - \frac{\frac{d^2q}{d\varphi^2}}{\left(\frac{dq}{d\varphi}\right)^3} \right) \frac{d\varphi}{dq} = - \frac{\frac{d^3q}{d\varphi^3}}{\left(\frac{dq}{d\varphi}\right)^4} + 3 \frac{\left(\frac{d^2q}{d\varphi^2}\right)^2}{\left(\frac{dq}{d\varphi}\right)^5} \cdot
\end{aligned} \tag{36}$$

Vgl. dazu auch die Formeln I, (50,51). Zur einfacheren Bildung der Ableitungen beschränken wir uns hier und ebenso in weiterer Folge - nach Jordan - hinsichtlich der geographischen Breite stets auf die Winkelfunktionen  $\cos \varphi$  und  $\operatorname{tg} \varphi = t$ .

Denkt man sich die in (32) und (33) angezeigten Ableitungen gebildet und hierin eingetragen, so liegt bereits das gesuchte Ergebnis in Form der nachstehenden Potenzreihen vor. In diesen deuten wir durch den beigefügten Index an, daß die von der Breite abhängigen Größen im Punkt  $P_0$  zu nehmen sind. Es ist

$$\begin{aligned} \Delta q &= \frac{1}{\cos \varphi_0} (1 - \eta_0^2 + \eta_0^4 - \eta_0^6) \Delta \varphi \\ &+ \frac{1}{2 \cos \varphi_0} t_0 (1 + \eta_0^2 - 3 \eta_0^4) \Delta \varphi^2 \\ &+ \frac{1}{6 \cos \varphi_0} (1 + 2 t_0^2 + \eta_0^2 - 3 \eta_0^4 + 6 t_0^2 \eta_0^4) \Delta \varphi^3 \\ &+ \frac{1}{24 \cos \varphi_0} t_0 (5 + 6 t_0^2 - \eta_0^2) \Delta \varphi^4 \\ &+ \frac{1}{120 \cos \varphi_0} (5 + 28 t_0^2 + 24 t_0^4) \Delta \varphi^5 + \dots \end{aligned} \quad (37)$$

und

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \cos \varphi_0 (1 + \eta_0^2) \Delta Q \\ &+ \frac{1}{2} \cos^2 \varphi_0 t_0 (-1 - 4 \eta_0^2 - 3 \eta_0^4) \Delta Q^2 \\ &+ \frac{1}{6} \cos^3 \varphi_0 (-1 + t_0^2 - 5 \eta_0^2 + 13 t_0^2 \eta_0^2 - 7 \eta_0^4 + 27 t_0^2 \eta_0^4) \Delta Q^3 \\ &+ \frac{1}{24} \cos^4 \varphi_0 t_0 (5 - t_0^2 + 56 \eta_0^2 - 40 t_0^2 \eta_0^2) \Delta Q^4 \\ &+ \frac{1}{120} \cos^5 \varphi_0 (5 - 18 t_0^2 + t_0^4) \Delta Q^5 + \dots \end{aligned} \quad (38)$$

Die Konvergenz dieser Potenzreihen ist hinreichend, um mit der angegebenen Gliederzahl in mittleren Breiten für einen Breitenunterschied von  $\Delta \varphi = \pm 1^\circ$  den isometrischen Breitenunterschied bis zur 10. Stelle genau zu berechnen.

Die Formeln (30,31) werden praktisch nur zur Berechnung der Abszissen des ebenen Mercatormetzes und hin und wieder auch zur Berechnung geographischer Netzentwürfe verwendet; für unsere weiteren Entwicklungen sind jedoch die Potenzreihen (37,38) von Bedeutung. Wir werden diese in einfacherer Anschreibung in der Form

$$\Delta q = c_1 \Delta \varphi + c_2 \Delta \varphi^2 + c_3 \Delta \varphi^3 + \dots \quad (39)$$

$$\Delta \varphi = d_1 \Delta Q + d_2 \Delta Q^2 + d_3 \Delta Q^3 + \dots \quad (40)$$

anwenden, worin, wie ersichtlich, den Koeffizienten die

Bedeutungen

$$c_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n q}{d \varphi^n} \quad \text{und} \quad d_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n \varphi}{d q^n}$$

zukommen.

Die Potenzreihe (40) stellt gerade die Umkehrung der Potenzreihe (39) dar. Aus den unter (36) zusammengestellten Ausdrücken können wir die Beziehungen finden, die zwischen den Koeffizienten dieser beiden Reihen bestehen müssen. Da das Problem der Reihenumkehrung in weiterer Folge immer wiederkehrt, wollen wir gleich in diesem Zusammenhang einige kurze Bemerkungen hierüber einfügen.

Es sei eine konvergierende, nach Potenzen der Veränderlichen  $x$  fortschreitende ganze Potenzreihe

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

gegeben. Die Auflösung dieser Reihe nach  $x$  führt zu einer gleichfalls konvergierenden, nach Potenzen von  $y$  fortschreitenden Potenzreihe gleichen Aufbaues, die wir in der Form

$$x = b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \dots$$

anschreiben.

Die Aufgabe der Umkehrung einer dieser beiden Potenzreihen in die andere ist gelöst, wenn es gelingt, die Koeffizienten  $b_i$  in Funktion der Koeffizienten  $a_i$  oder umgekehrt darzustellen. Wir bilden dazu

$$x^2 = b_1^2 y^2 + 2b_1 b_2 y^3 + \dots$$

$$x^3 = b_1^3 y^3 + \dots$$

und tragen diese Ausdrücke gemeinsam mit der zweiten Potenzreihe in die erste Reihe ein, womit wir erhalten

$$\begin{aligned} y &= a_1 b_1 y + a_2 b_1^2 y^2 + a_3 b_1^3 y^3 + \dots \\ &\quad + a_2 b_2 y^2 + 2a_2 b_1 b_2 y^3 + \dots \\ &\quad + a_3 b_3 y^3 + \dots \end{aligned}$$

Durch eine Koeffizientenvergleihung finden wir hieraus die gesuchten Beziehungen, nämlich

$$a_1 b_1 = 1, \quad a_2 b_1^2 + a_2 b_2 = 0, \quad a_3 b_1^3 + 2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_3 = 0$$

u.s.w.

Im nächsten Abschnitt geben wir in den in (51) zusammengestellten Ausdrücken die Auflösung der vorstehenden Gleichungen nach den einzelnen gesuchten Koeffizienten und damit das Formelsystem für die Umkehrung einer ganzen Potenzreihe mit einer Veränderlichen unter Beschränkung auf die Glieder fünfter Ordnung an.

## 5. Die Transformation der Parameter Breite und Länge in thermische Parameter.

Wir haben gezeigt, daß den thermischen Parametern einer Fläche für die konformen Abbildungen zweier Flächen in einander fundamentale Bedeutung zukommt. Mit der Spezialisierung auf die Bezugsfläche der praktischen Geodäsie, das Rotationsellipsoid, wollen wir nun die Aufgabe lösen, das in der Geodäsie gebräuchlichste Parameterpaar desselben, die geographische Breite und Länge, in beliebige thermische Parameter überzuführen. Wir denken uns für den Augenblick die geographische Breite bereits in die isometrische Breite übergeführt; wie wir wissen, werden sämtliche thermischen Parameter  $x, y$  des Rotationsellipsoids nach (28) aus

$$x + iy = f(q + i\ell)$$

gefunden.

Aus später noch näher zu erörternden Gründen beschränken wir unsere Überlegungen auf ein nur kleines Gebiet der ellipsoidischen Oberfläche und wählen dieses zunächst so, daß wir es uns als einen von zwei Meridianen begrenzten schmalen Streifen derselben denken. In diesem Streifen wählen wir dessen Mittelmeridian, dem die Länge  $\lambda_m$  zukommen möge, als Grundmeridian. Indem wir uns von der geographischen Länge jedes Punktes innerhalb des betrachteten Gebietes die Länge des Grundmeridians subtrahiert denken, erhalten wir aus

$$\Delta \lambda = \lambda - \lambda_m$$

jeweils den Längenunterschied zum Grundmeridian, d.h. die auf diesen bezogene geographische Länge. Diese ist dem thermischen Parameter  $\ell$  - dieser vom gleichen Grundmeridian aus gezählt - gleichzusetzen, womit natürlich

$$\Delta \lambda = \ell$$

gilt. Den Grundmeridian können wir im Hinblick auf diese Vereinbarungen auch als den Bezugs-, Mittel- oder Anfangsmeridian im betrachteten Gebiet bezeichnen.

Wir denken uns nun den Längenunterschied der beiden Grenzmeridiane des gewählten Streifens so klein, also diesen selbst so schmal, daß die Taylorsche Entwicklung der analytischen Funktion (28) nach

$$\begin{aligned} x + iy = & f(q) + i \frac{1}{1!} f'(q) \ell - \frac{1}{2!} f''(q) \ell^2 \\ & - i \frac{1}{3!} f'''(q) \ell^3 + \frac{1}{4!} f^{IV}(q) \ell^4 + i \frac{1}{5!} f^V(q) \ell^5 \dots \end{aligned} \quad (41)$$

für jeden Punkt innerhalb des betrachteten Gebietes hinreichend rasch konvergiert. Die Aufspaltung derselben in den reellen und imaginären Teil ergibt

$$x = f(q) - \frac{1}{2!} f''(q) l^2 + \frac{1}{4!} f^{IV}(q) l^4 \dots \quad (42a)$$

$$y = \frac{1}{1!} f'(q) l - \frac{1}{3!} f'''(q) l^3 + \frac{1}{5!} f^{V}(q) l^5 \dots \quad (42b)$$

Die Gleichung (41) und natürlich auch die Gleichung (42b) lehrt, daß wir durch die vorstehende Entwicklung über das entstehende Netz isothermer Parameterkurven so verfügen haben, daß der Grundmeridian die Parameterkurve  $y = 0$  realisiert. Man erkennt auch ohne weiteres, daß für die Parameterkurven  $\pm y = \text{const.}$  Symmetrie hinsichtlich der Ebene des Grundmeridians besteht.

Denken wir uns in den Gleichungen (42) die Funktion  $f(q)$  und deren durch Akzente angezeigte Ableitungen nach  $q$  in Funktion der geographischen Breite dargestellt - dies ist zufolge  $q = q(\varphi)$  sicher möglich - so ist die anfangs formulierte Aufgabe zunächst in einer Form gelöst. Wir werden auf die Gleichungen (42) bei der Entwicklung der Gauß-Krügerschen Abbildungsgleichungen nochmals zurückkommen.

Setzen wir in (41)  $l = 0$ , so ergibt sich

$$x = f(q) \quad (43)$$

d.h. die thermischen Parameter  $x, y$  und damit die Eigenschaften des durch sie erzeugten Netzes isothermer krummer Koordinatenlinien werden von dem Gesetz bestimmt, nach dem der Parameter  $x$  der isometrischen Breite  $q$  zugeordnet wird. Die Kenntnis dieses Zusammenhanges genügt immer, um die Funktion  $x + iy$ , also die thermischen Parameter, zu bestimmen, denn eine analytische Funktion ist vollständig bekannt, wenn sie für irgendeine Linie definiert ist. Zufolge (43) wird sie aber für die Linie  $l = y = 0$ , den Grundmeridian, vollkommen erklärt.

Wir gehen in unserer Entwicklung noch um einen Schritt weiter, indem wir ein Gebiet um einen Punkt  $P_0(q_0, l_0)$  betrachten. Dieses Gebiet möge innerhalb des Konvergenzbereiches der Reihe (41) liegen. Es ist

$$x_0 + iy_0 = f(q_0 + il_0)$$

Mit

$$\Delta x = x - x_0$$

$$\Delta y = y - y_0$$

$$\Delta q = q - q_0$$

$$\Delta l = l - l_0$$

erhalten wir

$$x_0 + iy_0 + \Delta x + i\Delta y = f(q_0 + il_0 + \Delta q + i\Delta l)$$

Denken wir uns das Gebiet um  $P_0$  wieder entsprechend begrenzt, so kann die rechte Seite der vorstehenden Gleichung



nach dem Satz von Taylor in

$$\begin{aligned} \Delta x + i\Delta y &= \frac{1}{1!} \frac{d(x+iy)}{d(q+il)} (\Delta q + i\Delta l) + \frac{1}{2!} \frac{d^2(x+iy)}{d(q+il)^2} (\Delta q + i\Delta l)^2 \\ &+ \frac{1}{3!} \frac{d^3(x+iy)}{d(q+il)^3} (\Delta q + i\Delta l)^3 + \dots \end{aligned} \quad (44)$$

entwickelt werden.

Tragen wir hierin für  $x + iy = f(q + il)$  die entwickelte Form, d.h. die rechte Seite der Gleichung (41) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta x + i\Delta y &= \frac{1}{1!} [f'(q) + i \frac{1}{1!} f''(q)l - \frac{1}{2!} f''(q)l^2 - i \frac{1}{3!} f'''(q)l^3 + \dots] (\Delta q + i\Delta l) \\ &+ \frac{1}{2!} [f''(q) + i \frac{1}{1!} f'''(q)l - \frac{1}{2!} f'''(q)l^2 - \dots] (\Delta q + i\Delta l)^2 \\ &+ \frac{1}{3!} [f'''(q) + i \frac{1}{1!} f^{(4)}(q)l - \dots] (\Delta q + i\Delta l)^3 + \dots \end{aligned} \quad (45)$$

Wir schreiben (44) nochmals mit einfacher Bezeichnung der Koeffizienten an. Es ist

$$\Delta x + i\Delta y = a_1 (\Delta q + i\Delta l) + a_2 (\Delta q + i\Delta l)^2 + a_3 (\Delta q + i\Delta l)^3 + \dots \quad (46)$$

Hierin bedeutet

$$a_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n(x+iy)}{d(q+il)^n} \quad (47)$$

In der Umkehrung

$$\Delta q + i\Delta l = b_1 (\Delta x + i\Delta y) + b_2 (\Delta x + i\Delta y)^2 + b_3 (\Delta x + i\Delta y)^3 + \dots \quad (48)$$

ist ein Koeffizient  $b_n$  durch

$$b_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n(q+il)}{d(x+iy)^n} \quad (49)$$

gegeben. Die Koeffizienten  $a_n$ ,  $b_n$  sind, wie es auch eine Vergleichung von (46) mit (45) für die Koeffizienten  $a_n$  beweist, komplexe Größen der Form

$$a_n = \alpha_n + i\beta_n \quad b_n = \bar{\alpha}_n + i\bar{\beta}_n$$

Wir erinnern in diesem Zusammenhang daran, daß jede Ableitung

$$\frac{d^n(q+il)}{d(x+iy)^n}$$

auch aus den als bekannt vorausgesetzten Ableitungen

$$\frac{d^n(x+iy)}{d(q+il)^n}$$

gebildet werden kann. Es ist nämlich

$$\frac{d(q+il)}{d(x+iy)} = \frac{1}{\frac{d(x+iy)}{d(q+il)}} \quad (50)$$

und weiter

$$\frac{d^2(q+il)}{d(x+iy)^2} = \frac{d}{d(q+il)} \left( \frac{1}{\frac{d(x+iy)}{d(q+il)}} \right) \frac{d(q+il)}{d(x+iy)} = - \frac{\frac{d^2(x+iy)}{d(q+il)^2}}{\left( \frac{d(x+iy)}{d(q+il)} \right)^3}$$

$$\frac{d^3(q+il)}{d(x+iy)^3} = \frac{d}{d(q+il)} \left( \frac{d^2(q+il)}{d(x+iy)^2} \right) \frac{d(q+il)}{d(x+iy)} = - \frac{\frac{d^3(x+iy)}{d(q+il)^3}}{\left( \frac{d(x+iy)}{d(q+il)} \right)^4} + 3 \frac{\left( \frac{d^2(x+iy)}{d(q+il)^2} \right)^2}{\left( \frac{d(x+iy)}{d(q+il)} \right)^5}$$

u. s. w.

Die Koeffizienten  $b_n$  lassen sich auch durch Umkehrung der Potenzreihe (46) - durch deren Auflösung nach  $(\Delta q + i \Delta l)$  - bestimmen. Indem wir den am Ende des vorhergehenden Abschnittes angedeuteten Vorgang der Reihenumkehrung bis zu den Gliedern fünfter Ordnung einschließlich anwenden, erhalten wir als Ergebnis

$$b_1 = \frac{1}{a_1} \quad b_2 = -\frac{a_2}{a_1^2} \quad b_3 = -\frac{a_3}{a_1^3} + 2 \frac{a_2^2}{a_1^5}$$

$$b_4 = -\frac{a_4}{a_1^4} + 5 \frac{a_2 a_3}{a_1^6} - 5 \frac{a_2^3}{a_1^7}$$

$$b_5 = -\frac{a_5}{a_1^5} + 6 \frac{a_3 a_4}{a_1^7} + 3 \frac{a_3^2}{a_1^7} - 21 \frac{a_2^2 a_3}{a_1^8} + 14 \frac{a_2^4}{a_1^9} \quad (51)$$

Von den vorstehenden Entwicklungen könnten wir Gebrauch machen, wenn wir, ausgehend von einem Wertepaar  $q_0, l_0$  die durch Änderungen von  $q$  und  $l$  hervorgerufenen Änderungen von  $x$  und  $y$  innerhalb eines kleinen Gebietes berechnen wollten. Man wendet derartige Entwicklungen hin und wieder zur Transformation verschiedener thermischer Parameter ineinander, d.h. bei Koordinatenumformungen für viele Punkte innerhalb eines kleinen Gebietes an, wobei man in der Regel mit nur wenigen Gliedern von (46) bzw. (48) das Auslangen findet.

Wesentlich größere Bedeutung für die Lösung der eingangs gestellten Aufgabe erlangt das Formelsystem (46,48) dann, wenn wir den Punkt  $P_0$  in den Grundmeridian verschieben. Damit wird

$$l_0 = 0, \quad \Delta l = l, \quad \Delta y = y$$

und wir erhalten aus (45)

$$\Delta x + i \Delta y = \frac{1}{1!} f'(q) (\Delta q + il) + \frac{1}{2!} f''(q) (\Delta q + il)^2 + \frac{1}{3!} f'''(q) (\Delta q + il)^3 \dots \quad (52)$$

Wir wollen nunmehr den Parameter  $x$  von  $x_0$  beginnend zählen; weiterhin führen wir wieder für die Koeffizienten der Potenzen der Komplexe  $(\Delta q + il)^n$  die einfache Bezeichnung  $a_n$  ein. Damit läßt sich die Reihe (52) in der Form

$$x + iy = a_1 (\Delta q + il) + a_2 (\Delta q + il)^2 + a_3 (\Delta q + il)^3 \dots \quad (53)$$

anschreiben. In diesem Ausdruck bedeutet (siehe auch (47))

$$a_n = \frac{1}{n!} (f(q))_0 = \frac{1}{n!} \left( \frac{d^n x}{dq^n} \right)_0 \quad (54)$$

wobei  $n$  die Ordnungszahl des angeschriebenen Gliedes und damit der Ableitung der Funktion  $f(q)$  nach  $q$  anzeigt. Aus dieser Erklärung des Symbols  $a_n$  läßt sich erkennen, daß die von ihm dargestellten Zahlen nunmehr reell und daher auch die Koeffizienten von (53) reelle Zahlen sein müssen. Wir können aber aus der Herleitung dieser Reihe auch schließen, daß dies nur dann der Fall sein kann, wenn für die Linien  $\pm y = \text{const.}$  Symmetrie bezüglich des Grundmeridians  $\ell = 0$  besteht, wenn also der gewählte Nullpunkt im Grundmeridian liegt. In unseren weiteren Entwicklungen werden wir immer diesen Fall voraussetzen.

Die zur Potenzreihe (53) - diese natürlich wie immer als hinreichend rasch konvergierend gedacht - inverse Reihe lautet

$$\Delta q + i\ell = b_1(x+iy) + b_2(x+iy)^2 + b_3(x+iy)^3 \dots \quad (55)$$

mit

$$b_n = \frac{1}{n!} \left( \frac{d^n q}{dx^n} \right)_0 \quad (56)$$

Die Koeffizienten  $b_n$  sind in diesem Falle gleichfalls reelle Zahlen und ergeben sich neben der direkten Berechnung (56) aus den Differentialquotienten von (53) mit Benützung der allgemeinen Zusammenhänge (50) mit  $y = \ell = 0$  sowie mit den Umkehrungsformeln (51) aus den Koeffizienten  $a_n$ . Wir erinnern daran, daß die Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  Funktionen der isometrischen und damit auch der geographischen Breite sind und für den gewählten Ausgangspunkt  $P_0$  zu nehmen sind.

Die Aufspaltung der Gleichungen (53) und (55) in ihren reellen und imaginären Teil ergibt zunächst die für diese Transformation zwischen thermischen Parametern charakteristischen Potenzreihen

$$\begin{aligned} x = & a_1 \Delta q + a_2 (\Delta q^2 - \ell^2) + a_3 (\Delta q^3 - 3 \Delta q \ell^2) \\ & + a_4 (\Delta q^4 - 6 \Delta q^2 \ell^2 + \ell^4) + a_5 (\Delta q^5 - 10 \Delta q^3 \ell^2 + 5 \Delta q \ell^4) + \dots \end{aligned} \quad (57a)$$

$$\begin{aligned} y = & a_1 \ell + a_2 (2 \Delta q \ell) + a_3 (3 \Delta q^2 \ell - \ell^3) \\ & + a_4 (4 \Delta q^3 \ell - 4 \Delta q \ell^3) + a_5 (5 \Delta q^4 \ell - 10 \Delta q^2 \ell^3 + \ell^5) + \dots \end{aligned} \quad (57b)$$

$$\begin{aligned} \Delta q = & b_1 x + b_2 (x^2 - y^2) + b_3 (x^3 - 3xy^2) \\ & + b_4 (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + b_5 (x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4) + \dots \end{aligned} \quad (58a)$$

$$\begin{aligned} \ell = & b_1 y + b_2 (2xy) + b_3 (3x^2y - y^3) \\ & + b_4 (4x^3y - 4xy^3) + b_5 (5x^4y - 10x^2y^3 + y^5) + \dots \end{aligned} \quad (58b)$$

Nunmehr ist als letzter Schritt zur Lösung der ursprünglich gestellten Aufgabe anstelle der isometrischen Breite die geographische Breite einzuführen. Da es sich immer nur um Differenzen handelt, benützen wir dazu die früher angegebenen Potenzreihen - siehe (37), (38) und (39), (40) -

$$\begin{aligned} \Delta q &= c_1 \Delta \varphi + c_2 \Delta \varphi^2 \dots \\ \Delta \varphi &= d_1 \Delta q + d_2 \Delta q^2 \dots \end{aligned}$$

Indem wir die erste der vorstehend angeschriebenen Reihen zu den in (57a,b) vorkommenden Potenzen von  $\Delta q$  erheben und hierin eintragen<sup>7</sup>, erhalten wir wieder in Form von Potenzreihen die Transformationsgleichungen zum Übergang von den Parametern  $\varphi$ ,  $\lambda$  in thermische Parameter  $x$  und  $y$ . Es ist

$$\begin{aligned} x = & a_1 c_1 \Delta \varphi + (a_1 c_2 + a_2 c_1^2) \Delta \varphi^2 + (-a_2) \ell^2 \\ & + (a_1 c_3 + 2a_2 c_1 c_2 + a_3 c_1^3) \Delta \varphi^3 + (-3a_3 c_1) \Delta \varphi \ell^2 \\ & + (a_1 c_4 + 2a_2 c_1 c_3 + a_2 c_2^2 + 3a_3 c_1^2 c_2 + a_4 c_1^4) \Delta \varphi^4 \\ & + (-3a_3 c_2 - 6a_4 c_1^2) \Delta \varphi^2 \ell^2 + a_4 \ell^4 \\ & + (a_1 c_5 + 2a_2 c_1 c_4 + 2a_2 c_2 c_3 + 3a_3 c_1^2 c_3 + 3a_3 c_1 c_2^2 + 4a_4 c_1^3 c_2 + a_5 c_1^5) \Delta \varphi^5 \\ & + (-3a_3 c_3 - 12a_4 c_1 c_2 + 10a_5 c_1^3) \Delta \varphi^3 \ell^2 + 5a_5 c_1 \Delta \varphi \ell^4 \end{aligned} \quad (59a)$$

$$\begin{aligned} y = & a_1 \ell + 2a_2 c_1 \Delta \varphi \ell + (2a_2 c_2 + 3a_3 c_1^2) \Delta \varphi^2 \ell + (-a_3) \ell^3 \\ & + (2a_2 c_3 + 6a_3 c_1 c_2 + 4a_4 c_1^3) \Delta \varphi^3 \ell + 4a_4 c_1 \Delta \varphi \ell^3 \\ & + (2a_2 c_4 + 6a_3 c_1 c_3 + 3a_3 c_2^2 + 12a_4 c_1^2 c_2 + 5a_5 c_1^4) \Delta \varphi^4 \ell \\ & + (-4a_4 c_2 - 10a_5 c_1^2) \Delta \varphi^2 \ell^3 + a_5 \ell^5. \end{aligned} \quad (59b)$$

Für die inverse Transformation bilden wir die Potenzen des isometrischen Breitenunterschiedes mit (58a) und tragen diese in (40) ein. Wir erhalten - in der Reihe für  $\ell$  ist keine Substitution notwendig -

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi = & b_1 d_1 x + (b_2 d_1 + b_1^2 d_2) x^2 + (-b_2 d_1) y^2 \\
& + (b_3 d_1 + 2 b_1 b_2 d_2 + b_1 d_3) x^3 + (-3 b_3 d_1 - 2 b_1 b_2 d_2) x y^2 \\
& + (b_4 d_1 + 2 b_1 b_3 d_2 + b_2^2 d_2 + 3 b_1^2 b_2 d_3 + b_1^4 d_4) x^4 \\
& + (-6 b_4 d_1 - 6 b_1 b_3 d_2 - 2 b_2^2 d_2 - 3 b_1^2 b_2 d_3) x^2 y^2 + (b_4 d_1 + b_2^2 d_2) y^4 \\
& + (b_5 d_1 + 2 b_1 b_4 d_2 + 2 b_2 b_3 d_2 + 3 b_1^2 b_3 d_3 + 3 b_1 b_2^2 d_3 + 4 b_1^3 b_2 d_4 + b_1^5 d_5) x^5 \\
& + (-10 b_5 d_1 - 12 b_1 b_4 d_2 - 8 b_2 b_3 d_2 - 9 b_1^2 b_3 d_3 - 6 b_1 b_2^2 d_3 + 4 b_1^3 b_2 d_4) x^3 y^2 \\
& + (5 b_5 d_1 + 2 b_1 b_4 d_2 + 6 b_2 b_3 d_2 + 3 b_1 b_2^2 d_3) x y^4 \quad (60a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ell = & b_1 y + 2 b_2 x y + 3 b_3 x^2 y + (-b_3) y^3 + 4 b_4 x^3 y + (-4 b_4) x y^3 \\
& + 5 b_5 x^4 y + (-10 b_5) x^2 y^3 + b_5 y^5 \quad (60b)
\end{aligned}$$

Wir haben die vorstehenden Reihen bis zu den Gliedern fünfter Ordnung einschließlich angeschrieben und deuten ohne den späteren zahlenmäßigen Entwicklungen vorzugreifen an, daß in mittleren Breiten deren Konvergenz hinreicht, um mit dieser Gliederzahl die Transformationen bei Einhaltung der üblichen Genauigkeitsansprüche der praktischen Geodäsie innerhalb eines Gebietes vorzunehmen, dessen Begrenzung etwa durch die Koordinatenlinien  $\varphi = \varphi_0 \pm 2^\circ$ ,  $\lambda = \lambda_m \pm 3^\circ$  festgelegt wird.

Die Parameterunterschiede  $\Delta\varphi$ ,  $\ell$  d.h. die Differenzen der geographischen Breite und Länge des betrachteten Punktes P gegen den Ausgangspunkt  $P_0$  in den Potenzreihen (59) und (60) sind im Bogenmaß zu nehmen. Würde man sie im Gradmaß einführen, so müßten die Glieder rechter Hand in (59) entsprechend der Ordnungszahl n der Potenzen und Produkte der Koordinatenunterschiede durch die entsprechende Potenz der Umwandlungszahl dividiert werden. Wünscht man hingegen das Ergebnis von (60) im Gradmaß zu erhalten, so sind alle Glieder rechter Hand mit der Umwandlungszahl zu multiplizieren.

## 6. Meridiankonvergenz und Dichte der Koordinatenlinien in isothermen Netzen am Rotationsellipsoid.

Abweichend von der Definition der ellipsoidischen Meridiankonvergenz - der Konvergenz der Meridiane des Rotationsellipsoids gegen einen Grundmeridian, gemessen in den geodätischen Parallelen zu diesem - erklären wir als

Meridiankonvergenz in einem isothermen Netz krummer Koordinatenlinien jenen Winkel, der in einem Punkt des Rotationsellipsoids von der durch diesen verlaufenden Meridiankurve  $\lambda = \text{const.}$  und von der gleichfalls durch ihn verlaufenden Parameterkurve oder Koordinatenlinie  $y = \text{const.}$  des isothermen Netzes eingeschlossen wird.

Denkt man sich das Rotationsellipsoid von dem aus den Scharen der Parallelkreise und Meridiane gebildeten orthogonalen Netz und darüber hinaus noch von den Scharen der Parameterkurven  $x = \text{const.}$ ,  $y = \text{const.}$  eines beliebigen isothermen Netzes jeweils doppelt überdeckt, so kann die Meridiankonvergenz nach der obigen Definition auch als jener Winkel erklärt werden, um den in einem Punkt der Fläche das isotherme Netz gegenüber dem ein für allemal vorgegebenen Netz der Meridiane und Parallelkreise verdreht erscheint. Die Meridiankonvergenz vermittelt demnach den Zusammenhang zwischen dem auf die Meridiankurve  $\lambda = \text{const.}$  bezogenen Azimut und dem auf die Parameterkurve  $y = \text{const.}$  des isothermen Netzes bezogenen geodätischen Richtungswinkel des Bogenelements einer Flächenkurve im betrachteten Punkt.

Die Kenntnis der Maßzahl  $m$  der Dichte der Koordinatenlinien in einem isothermen Netz ist aus zweierlei Gründen notwendig. Da wir sie aus

$$\frac{1}{m^2} = E = G \quad \text{oder} \quad m = \frac{1}{\sqrt{E}} = \frac{1}{\sqrt{G}}$$

erklärt haben, ist sie nur eine andere Form der Fundamentalgrößen erster Ordnung und tritt daher bei allen Operationen in isothermen krummlinigen Koordinaten auf. Legt man darüber hinaus das betrachtete isotherme Netz einer konformen Abbildung des Ellipsoids in die Ebene zugrunde, wobei man einfach die Werte der thermischen Parameter  $x$ ,  $y$  mit den cartesischen Koordinaten der Bildebene identifiziert, so ist die Maßzahl der Dichte der Koordinatenlinien gleichzeitig der mit dem Ort veränderliche, von der betrachteten Richtung jedoch unabhängige Abbildungsmaßstab in einem Punkt der Bildebene.

Wir beginnen mit der Entwicklung der Ausdrücke zur Berechnung der Meridiankonvergenz und geben zunächst an Hand der nebenstehenden Figur die grundsätzlichen Zusammenhänge an. Eine durch den Punkt  $P$  des Rotationsellipsoids verlaufende Flächenkurve

$$\begin{array}{l} \varphi = \varphi(s) \\ \lambda = \lambda(s) \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l} x = x(s) \\ y = y(s) \end{array}$$

habe in  $P$  das Azimut  $\alpha$ , und, bezogen auf die Parameterkurve  $y = \text{const.}$  des beliebigen isothermen Netzes  $x$ ,  $y$  den geodätischen Richtungswinkel  $\theta$ . Die Meridiankonvergenz  $\gamma$  im isothermen Netz erscheint als Azimut der Linie  $y = \text{const.}$

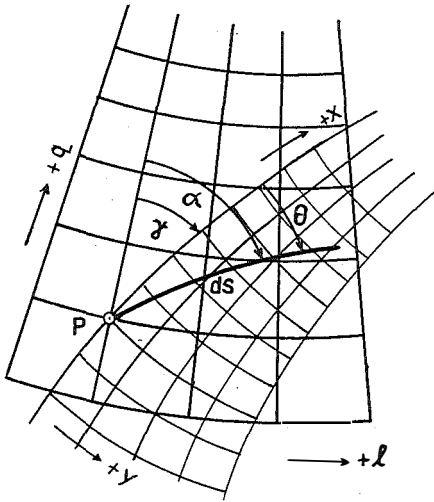


Abb. 3

durch P . Wir entnehmen  
der Figur

$$\gamma = \alpha - \theta \quad (61a)$$

$$\theta = \alpha - \gamma \quad (61b)$$

$$\alpha = \theta + \gamma . \quad (61c)$$

Für die Ableitung  
der Meridiankonvergenz und  
später der Dichte der Koor-  
dinatenlinien in einem iso-  
thermen Netz folgen wir  
einer von Hristow<sup>8</sup> gegebene-  
nen Entwicklung. Wir denken  
uns den Parameter  $\varphi$  in die  
isometrische Breite  $q$  über-  
geführt und damit das ortho-  
gonale Netz der Parallelkreise  
und Meridiane in ein iso-

thermes Netz verwandelt. Für ein und dasselbe Bogenelement  $ds$   
einer Flächenkurve in diesem und in einem beliebigen anderen  
isothermen Netz des Rotationsellipsoids gilt

$$ds^2 = N^2 \cos^2 \varphi (dq^2 + dl^2) = \frac{1}{m^2} (dx^2 + dy^2) . \quad (62)$$

Die Bogenelemente in den Parameterkurven sind

$$ds_q = N \cos \varphi dq \quad ds_l = N \cos \varphi dl \quad (63)$$

$$ds_x = \frac{1}{m} dx \quad ds_y = \frac{1}{m} dy . \quad (64)$$

Das Bogenelement  $ds$  habe nun, bezogen auf das  
Netz  $q, l$ , das Azimut  $\alpha$  und, bezogen auf das Netz  $x, y$ ,  
den geodätischen Richtungswinkel  $\theta$  . Projizieren wir das  
Linielement auf die Koordinatenlinien, so ergibt sich

$$ds_q = ds \cos \alpha \quad ds_l = ds \sin \alpha \quad (65)$$

$$ds_x = ds \cos \theta \quad ds_y = ds \sin \theta \quad (66)$$

Die Vergleichung der vorstehenden Ausdrücke (63)  
und (64) ergibt

$$ds \cos \alpha = N \cos \varphi dq \quad ds \sin \alpha = N \cos \varphi dl \quad (67)$$

$$ds \cos \theta = \frac{1}{m} dx \quad ds \sin \theta = \frac{1}{m} dy . \quad (68)$$

Wir bilden daraus

$$ds (\cos \alpha \pm i \sin \alpha) = N \cos \varphi (dq \pm i dl)$$

$$ds (\cos \theta \pm i \sin \theta) = \frac{1}{m} (dx \pm i dy)$$

und schreiben diese Gleichungen um in

$$ds e^{\pm i\alpha} = N \cos \varphi d(q \pm i l) \quad (69)$$

$$ds e^{\pm i\theta} = \frac{1}{m} d(x \pm i y) \quad (70)$$

Die Division der ersten Gleichung durch die zweite ergibt

$$e^{\pm i(\alpha - \theta)} = e^{\pm i\gamma} = m N \cos \varphi \frac{d(q \pm i l)}{d(x \pm i y)} \quad (71)$$

Es ist also

$$e^{+i\gamma} = m N \cos \varphi \frac{d(q + i l)}{d(x + i y)} \quad (71a)$$

und

$$e^{-i\gamma} = m N \cos \varphi \frac{d(q - i l)}{d(x - i y)} \quad (71b)$$

Wir dividieren die beiden letzten Gleichungen durcheinander und erhalten

$$e^{+2i\gamma} = \frac{d(q + i l)}{d(x + i y)} \cdot \frac{d(x - i y)}{d(q - i l)} \quad (72a)$$

oder auch

$$e^{-2i\gamma} = \frac{d(q - i l)}{d(x - i y)} \cdot \frac{d(x + i y)}{d(q + i l)} \quad (72b)$$

Nun ist, wie bekannt,

$$\sin 2\gamma = \frac{e^{2i\gamma} - e^{-2i\gamma}}{2i}$$

Tragen wir hierin die Gleichungen (72) ein, so ergibt sich

$$\sin 2\gamma = \frac{1}{2i} \left[ \frac{\frac{d(x - i y)}{d(q - i l)}}{\frac{d(x + i y)}{d(q + i l)}} - \frac{\frac{d(x + i y)}{d(q + i l)}}{\frac{d(x - i y)}{d(q - i l)}} \right] = \frac{1}{2i} \left[ \frac{\frac{d(q + i l)}{d(x + i y)}}{\frac{d(q - i l)}{d(x - i y)}} - \frac{\frac{d(q - i l)}{d(x - i y)}}{\frac{d(q + i l)}{d(x + i y)}} \right] \quad (73)$$

Damit sind zwei allgemeine Gleichungen für die Berechnung der Meridiankonvergenz - der Konvergenz des Meridians gegen die Linie  $y = \text{const.}$  in einem Punkt des Ellipsoids - gefunden.

Mit Benützung der früheren Entwicklungen läßt sich nun auch der Ausdruck für die mit den Fundamentalgrößen I. Ordnung der Fläche bei deren Darstellung durch thermische Parameter in engem Zusammenhang stehende Dichte der Koordinatenlinien leicht angeben. Indem wir die Gleichungen (71a, b) miteinander multiplizieren, erhalten wir



$$m^2 = \frac{1}{N^2 \cos^2 \varphi} \cdot \frac{d(x+iy)}{d(q+i\ell)} \cdot \frac{d(x-iy)}{d(q-i\ell)} = \frac{1}{N^2 \cos^2 \varphi} \cdot \frac{1}{\frac{d(q+i\ell)}{d(x+iy)}} \cdot \frac{1}{\frac{d(q-i\ell)}{d(x-iy)}} \quad (74)$$

Zur Weiterentwicklung der obigen Ergebnisse (73) und (74) setzen wir noch

$$\frac{d(x \pm iy)}{d(q \pm i\ell)} = A \pm iA' \quad \frac{d(q \pm i\ell)}{d(x \pm iy)} = B \pm iB'$$

und führen diese Ausdrücke in (73) und (74) ein. Wir erkennen hierbei, daß diese Gleichungen reell sind; es ist zunächst

$$\sin 2\gamma = - \frac{2AA'}{A^2 + A'^2} = \frac{2BB'}{B^2 + B'^2} \quad (75)$$

In der Regel wird man nicht eine Funktion der Meridiankonvergenz, sondern diese selbst berechnen wollen. Indem wir die Meridiankonvergenz als nur kleinen Winkel voraussetzen, gehen wir mit Hilfe der arc sin-Reihe, die wir für den doppelten Winkel mit

$$2\gamma = \sin 2\gamma + \frac{1}{6} \sin^3 2\gamma + \frac{3}{40} \sin^5 2\gamma \dots \quad (76)$$

anschreiben, vom Sinus des doppelten Winkels auf diesen selbst über.

Ebenso ergeben sich für die Dichte der Koordinatenlinien reelle Ausdrücke, nämlich

$$m^2 = \frac{1}{N^2 \cos^2 \varphi} (A^2 + A'^2) = \frac{1}{N^2 \cos^2 \varphi} \cdot \frac{1}{B^2 + B'^2} \quad (77)$$

Die Größen  $A$ ,  $A'$  und  $B$ ,  $B'$  finden wir durch Differentiation von (53) und (55) mit

$$A \pm iA' = a_1 + 2a_2 (\Delta q \pm i\ell) + 3a_3 (\Delta q \pm i\ell)^2 \dots$$

$$B \pm iB' = b_1 + 2b_2 (x \pm iy) + 3b_3 (x \pm iy)^2 \dots$$

Die Koeffizienten  $a_n$ ,  $b_n$  und die Parameterunterschiede  $\Delta q$ ,  $\ell$  sowie  $x$ ,  $y$  in diesen Ausdrücken beziehen sich auf einen Punkt  $P_0$ , den wir uns in der Umgebung des betrachteten Punktes auf einem Grundmeridian angenommen denken wollen. Wir trennen die obigen Gleichungen noch nach dem reellen und imaginären Teil und erhalten

$$A = a_1 + 2a_2 \Delta q + 3a_3 (\Delta q^2 - \ell^2) + 4a_4 (\Delta q^3 - 3\Delta q \ell^2) + \dots$$

$$A' = 2a_2 \ell + 6a_3 \Delta q \ell + 4a_4 (3\Delta q^2 \ell - \ell^3) + \dots \quad (78a)$$

$$B = b_1 + 2b_2 x + 3b_3 (x^2 - y^2) + 4b_4 (x^3 - 3xy^2) + \dots$$

$$B' = 2b_2 y + 6b_3 xy + 4b_4 (3x^2 y - y^3) + \dots \quad (78b)$$

In diesen Gleichungen beziehen sich, wie erwähnt, die Koeffizienten  $a_n$ ,  $b_n$  auf einen Ausgangspunkt  $P_0$ ; die Größe  $N \cos \varphi$  in (77) gehört jedoch dem Flächenpunkt  $x$ ,  $y$ .

an. Um auch diesen Ausdruck auf den Ausgangspunkt zu beziehen, entwickeln wir ihn in demselben nach Taylor. Es ist

$$\frac{1}{N^2 \cos^2 \varphi} = \frac{1}{N_0^2 \cos^2 \varphi_0} + \frac{1}{1!} \frac{d}{dq} \left( \frac{1}{N^2 \cos^2 \varphi} \right)_0 \Delta q \dots$$

oder auch

$$\frac{1}{N \cos \varphi} = \frac{1}{N_0 \cos \varphi_0} + \frac{1}{1!} \frac{d}{dq} \left( \frac{1}{N \cos \varphi} \right)_0 \Delta q \dots \quad (79)$$

Nach Ausführung der angezeigten Ableitungen in der letzteren Zeile ergibt sich eine Potenzreihe, die wir in der Form

$$\frac{1}{N \cos \varphi} = \frac{1}{N_0 \cos \varphi_0} [1 + e_1 \Delta q + e_2 \Delta q^2 + e_3 \Delta q^3 \dots] \quad (80)$$

anschreiben können.

Damit ist nunmehr alles vorbereitet, um praktisch brauchbare Rechenformeln zur Berechnung der Meridiankonvergenz und der Dichte der Koordinatenlinien aufzustellen.

Wir tragen die Gleichungen (78) in die entsprechenden Ausdrücke (75) ein; mit den beiden so erhaltenen Formeln erhalten wir schließlich aus (76) nach längerer Rechnung, die jedoch übergangen sei, die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \gamma = & \left( -2 \frac{a_2}{a_1} \right) \ell + \left( -6 \frac{a_3}{a_1} + 4 \frac{a_2^2}{a_1^2} \right) \Delta q \ell \\ & + \left( -12 \frac{a_4}{a_1} + 18 \frac{a_2 a_3}{a_1^2} - 8 \frac{a_2^3}{a_1^3} \right) \Delta q^2 \ell \\ & + \left( 4 \frac{a_4}{a_1} - 6 \frac{a_2 a_3}{a_1^2} + \frac{8}{3} \frac{a_2^3}{a_1^3} \right) \ell^3 \quad (81) \\ & + \left( -20 \frac{a_5}{a_1} + 32 \frac{a_2 a_4}{a_1^2} + 18 \frac{a_3^2}{a_1^2} - 48 \frac{a_2^2 a_3}{a_1^3} + 16 \frac{a_2^4}{a_1^4} \right) \Delta q^3 \ell \\ & + \left( 20 \frac{a_5}{a_1} - 32 \frac{a_2 a_4}{a_1^2} - 18 \frac{a_3^2}{a_1^2} + 48 \frac{a_2^2 a_3}{a_1^3} - 16 \frac{a_2^4}{a_1^4} \right) \Delta q \ell^3 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \gamma = & \left( 2 \frac{b_2}{b_1} \right) y + \left( 6 \frac{b_3}{b_1} - 4 \frac{b_2^2}{b_1^2} \right) x y \\ & + \left( 12 \frac{b_4}{b_1} - 18 \frac{b_2 b_3}{b_1^2} + 8 \frac{b_2^3}{b_1^3} \right) x^2 y \\ & + \left( -4 \frac{b_4}{b_1} + 6 \frac{b_2 b_3}{b_1^2} - \frac{8}{3} \frac{b_2^3}{b_1^3} \right) y^3 \quad (82b) \\ & + \left( 20 \frac{b_5}{b_1} - 32 \frac{b_2 b_4}{b_1^2} - 18 \frac{b_3^2}{b_1^2} + 48 \frac{b_2^2 b_3}{b_1^3} - 16 \frac{b_2^4}{b_1^4} \right) x^3 y \\ & + \left( -20 \frac{b_5}{b_1} + 32 \frac{b_2 b_4}{b_1^2} + 18 \frac{b_3^2}{b_1^2} - 48 \frac{b_2^2 b_3}{b_1^3} + 16 \frac{b_2^4}{b_1^4} \right) x y^3 \end{aligned}$$

In der ersten der vorstehenden Gleichungen ersetzen wir noch durch

$$\begin{aligned}\Delta Q &= C_1 \Delta \varphi + C_2 \Delta \varphi^2 + C_3 \Delta \varphi^3 + \dots \\ \Delta Q^2 &= C_1^2 \Delta \varphi^2 + 2C_1 C_2 \Delta \varphi^3 + \dots \\ \Delta Q^3 &= C_1^3 \Delta \varphi^3 + \dots\end{aligned}$$

den isometrischen Breitenunterschied durch jenen der geographischen Breite und erhalten

$$\begin{aligned}\gamma &= \left(-2 \frac{a_2}{a_1}\right) \ell + \left(-6 \frac{a_2 C_1}{a_1} + 4 \frac{a_2^2 C_1}{a_1^2}\right) \Delta \varphi \ell \\ &+ \left(-6 \frac{a_3 C_2}{a_1} - 12 \frac{a_4 C_1^2}{a_1} + 4 \frac{a_2^2 C_2}{a_1^2} + 18 \frac{a_2 a_3 C_1^2}{a_1^2} - 8 \frac{a_2^3 C_1^2}{a_1^3}\right) \Delta \varphi^2 \ell \\ &+ \left(4 \frac{a_4}{a_1} - 6 \frac{a_2 a_3}{a_1^2} + \frac{8}{3} \frac{a_2^3}{a_1^3}\right) \ell^3 \quad (82a) \\ &+ \left(-6 \frac{a_3 C_3}{a_1} - 24 \frac{a_4 C_1 C_2}{a_1} - 20 \frac{a_5 C_1^3}{a_1} + 4 \frac{a_2^2 C_3}{a_1^2} + 36 \frac{a_2 a_3 C_1 C_2}{a_1^2}\right. \\ &\quad \left.+ 32 \frac{a_2 a_4 C_1^3}{a_1^2} + 18 \frac{a_3^2 C_1^3}{a_1^2} - 16 \frac{a_2^2 C_1 C_2}{a_1^2} - 48 \frac{a_2^2 a_3 C_1^3}{a_1^3} + 16 \frac{a_2^4 C_1^3}{a_1^4}\right) \Delta \varphi^3 \ell \\ &+ \left(20 \frac{a_5 C_1}{a_1} - 32 \frac{a_2 a_4 C_1}{a_1^2} - 18 \frac{a_3^2 C_1}{a_1^2} + 48 \frac{a_2^2 a_3 C_1}{a_1^3} - 16 \frac{a_2^4 C_1}{a_1^4}\right) \Delta \varphi \ell^3.\end{aligned}$$

Mit den vorstehenden Formeln kann die Meridiankonvergenz sowohl aus den Unterschieden der thermischen Parameter  $x$ ,  $y$  als auch jenen der Parameter  $\varphi$ ,  $\lambda$  zu einem Ausgangspunkt  $P_0$  und damit natürlich aus den Parametern selbst berechnet werden. Zur Aufstellung dieser Formeln, die von Hristow<sup>8</sup> bis zu den Gliedern vierter Ordnung angegeben werden, ist nur die Kenntnis der schon erklärten Größen  $a_n$ ,  $b_n$  und  $c_n$  notwendig.

Die Entwicklung der Formel zur praktischen Berechnung der Dichte der Koordinatenlinien wollen wir - man gelangt zu einem recht umfangreichen Formelsystem - wenigstens andeuten. Indem wir uns auf die Glieder zweiter Ordnung beschränken, bilden wir die Quadrate der beiden Ausdrücke (78a) und tragen diese in die erste Form von (77) ein; dies ergibt

$$m^2 = \frac{a_1^2}{N^2 \cos^2 \varphi} \left[ 1 + \left(4 \frac{a_2}{a_1}\right) \Delta Q + \left(6 \frac{a_3}{a_1} + 4 \frac{a_2^2}{a_1^2}\right) \Delta Q^2 + \left(-6 \frac{a_3}{a_1} + 4 \frac{a_2^2}{a_1^2}\right) \ell^2 + \dots \right].$$

Wir ziehen hieraus die Wurzel, wobei wir uns im zweiten Faktor des binomischen Lehrsatzes bedienen. Es ist

$$m = \frac{a_1}{N \cos \varphi} \left[ 1 + \left(2 \frac{a_2}{a_1}\right) \Delta Q + \left(3 \frac{a_3}{a_1}\right) \Delta Q^2 + \left(-3 \frac{a_3}{a_1} + 2 \frac{a_2^2}{a_1^2}\right) \ell^2 + \dots \right].$$

Nummehr beziehen wir mit

$$\frac{1}{N \cos \varphi} = \frac{1}{N_0 \cos \varphi_0} \left[ 1 + e_1 \Delta Q + e_2 \Delta Q^2 + \dots \right]$$

auch den Nenner des ersten Faktors auf den Ausgangspunkt und erhalten

$$m = \frac{a_1}{N_0 \cos \varphi_0} \left[ 1 + \left( 2 \frac{a_2}{a_1} + e_1 \right) \Delta q + \left( 3 \frac{a_3}{a_1} + 2 \frac{a_2}{a_1} e_1 + e_2 \right) \Delta q^2 + \left( -3 \frac{a_3}{a_1} + 2 \frac{a_2^2}{a_1^2} \right) \ell^2 + \dots \right].$$

Als letzten Schritt ersetzen wir noch den isometrischen Breitenunterschied durch jenen der geographischen Breite mit

$$\Delta q = c_1 \Delta \varphi + c_2 \Delta \varphi^2 + \dots$$

$$\Delta q^2 = c_1^2 \Delta \varphi^2 + \dots$$

und erhalten schließlich

$$\begin{aligned} m = \frac{a_1}{N_0 \cos \varphi_0} & \left[ 1 + \left( 2 \frac{a_2}{a_1} c_1 + c_1 e_1 \right) \Delta \varphi \right. \\ & + \left( 2 \frac{a_2}{a_1} c_2 + c_2 e_1 + 3 \frac{a_3}{a_1} c_1^2 + 2 \frac{a_2}{a_1} c_1^2 e_1 + c_1^2 e_2 \right) \Delta \varphi^2 \\ & \left. + \left( -3 \frac{a_3}{a_1} + 2 \frac{a_2^2}{a_1^2} \right) \ell^2 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (83a)$$

Um die Dichte der Koordinatenlinien eines isothermen Netzes auch aus den thermischen Parametern zu berechnen, gehen wir von der zweiten Form des Ausdruckes (77) aus. Aus (78b) bilden wir

$$B^2 + B'^2 = b_1^2 \left[ 1 + 4 \frac{b_2}{b_1} x + \left( 6 \frac{b_3}{b_1} + 4 \frac{b_2^2}{b_1^2} \right) x^2 + 4 \frac{b_2^2}{b_1^2} y^2 + \dots \right].$$

Durch Anwendung des binomischen Lehrsatzes auf den Ausdruck innerhalb der weiten Klammer erhalten wir

$$\frac{1}{B^2 + B'^2} = \frac{1}{b_1^2} \left[ 1 + \left( -4 \frac{b_2}{b_1} \right) x + \left( -6 \frac{b_3}{b_1} + 12 \frac{b_2^2}{b_1^2} \right) x^2 + \left( -4 \frac{b_2^2}{b_1^2} \right) y^2 + \dots \right].$$

Wir tragen diesen Ausdruck in (77) ein; indem wir in diesem wieder mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes die Wurzel ziehen, erhalten wir

$$m = \frac{1}{b_1 N_0 \cos \varphi} \left[ 1 + \left( -2 \frac{b_2}{b_1} \right) x + \left( -3 \frac{b_3}{b_1} + 4 \frac{b_2^2}{b_1^2} \right) x^2 + \left( -2 \frac{b_2^2}{b_1^2} \right) y^2 + \dots \right]. \quad (84)$$

Als letzter Schritt ist die Größe  $N \cos \varphi$  auf den Ausgangspunkt  $P_0$  zu beziehen. In die schon benützte Entwicklung

$$\frac{1}{N \cos \varphi} = \frac{1}{N_0 \cos \varphi_0} (1 + e_1 \Delta q + e_2 \Delta q^2 + \dots)$$

tragen wir die Transformationsgleichung (58a) ein; dies ergibt

$$\frac{1}{N \cos \varphi} = \frac{1}{N_0 \cos \varphi_0} \left[ 1 + b_1 e_1 x + (b_2 e_1 + b_1^2 e_2) x^2 + (-b_2 e_1) y^2 + \dots \right].$$

Mit der Eintragung dieses Ausdruckes in (84) erhalten wir das gesuchte Ergebnis; es ist

$$\begin{aligned}
m = \frac{1}{b_1 N_0 \cos \varphi_0} & \left[ 1 + \left( -2 \frac{b_2}{b_1} + b_1 e_1 \right) x \right. \\
& + \left( -3 \frac{b_3}{b_1} + 4 \frac{b_2^2}{b_1^2} - b_2 e_1 + b_1^2 e_2 \right) x^2 \\
& \left. + \left( -2 \frac{b_2}{b_1^2} - b_2 e_1 \right) y^2 + \dots \right] \quad (83b)
\end{aligned}$$

Damit ist auch die Aufgabe gelöst, Rechenformeln zur Berechnung der Dichte der Koordinatenlinien eines isothermen Netzes und damit der Fundamentalgrößen desselben aufzustellen; dies sowohl in Funktion der Parameter des geographischen Netzes als auch in Funktion von beliebigen, aus den ersteren abgeleiteten thermischen Parametern.

## 7. Die geodätischen Hauptaufgaben in isothermen Koordinaten.

Unter den geodätischen Hauptaufgaben versteht man die sogenannte geodätische Übertragung der Koordinaten eines Flächenpunktes durch Bogenlänge und Richtung einer durch ihn verlaufenden geodätischen Kurve auf einen zweiten Punkt der Fläche (erste Hauptaufgabe) und die inverse Operation, die Berechnung von Länge und Richtung einer geodätischen Kurve zwischen und in zwei gegebenen Flächenpunkten (zweite Hauptaufgabe).

Es sei zunächst die erste Hauptaufgabe in isothermen Koordinaten etwas spezieller formuliert. Das Rotationsellipsoid sei mit einem isothermen Netz krummer Koordinatenlinien  $x, y$  doppelt überdeckt; ein Punkt  $P_1$  sei auf der Fläche durch die Parameterwerte  $x_1$  und  $y_1$  - wir bezeichnen diese einfach als die isothermen Koordinaten von  $P_1$  - gegeben. Von diesem Punkt gehe unter dem wie üblich von der Linie  $y = \text{const.}$  gleich  $y_1$  durch  $P_1$  gezählten geodätischen Richtungswinkel  $\tau_{1,2}$  eine geodätische Kurve der Bogenlänge  $\sigma$  aus. Gesucht sind die isothermen Koordinaten  $x_2, y_2$  des Endpunktes  $P_2$  der Kurve sowie deren Richtung im Endpunkt. Man erkennt, daß diese Aufgabe die Verallgemeinerung der elementaren ersten Grundaufgabe der Rechnung in ebenen cartesischen Koordinaten darstellt. Flächentheoretisch betrachtet ist sie die Transformation der geodätischen Polarkoordinaten  $\tau, \sigma$  in isotherme Koordinaten  $x, y$ , also eine Transformation verschiedenartiger Parameter der Fläche ineinander.

Wir lösen die so gestellte Aufgabe, indem wir die Koordinatenunterschiede und den Richtungsunterschied in nach Potenzen der Bogenlänge der geodätischen Kurve fortschreitende Potenzreihen entwickeln und setzen dabei voraus, daß die Bogenlänge der geodätischen Kurve so klein sei, daß in den

folgenden Entwicklungen einige Terme derselben genügen, um die zu berechnenden Größen hinreichend genau zu bestimmen. Wir bezeichnen Bogenlänge und Richtung der geodätischen Kurve mit  $\sigma$  und  $\tau$ ; die Indices 1, 2 verwenden wir für den Anfangs- und Endpunkt der Strecke. Die Entwicklung der Koordinatenunterschiede und des Richtungsunterschiedes im Anfangspunkt ergibt

$$x_2 - x_1 = \Delta x_{12} = \frac{1}{1!} \left( \frac{dx}{d\sigma} \right)_1 \sigma + \frac{1}{2!} \left( \frac{d^2x}{d\sigma^2} \right)_1 \sigma^2 + \frac{1}{3!} \left( \frac{d^3x}{d\sigma^3} \right)_1 \sigma^3 + \dots \quad (85a)$$

$$y_2 - y_1 = \Delta y_{12} = \frac{1}{1!} \left( \frac{dy}{d\sigma} \right)_1 \sigma + \frac{1}{2!} \left( \frac{d^2y}{d\sigma^2} \right)_1 \sigma^2 + \frac{1}{3!} \left( \frac{d^3y}{d\sigma^3} \right)_1 \sigma^3 + \dots \quad (85b)$$

$$\tau_2 - \tau_1 = \Delta \tau_{12} = \frac{1}{1!} \left( \frac{d\tau}{d\sigma} \right)_1 \sigma + \frac{1}{2!} \left( \frac{d^2\tau}{d\sigma^2} \right)_1 \sigma^2 + \dots \quad (85c)$$

Die ersten beiden Differentialquotienten erster Ordnung finden wir aus den Beziehungen, die zwischen dem Bogenelement einer beliebigen, durch einen Punkt der Fläche unter dem geodätischen Richtungswinkel  $\tau$  verlaufenden Flächenkurve und den Bogenelementen der Parameterkurven im betrachteten Punkt bestehen. In einem orthogonalen krummlinigen Koordinatensystem gilt

$$\sqrt{E} du = d\sigma \cos \tau \quad \text{und} \quad \sqrt{G} dv = d\sigma \sin \tau$$

Handelt es sich um isotherme Koordinaten, so haben wir mit der Parameterbezeichnung  $x, y$  und  $E = G = \frac{1}{m^2}$  die vorstehenden Ausdrücke in

$$\frac{1}{m} dx = d\sigma \cos \tau, \quad \frac{1}{m} dy = d\sigma \sin \tau,$$

oder

$$\frac{dx}{d\sigma} = m \cos \tau, \quad \frac{dy}{d\sigma} = m \sin \tau \quad (86)$$

umzuschreiben. Den dritten Differentialquotienten erster Ordnung finden wir aus der totalen Differentialgleichung der geodätischen Kurve<sup>9</sup>. Wir schreiben diese zunächst für ein Orthogonalsystem  $u, v$  an; es ist

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{1}{2\sqrt{EG}} (E_v \frac{du}{d\sigma} - G_u \frac{dv}{d\sigma}).$$

Nach dem Übergang auf isotherme Koordinaten erhält diese Gleichung mit Benützung der Gleichungen (86) die Form

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = -m_y \cos \tau + m_x \sin \tau \quad (87)$$

Damit ist auch der erste Differentialquotient der dritten Gleichung des Gleichungssystems (85) gegeben; wir benützen ihn, um fortschreitend alle weiteren Differentialquotienten in diesem Gleichungssystem zu berechnen und erhalten - wir geben nur die Differentialquotienten von (85a) an -

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\sigma} &= m \cos \tau \\ \frac{d^2x}{d\sigma^2} &= mm_x \cos^2 \tau + 2mm_y \cos \tau \sin \tau - mm_x \sin^2 \tau \\ \frac{d^3x}{d\sigma^3} &= [mm_x^2 - 2mm_y^2 + m^2m_{xx}] \cos^3 \tau \\ &\quad + [9mm_x m_y + 3m^2m_{xy}] \cos^2 \tau \sin \tau \\ &\quad + [-5mm_x^2 + 4m_y^2 - m^2m_{xx} + 2m^2m_{yy}] \cos \tau \sin^2 \tau \\ &\quad + [-3mm_x m_y - m^2m_{xy}] \sin^3 \tau \end{aligned}$$

Man erkennt, daß die angeschriebenen Differentialquotienten Funktionen von  $m$  und dessen partiellen Ableitungen in  $P_1$  \*) sowie der Ausgangsrichtung der geodätischen Kurve in diesem Punkt sind. Es zeigt sich weiter, daß die Potenzen von  $\cos \tau$  und  $\sin \tau$  sowie die Produkte dieser Größen in allen Ableitungen in der Ordnungszahl derselben und damit natürlich auch in der der Potenzen der Bogenlänge vorkommen. Deswegen können die Reihen (85) in Form von Potenzreihen in  $\sigma \cos \tau = u$  und  $\sigma \sin \tau = v$  als endgültiges Ergebnis angeschrieben werden. Wir erhalten<sup>10</sup>

$$\begin{aligned} \Delta x_{12} &= mu + \frac{1}{2} mm_x u^2 + mm_y uv - \frac{1}{2} mm_x v^2 \\ &\quad + \frac{m}{6} [m_x^2 - 2m_y^2 + mm_{xx}] u^3 + \frac{m}{2} [3m_x m_y + mm_{xy}] u^2 v \quad (88a) \\ &\quad + \frac{m}{6} [-5m_x^2 + 4m_y^2 - mm_{xx} + 2mm_{yy}] uv^2 + \frac{m}{6} [-3m_x m_y - mm_{xy}] v^3 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta y_{12} &= mv - \frac{1}{2} mm_y u^2 + mm_x uv + \frac{1}{2} mm_y v^2 \\ &\quad + \frac{m}{6} [-3m_x m_y - mm_{xy}] u^3 + \frac{m}{6} [4m_x^2 - 5m_y^2 + 2mm_{xx} - 2mm_{yy}] u^2 v \\ &\quad + \frac{m}{6} [9m_x m_y + 3mm_{xy}] uv^2 + \frac{m}{6} [-2m_x^2 + m_y^2 + mm_{yy}] v^3 + \dots \quad (88b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \tau_{12} &= -m_y u + m_x v + \frac{1}{2} [-m_x m_y - mm_{xy}] u^2 \quad (88c) \\ &\quad + \frac{1}{2} [m_x^2 - m_y^2 + mm_{xx} - mm_{yy}] uv + \frac{1}{2} [m_x m_y + mm_{xy}] v^2 + \dots \end{aligned}$$

Hierin beziehen sich alle von  $x$  und  $y$  abhängigen Größen, also  $m$  und dessen partielle Ableitungen, auf den Anfangspunkt  $P_1$ .

Eine Lösung der zweiten Hauptaufgabe ergibt sich, wenn wir die Potenzreihen (88a) und (88b) umkehren. Das Ergebnis dieser Umkehrung ist

\*)  $m_x^2, m_y^2$  ist hier und in weiterer Folge als  $(\frac{\partial m}{\partial x})^2, (\frac{\partial m}{\partial y})^2$  zu lesen.

$$\begin{aligned}
\sigma \cos \tau = u &= \frac{1}{m} \Delta x - \frac{m_x}{2m^2} \Delta x^2 - \frac{m_y}{m^2} \Delta x \Delta y + \frac{m_x}{2m^2} \Delta y^2 \\
&+ \frac{1}{6m^3} [2m_x^2 - m_y^2 - mm_{xx}] \Delta x^3 + \frac{1}{2m^3} [3m_x m_y - mm_{xy}] \Delta x^2 \Delta y \\
&+ \frac{1}{6m^3} [-4m_x^2 + 5m_y^2 + mm_{xx} - 2mm_{yy}] \Delta x \Delta y^2 \\
&+ \frac{1}{6m^3} [-3m_x m_y + mm_{xy}] \Delta y^3 + \dots \quad (89a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma \sin \tau = v &= \frac{1}{m} \Delta y - \frac{m_y}{2m^2} \Delta x \Delta y - \frac{m_y}{2m^2} \Delta y^2 \\
&+ \frac{1}{6m^3} [-3m_x m_y + mm_{xy}] \Delta x^3 \\
&+ \frac{1}{6m^3} [5m_x^2 - 4m_y^2 - 2mm_{xx} + mm_{yy}] \Delta x^2 \Delta y \\
&+ \frac{1}{2m^3} [3m_x m_y - mm_{xy}] \Delta x \Delta y^2 + \frac{1}{6m^3} [-m_x^2 + 2m_y^2 - mm_{yy}] \Delta y^3 + \dots \quad (89b)
\end{aligned}$$

Tragen wir diese beiden Gleichungen noch in (88c) ein, so entsteht eine dieser Gleichung entsprechende Formel zur Berechnung der Änderung des geodätischen Richtungswinkels, diesmal jedoch in Funktion der Koordinatenunterschiede. Es ist

$$\begin{aligned}
\Delta \tau_{12} &= -\frac{m_y}{m} \Delta x + \frac{m_x}{m} \Delta y \\
&+ \frac{1}{2m^2} [m_x m_y - mm_{xy}] \Delta x^2 + \frac{1}{2m^2} [-m_x^2 + m_y^2 + mm_{xx} - mm_{yy}] \Delta x \Delta y \\
&+ \frac{1}{2m^2} [-m_x m_y + mm_{xy}] \Delta y^2 + \dots \quad (89c)
\end{aligned}$$

Nimmt man in den Formeln (89) die Koeffizienten für  $P_1$ , so sind alle Differenzen im Sinne 1,2 einzuführen. Man erhält damit den Richtungswinkel in  $P_1$ . Durch Vertauschen des Anfangspunktes mit dem Endpunkt erhält man den Richtungswinkel in  $P_2$  und den Richtungsunterschied im entgegengesetzten Sinne.

Die Gleichungen (89a,b) lassen sich noch auf einem anderen Wege herleiten. Wir entwickeln dazu die Bogenlänge der geodätischen Kurve in je eine Potenzreihe, fortschreitend nach Potenzen des einen und des anderen Koordinatenunterschiedes. Allgemein angeschrieben lauten diese Entwicklungen:

$$\sigma = \frac{1}{1!} \frac{d\sigma}{dx} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{d^2\sigma}{dx^2} \Delta x^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3\sigma}{dx^3} \Delta x^3 + \dots \quad (90a)$$

$$\sigma = \frac{1}{1!} \frac{d\sigma}{dy} \Delta y + \frac{1}{2!} \frac{d^2\sigma}{dy^2} \Delta y^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3\sigma}{dy^3} \Delta y^3 + \dots \quad (90b)$$

Zur Berechnung der Differentialquotienten entnehmen wir aus (86)

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{1}{m \cos \tau} \qquad \frac{d\sigma}{dy} = \frac{1}{m \sin \tau} \quad (91)$$



und bilden - wir deuten den weiteren Gang der Entwicklung nur an - die zweite Ableitung der Bogenlänge nach dem Parameter  $x$ . Es ist

$$\frac{d^2\sigma}{dx^2} = -\frac{1}{m^2 \cos \tau} (m_x + m_y \frac{dy}{dx}) + \frac{1}{m^2 \cos \tau} \operatorname{tg} \tau \frac{d\tau}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dx}$$

Unter Einfügung von

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \tau$$

und der Gleichungen (87) und (91) erhalten wir

$$\frac{d^2\sigma}{dx^2} = \frac{1}{m^2 \cos \tau} [-m_x - 2m_y \operatorname{tg} \tau + m_x \operatorname{tg}^2 \tau]$$

und nach nochmaliger Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{d^3\sigma}{dx^3} = \frac{1}{m^3 \cos \tau} [ & (2m_x^2 + 2m_y^2 - mm_{xx}) \\ & + (3m_x m_y - 3mm_{xy}) \operatorname{tg} \tau \\ & + (-m_x^2 + 8m_y^2 + mm_{xx} - 2mm_{yy}) \operatorname{tg}^2 \tau \\ & + (-9m_x m_y + mm_{xy}) \operatorname{tg}^3 \tau \\ & + (3m_x^2) \operatorname{tg}^4 \tau ] \end{aligned}$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß alle weiteren Ableitungen so geordnet werden können, daß in ihnen neben dem Faktor  $\frac{1}{\cos \tau}$  nur Potenzen von  $\operatorname{tg} \tau$  vorkommen.

Um aus diesen Ableitungen den Richtungswinkel der geodätischen Kurve zu eliminieren, beschreiben wir deren Verlauf durch eine Beziehung zwischen den thermischen Parametern. Es ist

$$\Delta x = \Delta x (\Delta y)$$

Wir entwickeln nach Taylor in

$$\Delta x = \frac{1}{1!} \frac{dx}{dy} \Delta y + \frac{1}{2!} \frac{d^2x}{dy^2} \Delta y^2 \dots$$

und bilden

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{cotg} \tau$$

sowie

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{1}{m \sin^2 \tau} [-m_x + m_y \operatorname{cotg} \tau]$$

Durch Eintragung dieser Ausdrücke in die obige Potenzreihe erhalten wir

$$\Delta x = \operatorname{cotg} \tau \Delta y + \frac{1}{2m \sin^2 \tau} [-m_x + m_y \operatorname{cotg} \tau] \Delta y^2 \dots \quad (92)$$

Die Potenzreihe (90a) wollen wir mit den ausgeführten Ableitungen gleichfalls anschreiben, wobei wir sie noch mit  $\cos \tau$  multiplizieren. Es ist

$$\begin{aligned}
\sigma \cos \tau = & \frac{1}{m} \Delta x + \frac{1}{2m^2} [-m_x - 2m_y \operatorname{tg} \tau + m_x \operatorname{tg}^2 \tau] \Delta x^2 \\
& + \frac{1}{6m^3} [(2m_x^2 + 2m_y^2 - mm_{xx}) + (3m_x m_y - 3mm_{xy}) \operatorname{tg} \tau \\
& \quad + (-m_x^2 + 8m_y^2 + mm_{xx} - 2mm_{yy}) \operatorname{tg}^2 \tau \\
& \quad + (-9m_x m_y + mm_{xy}) \operatorname{tg}^3 \tau + (3m_x^2) \operatorname{tg}^4 \tau] \Delta x^3 \dots \quad (93)
\end{aligned}$$

Mit Hilfe von (92) eliminieren wir aus dieser Gleichung schrittweise die Potenzen von  $\operatorname{tg} \tau$  und gelangen natürlich zu den gleichen Formeln, wie wir sie schon in (89a,b) angegeben haben. Die hier für isotherme Koordinaten skizzierte Lösung der zweiten Hauptaufgabe ist als eine direkte Lösung derselben zu bezeichnen.

Die weitere Behandlung der beiden Hauptaufgaben, z.B. die Entwicklung von Formeln entsprechend den Gaußschen Mittelbreitenformeln, geht über die der vorliegenden Arbeit gegebene Begrenzung hinaus.

Wir haben als Elemente der Geometrie am Rotationsellipsoid ohne nähere Begründung die geodätische Kurve und deren Richtung gewählt. Die geodätische Kurve zwischen zwei Punkten der Fläche ist - zumindest in einem bestimmten Bereich, innerhalb ihrer geodätischen Anwendungsbereiche jedoch immer - eine eindeutige, kürzeste und damit auch in ihrer Bogenlänge hinsichtlich der gewählten Parameter invariante Kurve; ihre tangentielle oder geodätische Krümmung ist bekanntlich gleich Null. Sie weist demnach als Flächenkurve die Eigenschaften der Geraden der Ebene auf. Obwohl die geodätische Kurve in keiner direkten Beziehung zu den Messungsergebnissen der praktischen Geodäsie steht, wird sie doch in der Geometrie in der Bezugsfläche fast ausschließlich benutzt.

In der ebenen Koordinatenrechnung verwendet man für geodätische Zwecke stets ebene cartesische Koordinaten. In diesen hat die Gerade eine Eigenschaft, die die geodätische Kurve der Fläche zufolge der geodätischen Krümmung der Koordinatenlinien im allgemeinen nicht haben kann; Ihr Richtungswinkel ist - selbstverständlich - für ihren ganzen Verlauf konstant. Wählen wir auf dem Rotationsellipsoid irgendein Netz isothermer Koordinatenlinien und verbinden wir zwei Flächenpunkte so, daß die entstehende Flächenkurve die zwischen den beiden Punkten verlaufenden Linien  $y = \text{const.}$  unter dem stets gleichen Winkel schneidet; so erhalten wir in der Fläche eine Kurve konstanten geodätischen Richtungswinkels und damit eine Flächenkurve, die hinsichtlich ihres geodätischen Richtungswinkels der Geraden im ebenen cartesischen Koordinatensystem gleicht.

Diese Kurve kann nur im Zusammenhang mit einem krummlinigen Koordinatensystem definiert werden; ihr Verlauf in der Fläche ist demgemäß nicht invariant gegen eine Änderung der Koordinatenlinien. Sie weicht im allgemeinen von der geodätischen Kurve zwischen den betrachteten Punkten der Fläche ab, wobei diese Abweichung sich mit einer Änderung der Parameter ebenfalls ändern muß.

Wir wollen nun die beiden Hauptaufgaben in isothermen Koordinaten auch mit der Kurve konstanten geodätischen Richtungswinkels lösen und wenden hierbei wieder die Entwicklung der Koordinatenunterschiede nach Potenzen der Bogenlänge an. Der geodätische Richtungswinkel sei diesmal mit  $t$ , die Bogenlänge mit  $s$  bezeichnet; die Entwicklung der Koordinatenunterschiede nach Potenzen der Bogenlänge ergibt

$$\Delta x_{12} = \frac{1}{1!} \left( \frac{dx}{ds} \right)_1 s + \frac{1}{2!} \left( \frac{d^2x}{ds^2} \right)_1 s^2 \dots \quad (94a)$$

$$\Delta y_{12} = \frac{1}{1!} \left( \frac{dy}{ds} \right)_1 s + \frac{1}{2!} \left( \frac{d^2y}{ds^2} \right)_1 s^2 \dots \quad (94b)$$

Die beiden ersten Differentialquotienten sind bereits bekannt; wir entnehmen sie aus (86) mit

$$\frac{dx}{ds} = m \cos t \quad \frac{dy}{ds} = m \sin t .$$

Der Verlauf der Kurve wird zufolge der Festsetzung  $t = \text{const.}$  durch die Differentialgleichung

$$\frac{dt}{ds} = 0 \quad (95)$$

beschrieben. Wir benützen diese, um die weiteren Differentialquotienten in (94) zu bilden und erhalten als Ergebnis schließlich wieder Potenzreihen in  $s \cos t = U$ ,  $s \sin t = V$ . Es ist

$$\begin{aligned} \Delta x_{12} = & mU + \frac{1}{2} m m_x U^2 + \frac{1}{2} m m_y UV \\ & + \frac{m}{6} [m_x^2 + m m_{xx}] U^3 + \frac{m}{3} [m_x m_y + m m_{xy}] U^2 V + \frac{m}{6} [m_y^2 + m m_{yy}] UV^2 + \dots \end{aligned} \quad (96a)$$

$$\begin{aligned} \Delta y_{12} = & mV + \frac{1}{2} m m_x UV + \frac{1}{2} m m_y V^2 \\ & + \frac{m}{6} [m_x^2 + m m_{xx}] U^2 V + \frac{m}{3} [m_x m_y + m m_{xy}] UV^2 + \frac{m}{6} [m_y^2 + m m_{yy}] V^3 + \dots \end{aligned} \quad (96b)$$

Um die zweite Hauptaufgabe zu lösen, kehren wir diese Reihen um und erhalten

$$\begin{aligned}
 s \cos t = U &= \frac{1}{m} \Delta x - \frac{m_x}{2m^2} \Delta x^2 - \frac{m_y}{2m^2} \Delta x \Delta y \\
 &+ \frac{1}{6m^3} [2m_x^2 - mm_{xx}] \Delta x^3 + \frac{1}{3m^3} [2m_x m_y - mm_{xy}] \Delta x^2 \Delta y \\
 &+ \frac{1}{6m^3} [2m_y^2 - mm_{yy}] \Delta x \Delta y^2 + \dots
 \end{aligned} \tag{97a}$$

$$\begin{aligned}
 s \sin t = V &= \frac{1}{m} \Delta y - \frac{m_x}{2m^2} \Delta x \Delta y - \frac{m_y}{2m^2} \Delta y^2 \\
 &+ \frac{1}{6m^3} [2m_x^2 - mm_{xx}] \Delta x^2 \Delta y + \frac{1}{3m^3} [2m_x m_y - mm_{xy}] \Delta x \Delta y^2 \\
 &+ \frac{1}{6m^3} [2m_y^2 - mm_{yy}] \Delta y^3 + \dots
 \end{aligned} \tag{97b}$$

In den vorstehenden Gleichungen (96) und (97) gelten hinsichtlich des Bezugspunktes der Koeffizienten u.s.w. dieselben Regeln, wie wir sie für die Formeln (88) und (89) angegeben haben.

Wir behandeln nun die Frage, welcher Richtungsunterschied bei beliebiger Wahl eines isothermen Netzes in zwei Flächenpunkten zwischen der geodätischen Kurve und der Kurve konstanten geodätischen Richtungswinkels zwischen diesen beiden Punkten besteht; weiterhin stellen wir die Frage nach dem Unterschied der Bogenlängen dieser beiden Kurven<sup>11</sup>.

Wir wollen den Richtungsunterschied  $\psi$  im gleichen Sinne wie einen geodätischen Richtungswinkel, jedoch von der geodätischen Kurve aus zählen; damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
 t_{12} &= \tau_{12} + \psi_{12} \\
 t_{21} &= \tau_{21} + \psi_{21}
 \end{aligned} \tag{98}$$

Weiterhin sei der Unterschied der Bogenlängen durch das Verhältnis  $\frac{s}{\sigma}$  bestimmt. Wir bilden zunächst durch Division von (97b) durch (97a)

$$\operatorname{tg} t = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{99}$$

Die Indices lassen wir weg und vereinbaren, daß der Richtungsunterschied im Anfangspunkt  $P_1$  bestimmt werden soll; es sind also alle Differenzen im Sinne 1,2 zu bilden.

Durch Division von (99b) durch (99a) ergibt sich unter Beachtung der vorstehenden Formel weiter

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} \tau &= \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{m_y}{2m} (1 + \operatorname{tg}^2 t) \Delta x - \frac{m_x}{2m} (1 + \operatorname{tg}^2 t) \Delta y \\
 &+ \left[ -\frac{m_x^2}{4m^2} (1 + \operatorname{tg}^2 t) + \frac{m_{xy}}{6m} \right] \Delta x^2 \\
 &+ \left[ \left( \frac{m_x^2}{4m^2} (1 + \operatorname{tg}^2 t) - \frac{m_{xx}}{6m} + \frac{m_{yy}}{6m} \right) / (1 + \operatorname{tg}^2 t) \right] \Delta x \Delta y \\
 &+ \left[ -\frac{m_x m_y}{4m^2} (1 + \operatorname{tg}^2 t) - \frac{m_{xy}}{6m} \operatorname{tg}^2 t \right] \Delta y^2 \dots
 \end{aligned} \tag{100}$$

Wir setzen

$$\tau = t - \psi$$

und

$$\operatorname{tg} \tau = \operatorname{tg} (t - \psi).$$

Hier bemerken wir, daß für die in der Geodäsie üblichen Größenordnungen von  $s$  oder  $\sigma$  die Unterschiede  $\psi$  stets sehr klein sind; ja man trachtet geradezu, sie durch eine entsprechende Annahme des isothermen Netzes innerhalb bestimmter Grenzen zu halten und beurteilt letzten Endes die Brauchbarkeit desselben für geodätische Zwecke überhaupt nach der Größenordnung dieser Unterschiede.

Indem wir nun die Größe  $\psi$  so klein denken, daß in der Taylor'schen Entwicklung die über die zweite Ordnung hinausgehenden Glieder für praktische Zwecke unberücksichtigt bleiben können, erhalten wir

$$\operatorname{tg} t - \frac{1}{\cos^2 t} \psi + \frac{\sin t}{\cos^3 t} \psi^2 \dots = \operatorname{tg} \tau$$

und als Umkehrung

$$\psi = -\cos^2 t (\operatorname{tg} \tau - \operatorname{tg} t) + \sin t \cos^3 t (\operatorname{tg} \tau - \operatorname{tg} t)^2 \dots \quad (101)$$

Hierin tragen wir nunmehr (99) und (100) ein und erhalten den gesuchten Richt gswinkel zwischen den beiden Kurven in  $P_1$  mit

$$\begin{aligned} \psi_{12} = & -\frac{m_y}{2m} \Delta X + \frac{m_x}{2m} \Delta Y \\ & + \left[ \frac{m_x m_y}{4m^2} + \frac{m_{xy}}{6m} \right] \Delta X^2 \\ & + \left[ -\frac{m_x^2}{4m^2} + \frac{m_y^2}{4m^2} + \frac{m_{xx}}{6m} - \frac{m_{yy}}{6m} \right] \Delta X \Delta Y \\ & + \left[ -\frac{m_x m_y}{4m^2} + \frac{m_{xy}}{6m} \right] \Delta Y^2 + \dots \end{aligned} \quad (102a)$$

Um auch  $\psi_{2,1}$  zu berechnen, wären die Koeffizienten der obigen Formel, die sich wie immer auf den Anfangspunkt  $P_1$  beziehen, im Endpunkt  $P_2$  zu nehmen und die Koordinatenunterschiede im Sinne  $P_2 P_1$  einzuführen. Wir können aber auch daran erinnern, daß der geodätische Richt gswinkel beider Kurven in  $P_2$  leicht angegeben werden kann; es ist

$$t_{2,1} \pm \pi = t_{1,2} \quad \tau_{2,1} \pm \pi = \tau_{1,2} + \Delta \tau_{1,2}$$

und daraus

$$t_{2,1} - \tau_{2,1} = t_{1,2} - \tau_{1,2} - \Delta \tau_{1,2}$$

oder

$$\psi_{2,1} = \psi_{1,2} - \Delta \tau_{1,2}$$

In diese letztere Gleichung tragen wir nunmehr die Gleichungen (102a) und (89c) ein. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
\psi_{21} = & \frac{m_y}{2m} \Delta x - \frac{m_x}{2m} \Delta y \\
& + \left[ -\frac{m_x m_y}{4m^2} + \frac{m_{xy}}{3m} \right] \Delta x^2 \\
& + \left[ \frac{m_x^2}{4m^2} - \frac{m_y^2}{4m^2} - \frac{m_{xx}}{3m} + \frac{m_{yy}}{3m} \right] \Delta x \Delta y \\
& + \left[ \frac{m_x m_y}{4m^2} - \frac{m_{xy}}{3m} \right] \Delta y^2 + \dots \quad (102b)
\end{aligned}$$

Hierin beziehen sich, wie in (102a), alle Koeffizienten auf den Anfangspunkt  $P_1$ .

Um auch den Unterschied in den Bogenlängen zu ermitteln, quadrieren wir die Gleichungen (89a) und (89b) sowie die Gleichungen (97a) und (97b). Indem wir die Ergebnisse dieser Operation paarweise addieren, finden wir bereits die Quadrate der Bogenlängen. Deren Quotient ergibt nach dem Ziehen der Wurzel - die hiezu notwendigen Rechnungen übergehen wir - das gesuchte Verhältnis der beiden Bogenlängen, welches wir in der Form

$$s = \sigma \left[ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{m_y}{2m} \Delta x - \frac{m_x}{2m} \Delta y \right)^2 \dots \right] \quad (103a)$$

und

$$\sigma = s \left[ 1 - \frac{1}{6} \left( \frac{m_y}{2m} \Delta x - \frac{m_x}{2m} \Delta y \right)^2 \dots \right] \quad (103b)$$

anschreiben. Eine Vereinfachung der angegebenen Formeln für die Richtungsunterschiede und für den Längenunterschied zwischen den beiden Kurven wäre noch durch die Einführung mittlerer Koordinatenwerte

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

möglich; wir gehen aber auf diese hin und wieder nützlichen Vereinfachungen nicht näher ein<sup>12</sup>.

Mit den in diesem Abschnitt gegebenen Entwicklungen haben wir - gesehen vom Standpunkt der praktischen Geodäsie - die wichtigsten Probleme der Geometrie am Rotationsellipsoid in isothermen Koordinaten hinreichend behandelt. Wir werden im nächsten Abschnitt darauf zurückkommen.

## 8. Die Beziehungen zwischen den Elementen der Geometrie am Rotationsellipsoid und in der Bildebene.

Im Abschnitt 3. wurde erläutert, daß eine konforme Abbildung einer Fläche  $S$  in eine Fläche  $\bar{S}$  entsteht, wenn beide Flächen durch irgendwelche thermischen Parameter  $x, y$  und  $\bar{x}, \bar{y}$  dargestellt und einander durch

$$\bar{x} + i\bar{y} = f(x + iy) \quad (104)$$

zugeordnet werden. Ohne über die Art der Abbildung irgendwelche Vereinbarungen zu treffen, spezialisieren wir die Aufgabe nun so, daß wir uns an Stelle der beliebigen Fläche  $S$  das Rotationsellipsoid mit den ein für allemal gewählten thermischen Parametern  $q$  und  $l$  denken, während anstelle der zweiten Fläche  $\bar{S}$  eine Ebene, die Bildebene, treten möge. In dieser denken wir uns ein cartesisches Koordinatensystem  $x, y$  - dieses ist bereits isotherm,  $x$  und  $y$  sind daher thermische Parameter der Ebene - eingetragen.

Um das Rotationsellipsoid in diese Ebene konform abzubilden, haben wir die allgemeine Abbildungsgleichung (104) in

$$x + iy = f(q + il) \quad (105)$$

umzuschreiben. Wenn wir uns an die Bemerkungen über die Bestimmung thermischer Parameterpaare einer Fläche (Abschnitt 2) und an die einleitenden Sätze des Abschnittes 5 erinnern, so erkennen wir sofort, daß den Größen  $x$  und  $y$  in (105) eine doppelte Bedeutung zukommt: Sie sind einerseits thermische Parameter der Bildebene und, da wir uns in dieser auf cartesische Koordinaten spezialisiert haben, einfach ebene cartesische Koordinaten in der Bildebene. Sie sind aber andererseits auch thermische Parameter des Rotationsellipsoids und erzeugen auf diesem ein isothermes Netz krummer Koordinatenlinien; diese doppelte Bedeutung ist der Grund, warum wir für thermische Parameter die Bezeichnungen  $x$  und  $y$  gewählt haben. Es bestimmt demnach ein Wertepaar  $x_1, y_1$  sowohl einen Punkt der Fläche als auch einen Punkt der Bildebene. Lassen wir diesen Punkt auf dem Rotationsellipsoid irgendeinen Weg zurücklegen, den wir ihm durch

$$y = y(x)$$

vorschreiben, so beschreibt sein Bildpunkt in der Bildebene eine ebene Kurve, die durch die gleiche Beziehung dargestellt wird. Die krummen Koordinatenlinien  $y = \text{const.}$ ,  $x = \text{const.}$  am Rotationsellipsoid gehen in die Koordinatenlinien der Bildebene über.

Wir betrachten nunmehr eine aus Teilen der krummen Koordinatenlinien  $x_1, x_1 + \varepsilon, y_1, y_1 + \varepsilon$  auf der Fläche gebildete Figur. Von dieser wissen wir, daß sie sich für  $\varepsilon \rightarrow 0$  immer mehr dem ebenen Quadrat annähert; ihr entspricht in der Bildebene ein aus den korrespondierenden Koordinatenlinien gebildetes Quadrat. Demnach ist dem infinitesimalen Quadrat in der einen Fläche - in unserer Spezialisierung am Rotationsellipsoid - ein infinitesimales Quadrat in der zweiten Fläche, der Bildebene, zugeordnet. Diese Figuren unterscheiden sich nur durch ihre Größe; das Verhältnis ihrer Dimensionen erklärt den Abbildungsmaßstab. Von diesem können wir aussagen, daß er von der Richtung unabhängig sein muß, denn nur dann kann dem infinitesimalen Quadrat der ersten Fläche wieder ein infini-

tesimales Quadrat der zweiten Fläche zugeordnet sein. Wir können noch einen Schritt weiter gehen und dem infinitesimalen Quadrat eine beliebige Figur ein- oder umschreiben; zufolge der Invarianz des Abbildungsmaßstabes hinsichtlich der Richtung des abgebildeten Bogenelementes muß durch eine konforme Abbildung stets eine ähnliche Figur in der zweiten Fläche entstehen. Man erklärt daher, wie wir wissen, eine konforme Abbildung als eine Abbildung zweier Flächen ineinander, bei der zwischen dem Urbild und der Abbildung Ähnlichkeit in kleinsten Teilen besteht. Hieraus ergibt sich auch die Winkeltreue dieser Abbildung; der Winkel, unter dem sich zwei Kurven in der einen Fläche schneiden, erscheint als Schnittwinkel der Bildkurven in der zweiten Fläche wieder.

In isothermen Koordinaten ist am Rotationsellipsoid das Bogenelement einer Flächenkurve durch

$$ds^2 = \frac{1}{m^2} (dx^2 + dy^2)$$

gegeben. Das durch die gleichen Parameteränderungen in der Bildebene definierte Bogenelement der zugeordneten ebenen Kurve ist, da hier in allen Punkten  $E = G = 1$  gilt, durch

$$d\bar{s}^2 = dx^2 + dy^2$$

gegeben. Der Abbildungsmaßstab sei durch das Verhältnis

$$\frac{d\bar{s}}{ds}$$

erklärt; man erkennt, daß dieser gleich der Maßzahl der Dichte der Koordinatenlinien  $m$  ist. Es ist nämlich

$$\frac{d\bar{s}^2}{ds^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{\frac{1}{m^2} (dx^2 + dy^2)} = m^2. \quad (106)$$

Die Ortsfunktion  $m$  ist also, sofern es sich um die konforme Abbildung einer beliebigen Fläche in eine Ebene durch Identifizierung der thermischen Flächenparameter mit cartesischen Koordinaten in dieser handelt, der Abbildungsmaßstab, unter dem ein infinitesimales Gebiet um einen betrachteten Punkt der Fläche in die Ebene abgebildet wird. Er ist wohl abhängig vom Ort des betrachteten Punktes, nicht aber von der Richtung, in welcher er bestimmt wird.

Wir können nunmehr auch leicht angeben, an welcher Stelle oder in welchem Bereich ein Netz isothermer krummer Koordinatenlinien in einer Fläche - abgesehen von seiner charakteristischen Eigenschaft - die größtmögliche Ähnlichkeit mit einem ebenen cartesischen Netz hat und wann daher auch die einfachen Formeln der ebenen Koordinatenrechnung mit größtmöglicher Annäherung direkt zur Rechnung in isothermen Koordinaten benützt werden können. Es ist dies dann der Fall, wenn die Änderung von  $m$  an der betrachteten Stelle möglichst klein ist, also für



$$m_x, m_y \rightarrow 0.$$

Die Änderungen der Funktion  $m = m(x,y)$  mit  $x$  und  $y$ , also die Beträge ihrer partiellen Ableitungen in den Koordinatenrichtungen, entscheiden geradezu über die Verwendbarkeit thermischer Parameter und über die Begrenzung des durch diese erzeugten isothermen Netzes und auch des abgebildeten Gebietes für Zwecke der praktischen Geodäsie. Man vergleiche hiezu beispielsweise die Formeln (88,89) mit den Grundformeln der ebenen Koordinatenrechnung. Für  $m_x = m_y = 0$  gehen diese - abgesehen vom Maßstabsfaktor - direkt in die letzteren über; die auf das erste Glied folgenden Terme in (88,89) nehmen mit dem Betrag der partiellen Ableitungen zu, womit diese Formeln sich immer mehr von jenen der ebenen Koordinatenrechnung unterscheiden. In die Praxis übertragen bedeutet dies, daß der Aufwand an Rechenarbeit zunimmt.

Wir wenden uns nun jenen Beziehungen zu, die zwischen den beiden Hauptaufgaben in isothermen Koordinaten am Rotationsellipsoid und in der Bildebene bestehen, im engeren Sinne also den Beziehungen zwischen den Elementen der Geometrie auf den beiden Flächen.

Um die Zusammenhänge zu charakterisieren, wählen wir am Rotationsellipsoid irgendein Netz isothermer krummer Koordinatenlinien und legen durch Angabe der Parameterwerte  $x_1, y_1$  und  $x_2, y_2$  die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  der Fläche fest. Diese beiden Punkte denken wir uns durch eine geodätische Kurve  $\sigma$  verbunden, deren geodätischen Richtungswinkel wir in  $P_1$  wie früher mit  $\tau_{1,2}$  in  $P_2$  mit  $\tau_{2,1}$  bezeichnen. Indem wir die Gleichung (105) nunmehr als Abbildungsgleichung betrachten, ordnen wir damit den Punkten  $P_1$  und  $P_2$  des Rotationsellipsoids die Punkte  $\bar{P}_1(x_1, y_1)$  und  $\bar{P}_2(x_2, y_2)$  der Bildebene zu. Der Abstand dieser beiden Punkte, gemessen in der Verbindungsgeraden, werde mit  $\bar{s}$ , der Richtungswinkel der Geraden  $P_1P_2$  mit  $t_{1,2}$  bezeichnet.

Eine kurze Überlegung an Hand der Gleichung (88c) lehrt, daß die Gerade  $\bar{s}$  im allgemeinen nicht die Abbildung der geodätischen Kurve  $\sigma$  sein kann, da sich der geodätische Richtungswinkel der letzteren mit der Bogenlänge ändert. Zufolge der Winkeltreue muß jedoch der Richtungswinkel der geodätischen Kurve in allen ihren Punkten als Richtungswinkel ihrer Bildkurve in der Abbildung in gleicher Größe erscheinen, wobei in der Abbildung natürlich nur dann eine stetige Änderung desselben nach (88c) auftreten kann, wenn sich die geodätische Kurve als gekrümmte Linie zwischen den Punkten  $P_1P_2$  abbildet.

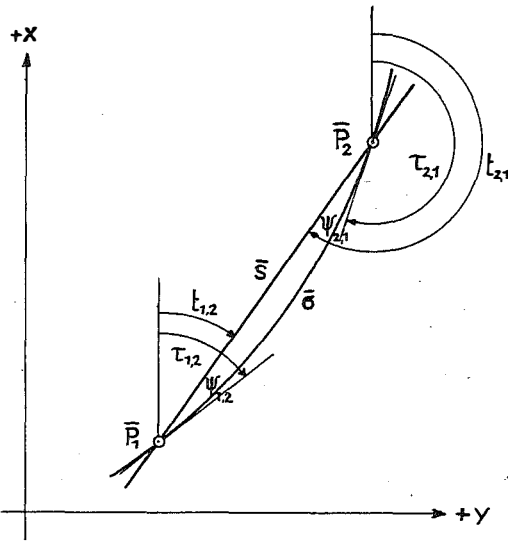


Abb.4

In die nebenstehende Abbildung 4 ist neben der geradlinigen Verbindung der Bildpunkte  $\bar{P}_1$  und  $\bar{P}_2$  noch die Bildkurve  $\bar{\sigma}$  der geodätischen Kurve eingetragen. Es sind dies die Bilder zweier Flächenkurven, nämlich der geodätischen Kurve und der Kurve konstanten geodätischen Richtungswinkels zwischen den beiden Punkten  $P_1, P_2$  des Rotationsellipsoids. Die Größen  $\psi_{2,2}$  und  $\psi_{2,1}$ , früher als die in  $P_1$  und  $P_2$  von diesen beiden Kurven eingeschlossenen Winkel erklärt, erscheinen zufolge der Winkeltreue in  $\bar{P}_1$  und  $\bar{P}_2$  wieder. Man

bezeichnet sie als die Richtungsreduktionen in diesen Punkten.

Es ist nun leicht ersichtlich, daß die geodätischen Hauptaufgaben nicht nur in der Bezugsfläche, sondern auch in der konformen Abbildung derselben gelöst werden können. Dazu ist nur notwendig, die erforderlichen Beziehungen zwischen den Elementen der geometrischen Operationen in beiden Flächen herzustellen.

Als einfachsten Fall wollen wir annehmen, daß die geodätische Übertragung auf dem Rotationsellipsoid durch eine Kurve konstanten geodätischen Richtungswinkels bewirkt wird (siehe (96a,b)). Für die Lösung derselben Aufgabe in der Bildebene hat man zufolge der Winkeltreue

$$\bar{t}_{1,2} = t_{1,2}$$

Der geodätische Richtungswinkel dieser Flächenkurve erscheint also unverändert in der Bildebene und ist der Richtungswinkel der Geraden  $\bar{P}_1\bar{P}_2$ . Es ist nur noch die Strecke  $\bar{s}$  in Funktion von  $s$  darzustellen. Für die Bildebene gilt mit

$$\bar{t}_{12} = t_{12}$$

$$\bar{s} = \frac{\Delta \bar{x}}{\cos t} = \frac{\Delta \bar{y}}{\sin t}$$

oder

$$\frac{1}{\bar{s} \cos t} = \frac{1}{\Delta \bar{x}}, \quad \frac{1}{\bar{s} \sin t} = \frac{1}{\Delta \bar{y}} \quad (107b)$$

Nun sind die Koordinatenunterschiede  $\Delta \bar{x}$ ,  $\Delta \bar{y}$  in der Bildebene zahlenmäßig identisch mit den Differenzen der Parameterwerte  $\Delta x = x_2 - x_1$ ,  $\Delta y = y_2 - y_1$  der Flächenpunkte  $P_1, P_2$ ;

wir multiplizieren also die Gleichung (97a) mit (107a) oder (97b) mit (107b) und erhalten

$$s = \bar{s} \left[ \frac{1}{m} - \frac{m_x}{2m^2} \Delta x - \frac{m_y}{2m^2} \Delta y \right. \\ \left. + \frac{1}{6m^3} (2m_x^2 - mm_{xx}) \Delta x^2 + \frac{1}{3m^3} (2m_x m_y - mm_{xy}) \Delta x \Delta y \right. \\ \left. + \frac{1}{6m^3} (2m_y^2 - mm_{yy}) \Delta y^2 + \dots \right], \quad (108a)$$

sowie die Umkehrung:

$$\bar{s} = s \left[ m + \frac{m_x}{2} \Delta x + \frac{m_y}{2} \Delta y \right. \\ \left. + \frac{1}{12m} (-m_x^2 + 2mm_{xx}) \Delta x^2 + \frac{1}{6m} (-m_x m_y + 2mm_{xy}) \Delta x \Delta y \right. \\ \left. + \frac{1}{12m} (-m_y^2 + 2mm_{yy}) \Delta y^2 + \dots \right]. \quad (108b)$$

Die beiden Hauptaufgaben können damit in der Bildebene mit Benützung der elementaren Formeln der ebenen Koordinatenrechnung gelöst werden.

Wenn wir, wie dies in der geodätischen Praxis immer üblich ist, der Lösung der Hauptaufgaben die geodätische Kurve zugrundelegen, so ist einerseits vom geodätischen Richtungswinkel derselben in  $\bar{P}_1$  oder  $\bar{P}_2$  auf den Richtungswinkel der Sehne der Bildkurve, andererseits von der Bogenlänge  $\sigma$  der geodätischen Kurve auf die Länge  $\bar{s}$  der Sehne, also der ebenen Strecke  $\bar{P}_1 \bar{P}_2$  überzugehen. Es ist demnach an den Elementen der ellipsoidischen Geometrie  $\tau$  und  $\sigma$  je eine "Richtungsreduktion" und eine "Streckenreduktion" anzubringen, um aus diesen die den Punkt  $\bar{P}_2$  von  $\bar{P}_1$  aus bestimmenden Elemente der ebenen Koordinatenrechnung, die Größen  $\bar{t}$  und  $\bar{s}$ , zu erhalten. Die notwendigen Richtungsreduktionen  $\psi_{1,2}$  und  $\psi_{2,1}$  haben wir im vorigen Abschnitt bereits flächentheoretisch als jene Winkel erklärt, die in  $P_1$  und  $P_2$  von der geodätischen Kurve und der Kurve konstanten geodätischen Richtungswinkels zwischen diesen Punkten eingeschlossen werden. Zufolge der Winkeltreue der Abbildung erscheinen diese in der Bildebene unverändert in  $\bar{P}_1$  und  $\bar{P}_2$  als Differenz der Richtungswinkel des Bildes der geodätischen Kurve und der geradlinigen Verbindung  $\bar{P}_1 \bar{P}_2$ .

Der Vollständigkeit halber schreiben wir die früher hiefür entwickelten Formeln nochmals an. Es ist

$$\psi_{1,2} = -\frac{m_y}{2m} \Delta x + \frac{m_x}{2m} \Delta y \\ + \left[ \frac{m_x m_y}{4m^2} + \frac{m_{xy}}{6m} \right] \Delta x^2 \\ + \left[ -\frac{m_x^2}{4m^2} + \frac{m_y^2}{4m^2} + \frac{m_{xx}}{6m} - \frac{m_{yy}}{6m} \right] \Delta x \Delta y \\ + \left[ -\frac{m_x m_y}{4m^2} + \frac{m_{xy}}{6m} \right] \Delta y^2 \dots$$

und

$$\begin{aligned} \psi_{21} &= \frac{m_y}{2m} \Delta x - \frac{m_x}{2m} \Delta y \\ &+ \left[ -\frac{m_x m_y}{4m^2} + \frac{m_{xy}}{3m} \right] \Delta x^2 \\ &+ \left[ \frac{m_x^2}{4m^2} - \frac{m_y^2}{4m^2} - \frac{m_{xx}}{3m} + \frac{m_{yy}}{3m} \right] \Delta x \Delta y \\ &+ \left[ \frac{m_x m_y}{4m^2} - \frac{m_{xy}}{3m} \right] \Delta y^2 + \dots \end{aligned}$$

wobei sich die Koeffizienten, d.h. der Abbildungsmaßstab und dessen partielle Ableitungen auf den Punkt  $P_1$  beziehen. Werden diese auf  $P_2$  bezogen, so sind bei den Richtungsreduktionen die Indices<sup>2</sup> zu vertauschen und die Koordinatenunterschiede im entgegengesetzten Sinne zu bilden.

Um aus der Bogenlänge der geodätischen Kurve die Länge der Sehne ihrer Bildkurve zu errechnen, schreiben wir das Verhältnis dieser beiden Längen in der Form

$$\frac{\bar{s}}{\sigma} = \frac{\bar{S}}{S} \cdot \frac{s}{\sigma} \quad \text{oder} \quad \frac{\sigma}{\bar{S}} = \frac{\sigma}{S} \cdot \frac{S}{\bar{s}}$$

an und entnehmen die rechter Hand stehenden Verhältnisse aus den Formeln (108) und (103). Es folgt

$$\begin{aligned} \bar{s} &= \sigma \left[ m + \frac{m_x}{2} \Delta x + \frac{m_y}{2} \Delta y + \left( \frac{m_x^2}{12m} - \frac{m_y^2}{24m} + \frac{m_{xx}}{6} \right) \Delta x^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( -\frac{m_x m_y}{4m} + \frac{m_{xy}}{3} \right) \Delta x \Delta y + \left( \frac{m_x^2}{24m} - \frac{m_y^2}{12m} + \frac{m_{yy}}{6} \right) \Delta y^2 + \dots \right] \end{aligned} \quad (109a)$$

und als Umkehrung

$$\begin{aligned} \sigma &= \bar{s} \left[ \frac{1}{m} - \frac{m_x}{2m^2} \Delta x - \frac{m_y}{2m^2} \Delta y + \left( \frac{m_x^2}{3m^3} - \frac{m_y^2}{24m^3} - \frac{m_{xx}}{6m^2} \right) \Delta x^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{3m_x m_y}{4m^3} - \frac{m_{xy}}{3m^2} \right) \Delta x \Delta y + \left( -\frac{m_x^2}{24m^3} - \frac{m_y^2}{3m^3} - \frac{m_{yy}}{6m^2} \right) \Delta y^2 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (109b)$$

Für die Bildung der Koeffizienten der Koordinatenunterschiede sowie ihrer Produkte und Potenzen in den vorstehenden Formeln gilt die gleiche Regel wie bei den Richtungsreduktionen; beide möglichen Ansätze müssen aber zum gleichen Ergebnis führen.

Es sei bemerkt, daß die Eigenschaften und Abbildungsbereiche der in der praktischen Geodäsie üblichen konformen Abbildungen stets so gewählt werden, daß bei den üblichen Bogenlängen geodätischer Kurven die in den obigen Formeln auf die Hauptglieder folgenden Terme so klein sind, daß auf eine Weiterentwicklung derselben über die hier eingehaltene Grenze hinaus verzichtet werden kann. Aus demselben Grunde genügt es, die Koordinatenunterschiede nur näherungsweise, etwa auf einige zehn Meter genau, in die Formeln einzuführen.

In weiterer Folge widmen wir einige Bemerkungen

der Berechnung geodätischer Dreiecke. Wir verstehen darunter einen von drei geodätischen Kurven begrenzten Teil der ellipsoidischen Oberfläche; die Winkelsumme in einem geodätischen Dreieck übersteigt, wie bekannt, den Betrag  $\pi$  um den sphäroidischen Exzess. Man berechnet das geodätische Dreieck mit Hilfe der Gaußschen Sätze über dessen Verebnung, d.h. man ordnet dem geodätischen Dreieck ein ebenes Dreieck zu, dessen Seiten den Bogenlängen der geodätischen Strecken entsprechen und verebnet die Winkel.

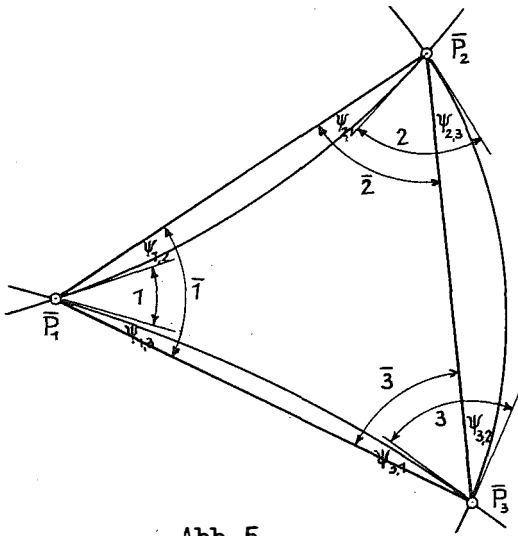


Abb. 5

In einer konformen Abbildung wird ein geodätisches Dreieck als ein von den drei Bildkurven der geodätischen Strecken begrenzter Teil der Bildebene abgebildet; geht man auf die Sehnen der Bildkurven über, so entsteht in der Bildebene ein Dreieck  $\bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{s}_3$  mit den Winkeln  $\bar{1} \bar{2} \bar{3}$ . Sind  $1, 2, 3$  die Winkel des ursprünglichen geodätischen Dreiecks, so gilt

$$\begin{aligned} 1 &= \tau_{1,3} - \tau_{1,2} , \\ 2 &= \tau_{2,1} - \tau_{2,3} , \\ 3 &= \tau_{3,2} - \tau_{3,1} . \end{aligned} \quad (110)$$

In der Bildebene ist

$$\bar{1} = \bar{\tau}_{1,3} - \bar{\tau}_{1,2} , \quad \bar{2} = \bar{\tau}_{2,1} - \bar{\tau}_{2,3} , \quad \bar{3} = \bar{\tau}_{3,2} - \bar{\tau}_{3,1} . \quad (111)$$

Zufolge der Beziehungen

$$\bar{\tau}_{1,2} = \tau_{1,2} + \psi_{1,2} , \quad \bar{\tau}_{1,3} = \tau_{1,3} + \psi_{1,3} , \quad \bar{\tau}_{2,3} = \tau_{2,3} + \psi_{2,3} , \text{ usw.} \quad (112)$$

finden wir leicht die Zusammenhänge zwischen den Winkeln im geodätischen Dreieck und den im Sehnendreieck der ebenen Abbildung. Indem wir die Gleichungen (112) in die drei Ausdrücke (111) eintragen und noch die erste Gruppe (110) heranziehen, erhalten wir nämlich

$$\begin{aligned} \bar{1} &= 1 + (\psi_{1,3} - \psi_{1,2}) \\ \bar{2} &= 2 + (\psi_{2,1} - \psi_{2,3}) \\ \bar{3} &= 3 + (\psi_{3,2} - \psi_{3,1}) \end{aligned} \quad (113)$$

Die Seiten  $\bar{s}_i$  werden mit (109a) aus den Bogenlängen der geodätischen Strecken  $\sigma$  abgeleitet, wodurch das ebene Dreieck in der Bildebene dem geodätischen Dreieck des Ellipsoids zugeordnet ist. Es gehen jedoch nur die drei Eckpunkte des so erhaltenen ebenen Dreiecks aus der Abbildung des geodätischen

Dreieckes hervor; die Seiten desselben sind im Allgemeinen nicht die Bilder der Seiten des geodätischen Dreiecks.

Würde man die Dreiecke am Ellipsoid durch Kurven konstanten geodätischen Richtungswinkels in isothermen Koordinaten begrenzen, so wäre jedes ebene Dreieck eine vollständige Abbildung eines Dreieckes der Fläche, wobei das letztere, wie leicht einzusehen ist, auf der krummen Oberfläche stets die Winkelsumme  $\pi$  haben muß. In diesem Falle würde man zur Berechnung des Dreieckes die ellipsoidischen Winkel direkt verwenden können, während man an den Seiten Verebnungen nach (109a) anbringen müßte. Diese Berechnung eines geodätischen Dreiecks kann als eine Variante der Gaußschen Verebnung bezeichnet werden, wobei aber die die Verebnung bewirkenden Größen vom gewählten Netz isothermer Koordinatenlinien abhängen. In der praktischen Anwendung der konformen Abbildungen wird diese Berechnung des geodätischen Dreieckes auf dem Umweg über die Richtungs- und Streckenreduktionen stets angewendet.

Es ist fast ausschließlich üblich, die grundlegenden geodätischen Operationen (Berechnung und Ausgleichung eines Dreiecksnetzes I. Ordnung) am Rotationsellipsoid in geographischen Koordinaten auszuführen. Daher tritt nach einer konformen Abbildung der Bezugsfläche auch die Notwendigkeit auf, für die einzelnen geodätischen Strecken den Zusammenhang zwischen den Azimuten und den im gewählten isothermen Netz bestehenden geodätischen Richtungswinkeln anzugeben.

Die zwischen diesen Größen bestehende Beziehung haben wir schon im Abschnitt 6 durch die Meridiankonvergenz erklärt und schreiben wir diese der Vollständigkeit halber nochmals an. Bezeichnen wir mit  $\alpha$  das Azimut einer geodätischen Strecke, mit  $\tau$  deren geodätischen Richtungswinkel im gewählten isothermen Netz und mit  $\gamma$  die Meridiankonvergenz, so gilt, da die Meridiankonvergenz zufolge der Winkel-treue der Abbildung unverändert als Winkel zwischen der Bildkurve des Meridians und der Koordinatenlinie  $y = \text{const.}$  durch den betrachteten Punkt erscheint, nach den Formeln (61):

$$\tau_{1,2} = \alpha_{1,2} - \gamma_1 \quad (114a)$$

$$\alpha_{1,2} = \tau_{1,2} + \gamma_1. \quad (114b)$$

Wollen wir auf die Sehne der Bildkurve übergehen, so ist noch die Richtungsreduktion beizufügen; es gilt also

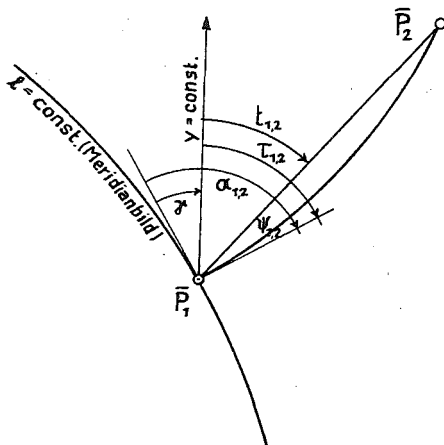


Abb. 6

$$t_{1,2} = \tau_{1,2} + \psi_{1,2} = \alpha_{1,2} - \gamma_1 + \psi_{1,2} \quad (115a)$$

$$\alpha_{1,2} = t_{1,2} + \gamma_1 - \psi_{1,2} \quad (115b)$$

Die Meridiankonvergenz ist ebenso wie der Abbildungsmaßstab eine Funktion des Ortes; zählt man sie gemäß ihrer Definition als Azimut der isothermen Koordinatenlinie  $y = \text{const.}$  im betrachteten Punkt und zwar als positives oder negatives Azimut, so bestimmt das Vorzeichen der isothermen Ordinate bei allen symmetrischen Abbildungen das Vorzeichen der Meridiankonvergenz.

Im Anschluß an die vorangegangenen Überlegungen soll noch die Frage aufgeworfen werden, welcher Änderung die geodätische Krümmung des Bogenelements einer Flächenkurve unterworfen wird, wenn die Fläche konform in eine andere Fläche abgebildet wird.

Dieses Problem kann allgemein gelöst werden; in unserem Falle interessiert jedoch in erster Linie eine Spezialisierung desselben in der Form, daß eine konforme Abbildung einer Fläche in die Ebene vorausgesetzt wird. Wir wollen sogar zunächst mit dieser Spezialisierung noch weiter gehen und anstelle einer beliebigen abzubildenden Flächenkurve eine geodätische Kurve der Fläche betrachten, womit die in der praktischen Geodäsie fast ausschließlich vorkommende Form der Problemstellung gegeben ist.

Wir hatten schon früher erwähnt und auch bewiesen, daß bei irgendeiner konformen Abbildung einer Fläche in die Ebene das Bild einer geodätischen Kurve der Fläche im Allgemeinen eine gekrümmte Linie sein muß. Allgemeiner formuliert lautet dieser Satz, daß durch eine konforme Abbildung einer Fläche in eine andere Fläche im Allgemeinen die geodätischen Kurven der ersten Fläche nicht in geodätische Kurven der zweiten Fläche abgebildet werden können.

Für unseren Spezialfall läßt sich dieser Satz sehr anschaulich beweisen. Wir denken uns wie immer die konforme Abbildung so bewirkt, daß die Werte irgendwelcher thermischer Parameter der abzubildenden Fläche als ebene cartesische Koordinaten gedeutet werden. Aus der abzubildenden Fläche nehmen wir ein sehr kleines Stück heraus; dieses Flächenstück möge ein Bogenelement der abzubildenden geodätischen Kurve enthalten. Die dieses Flächenstück überdeckenden Scharen von isothermen Koordinatenlinien können nicht zur Gänze aus geodätischen Kurven bestehen; es kann dies, wie sich leicht zeigen läßt, wohl für einzelne Linien, auch für eine ganze Schar (Meridiane im Mercatornetz), nicht aber für beide Scharen von Koordinatenlinien der Fall sein. Man erhält daher für den Verlauf der Koordinatenlinien innerhalb des betrachteten Flächenstückes etwa das in der nachstehenden

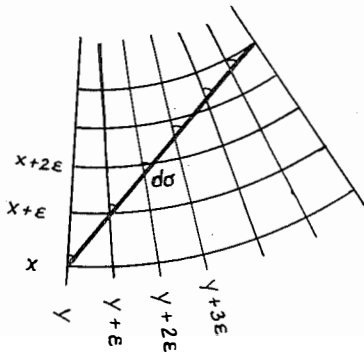


Abb. 7

des Bogenelements der geodätischen Kurve mit den Koordinatenlinien in der Abbildung die gleichen Winkel einschließen wie ursprünglich in der Fläche;

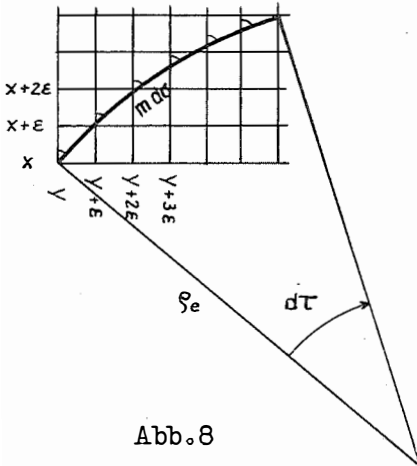


Abb. 8

Um die Krümmung eines Bogenelements der Bildkurve zu bestimmen, vereinbaren wir zunächst, daß einer Zunahme des geodätischen Richtungswinkels eine positive, einer Abnahme desselben hingegen eine negative Krümmung entsprechen möge. Wir bezeichnen den Radius der ebenen Krümmung mit  $\rho_e$ , die ebene Krümmung mit  $\kappa_e = \frac{1}{\rho_e}$  und lesen aus der Abbildung 8 ab

$$\rho_e d\tau = m d\sigma$$

oder

$$\kappa_e = \frac{1}{m} \frac{d\tau}{d\sigma} \quad (116)$$

Abbildung 7 gezeichnete Bild; das Bogenelement der geodätischen Kurve ist hingegen als Gerade einzutragen, da eine geodätische Krümmung für diese Flächenkrümmung nicht besteht. Bilden wir nun das Flächenstück konform in eine Ebene ab, d.h. identifizieren wir die Parameterwerte mit ebenen, cartesianischen Koordinaten, so gehen die Koordinatenlinien in zwei orthogonale Scharen von parallelen Geraden, in die cartesianischen Koordinatenlinien, über. Zufolge der Winkeltreue muß aber das Bild des Bogenelements der geodätischen Kurve mit den Koordinatenlinien in der Abbildung die gleichen Winkel einschließen wie ursprünglich in der Fläche; das ist aber nur dann möglich, wenn das entsprechende Bogenelement der Bildkurve eine bestimmte Krümmung aufweist.

Wir können übrigens aus den beiden Abbildungen 7 und 8 eine für die praktische Anwendung der konformen Abbildungen recht brauchbare Faustregel ablesen: Die Bildkurve einer geodätischen Kurve kehrt ihre erhabene Seite stets nach jener Richtung, in der der Abbildungsmaßstab positiv zunimmt.



Indem wir noch die Gleichung (87) heranziehen, finden wir für die Krümmung des Bogenelements der ebenen Bildkurve den Ausdruck

$$\kappa_e = \frac{1}{m} (-m_y \cos \tau + m_x \sin \tau) . \quad (117)$$

Um die Bedeutung des Klammerausdruckes in der vorstehenden Formel zu zeigen, führen wir mit dem Ursprung im betrachteten Punkt ein örtliches Koordinatensystem  $\xi, \eta$ , ein, dessen positive  $\xi$ -Achse wir so orientieren, daß sie den Richtungswinkel  $\tau$  des Bogenelements im betrachteten Punkt erhält. Zählen wir für den Augenblick die ursprünglichen cartesischen Koordinaten auch von diesem Punkt aus, so gilt

$$x = \xi \cos \tau - \eta \sin \tau , \quad y = \eta \cos \tau + \xi \sin \tau \quad (118)$$

Die Richtung der Kurvennormalen der Bildkurve - im betrachteten Punkt ist die  $\xi$ -Achse deren Tangente - fällt durch diese Annahme mit der positiven Richtung der  $\eta$ -Achse zusammen. Wir bilden nun die Ableitung des Abbildungsmaßstabes in Richtung der Kurvennormalen, wozu wir anschreiben

$$\frac{dm}{dn} = \frac{dm}{d\eta} = \frac{\partial m}{\partial x} \frac{dx}{d\eta} + \frac{\partial m}{\partial y} \frac{dy}{d\eta} \quad (119)$$

Aus (118) entnehmen wir

$$\frac{dx}{d\eta} = -\sin \tau \quad \frac{dy}{d\eta} = \cos \tau .$$

Tragen wir diese beiden Differentialquotienten in (119) ein, so ergibt sich

$$\frac{dm}{dn} = -\frac{\partial m}{\partial x} \sin \tau + \frac{\partial m}{\partial y} \cos \tau$$

oder, indem wir rechter Hand die partiellen Ableitungen durch einen Index anzeigen

$$\frac{dm}{dn} = -m_x \sin \tau + m_y \cos \tau . \quad (120)$$

Wir erkennen, daß die rechte Seite dieser Differentialgleichung gleich dem negativ genommenen Klammerausdruck in dem für die Krümmung des Bogenelements der Bildkurve angeschriebenen Ausdruck (117) darstellt, weshalb wir diesen auch in der Form

$$\kappa_e = -\frac{1}{m} \frac{dm}{dn}$$

oder

$$\kappa_e = -\frac{d \ln m}{dn} \quad (121)$$

anschreiben können. Diese letztere Form des Ausdruckes für die Krümmung ist der Satz von Schols<sup>13</sup>.

Der Übergang auf eine beliebige Flächenkurve ist nunmehr leicht zu bewerkstelligen. Es habe das Bogenelement  $\sigma$  irgendeiner Flächenkurve in einem bestimmten Punkt die geodätische Krümmung  $\kappa_2 = \frac{1}{\rho_2}$ . Würde man Anfang und Ende dieses

Bogenelements durch das Bogenelement einer geodätischen Kurve verbinden, so würde sich beim Durchlaufen desselben der geodätische Richtungswinkel um den Betrag  $d\tau$  ändern; durchläuft man jedoch das Bogenelement selbst, so wird durch die bestehende geodätische Krümmung eine zusätzliche Richtungsänderung um den Betrag

$$d\tau' = \frac{d\sigma}{\rho_g} \quad (122)$$

hervorgerufen. Die Gesamtänderung des geodätischen Richtungswinkels beim Durchlaufen des Bogenelements ist sonach aus

$$d\theta = d\tau + \frac{d\sigma}{\rho_g} \quad (123)$$

gegeben.

In der ebenen Abbildung bleibt diese Gesamtänderung zufolge der Winkeltreue natürlich erhalten; nur findet sie entlang des durch den Abbildungsmaßstab gegenüber dem Urbild veränderten Bogenelements der Bildkurve statt. Es gilt daher

$$\rho_e d\theta = m d\sigma$$

und

$$\kappa_e = \frac{1}{\rho_e} = \frac{1}{m} \frac{d\theta}{d\sigma} \quad (124)$$

Mit (123) folgt daraus

$$\kappa_e = \frac{1}{m} \left( \frac{d\tau}{d\sigma} + \frac{1}{\rho_g} \right)$$

und, nach Eintragung von (121), der endgültige Ausdruck für die ebene Krümmung

$$\kappa_e = \frac{1}{\rho_e} = - \frac{d \ln m}{dn} + \frac{1}{m \rho_g} \quad (125)$$

womit die gestellte Aufgabe gelöst ist<sup>14</sup>. Die Formeln (121) und (125) können benützt werden, um auf einem anderen Wege als wir ihn im vorliegenden Abschnitt gegangen sind, die Zusammenhänge zwischen den Elementen der ellipsoidischen und der ebenen Geometrie in isothermen Koordinaten (Richtungs- und Entfernungsreduktion) zu ermitteln.

Aus dem Ausdruck (125) können wir übrigens für irgendein isothermes Netz die geodätische Krümmung der Koordinatenlinien berechnen. Da sich diese in zwei orthogonalen Geradenscharen abbilden, muß die ebene Krümmung ihrer Bildkurven überall verschwinden. Es gilt daher

$$\frac{1}{m \rho_g} = \frac{d \ln m}{dn}$$

Für eine Koordinatenlinie  $x = \text{const.}$  ist in jedem ihrer Punkte die Richtung der Normalen identisch mit der  $x$ -Richtung; ebenso ist die Richtung der Normalen für die Linien  $y = \text{const.}$  in jedem ihrer Punkte identisch mit der  $y$ -Richtung. Die geodätische Krümmung der Koordinatenlinien

$x = \text{const.}$  folgt daher aus

$$\frac{1}{\rho_{gx}} = \mathcal{L}_{gx} = m \frac{\partial \ln m}{\partial x} = m_x \quad (126a)$$

und jene der Linien  $y = \text{const.}$  aus

$$\frac{1}{\rho_{gy}} = \mathcal{L}_{gy} = m \frac{\partial \ln m}{\partial y} = m_y . \quad (126b)$$

Für das Mercatornetz ergibt sich beispielsweise

(es ist  $m = \frac{1}{N \cos \varphi}$ ,  $x = q$ ,  $y = \ell$ )

$$\frac{1}{\rho_{gx}} = \frac{1}{N \cos \varphi} \left[ \frac{d}{d\varphi} \left( \ln \frac{1}{N \cos \varphi} \right) \right] \frac{d\varphi}{dq} = \frac{1}{N \cotg \varphi}$$

$$\frac{1}{\rho_{gy}} = 0 .$$

Dieses Ergebnis lehrt auch die Anschauung: Stülpt man dem Rotationsellipsoid einen Rotationskegel so über, daß er dieses längs eines Parallelkreises berührt, so ergibt diese Berührungslinie nach der Abwicklung des Kegels in die Ebene einen Kreis mit dem Radius  $r = N \cotg \varphi$ . Ein schmaler Sektor des Kegelmantels kann aber als Teil einer Tangentenebene in einem Punkt des Parallelkreises - auf die bekanntlich die geodätische Krümmung bezogen wird - betrachtet werden. Es ist also die ebene Krümmung der Berührungslinie im aufgerollten Kegelmantel gleich der geodätischen Krümmung des Berührungsparallels. Die Linien  $y = \text{const.}$  hingegen können keine geodätische Krümmung aufweisen, da sie gemäß der Definition des Mercatornetzes Meridiane und damit geodätische Kurven des Rotationsellipsoids sind.

## 9. Literaturverzeichnis.

- 1 Über die theoretischen Grundlagen der Isothermennetze siehe z.B.  
Scheffers, Anwendung, I.Band, Seite 170 und II.Band, Seite 68, weiter:  
Baeschlin, Lehrbuch, § 47, Seite 234-242  
Baeschlin, Kurven- und Flächentheorie, Seite 86.  
Die notwendige und hinreichende Bedingung, unter der ein orthogonales Netz bei Beibehaltung derselben Parameterkurven in ein isothermes Netz übergeführt werden kann, formuliert auch Hristow in DZV, 1950, S.88.
- 2 Jordan-Eggert, Handbuch, III/1, S.247  
Baeschlin, Lehrbuch, S.33.
- 3 Jordan-Eggert, Handbuch, III/1, S.246, 248.
- 4 Jordan-Eggert, Handbuch, III/2, S.142, 143.
- 5 Wittke, Reihenentwicklungen für die isometrische Breite, DZV, 1943, S.139. Dieser Arbeit sind ausführliche Literaturhinweise angefügt; siehe u.a. auch  
Grabowski, Tafeln zur Berechnung der isometrischen Breite...., worin sich auf Seite 35-44 Tafeln für den Ausdruck  $\ln \left( \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}}$  für die Breiten  $40-60^\circ$  (Besselsches Ellipsoid) finden, DZV, 1929, S.1-9, 33-44.
- 6 Hristow, Potenzreihen zwischen dem geographischen und dem isometrischen Breitenunterschied, DZV, 1935, S.649-650, auch  
Jordan-Eggert, Handbuch, III/2, S.144-145 u.a.
- 7 Hristow, Potenzreihen zwischen den stereographischen und den geographischen Koordinaten und umgekehrt, DZV, 1937, S.84-89, Formeln (1) - (13).  
Hubeny, Die konforme Kegelprojektion mit zwei längentreu abgebildeten Parallelkreisen, ÖZV, 1949, S.126-140, Formeln (1) - (14).  
Hristow, Potenzreihen zwischen den konformen ebenen Koordinaten und den geographischen Koordinaten und umgekehrt, angesetzt für einen beliebigen Anfangspunkt, DZV, 1936, S.529-536.

- 8 Hristow, Reihenentwicklungen für die ebene Meridiankonvergenz der Gauß-Krügerschen Projektion, DZV, 1938, S.609-619, siehe Formeln (5) - (48) daselbst.  
Hristow, Gauß-Krügersche Koordinaten, § 6, S.15.
- 9 Hopfner, Grundlagen, Art.24, S.52-56, Formel (23) daselbst oder  
Baeschlin, Lehrbuch, S.21, Formel (64) daselbst u.a.
- 10 Hristow, Berechnung der Koordinatendifferenzen und der Ordinatenkonvergenz aus der Länge und dem Richtungswinkel einer geodätischen Strecke für eine beliebige Fläche und ein beliebiges isothermes Koordinatensystem, DZV, 1937, S.171-178.  
Hristow, Geodätische Übertragung von Gauß-Krügerschen Koordinaten, DZV, 1940, S.529-539.  
Hubeny, Ein Beitrag zur Lösung der zweiten Hauptaufgabe der geodätischen Übertragung, ÖZV, Festschrift Dolezal 1952.
- 11 Hristow, Allgemeine Formeln für die Richtungs- und Entfernungsreduktion für eine beliebige Fläche und eine beliebige konforme Abbildung, DZV, 1938, S.457-466.  
In dieser Abhandlung werden die Reduktionen gleichfalls allgemein, jedoch auf einem anderen Wege hergeleitet; siehe auch  
Baeschlin, Lehrbuch, § 46, S.257-261.
- 12 Hristow, Weitere allgemeine Formeln für die Richtungs- und Entfernungsreduktion, DZV, 1940, S.81-88.  
(Formeln mit einem mittleren Koeffizientenargument).
- 13 Jordan-Eggert, Handbuch, III/2, § 51, S.241-243 mit Literaturhinweisen, auch  
Baeschlin, Lehrbuch, § 46, S.257-261.
- 14 Baeschlin, Lehrbuch, § 41, S.231-234, auch  
Frank, Beiträge zur winkeltreuen Abbildung des Erdellipsoids, DZV, 1940, S.97-112, 145-160, 193-204, Abschnitt II, 4 daselbst.

Im vorstehenden Literaturnachweis werden in der Bezeichnung der zitierten Werke folgende Abkürzungen verwendet:

- DZV für: Zeitschrift für Vermessungswesen,  
Stuttgart, Verlag K. Wittwer.
- ÖZV für: Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen,  
Herausgeber und Verleger: Österreichischer Verein  
für Vermessungswesen, Wien.
- Scheffers, Anwendung, für:  
Anwendung der Differential- und Integralrechnung  
auf Geometrie von G. Scheffers, Verlag Walter  
de Gruyter & Co., Wien und Leipzig 1922.
- Hristow, Gauß-Krügersche Koordinaten, für:  
Die Gauß-Krügerschen Koordinaten auf dem Ellip-  
soid, von Wl.K.Hristow, Verlag B.G. Teubner,  
Leipzig und Berlin 1943.
- Hopfner, Grundlagen, für:  
Grundlagen der Höheren Geodäsie von F. Hopfner,  
Springer-Verlag, Wien 1949.
- Jordan-Eggert, Handbuch, für:  
Handbuch der Vermessungskunde von W. Jordan, fort-  
gesetzt von C. Reinhertz, bearbeitet von O. Eggert,  
Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart.  
III. Band, 1. Halbband 1939  
III. Band, 2. Halbband 1941.
- Baeschlin, Kurven- und Flächentheorie, für:  
Einführung in die Kurven- und Flächentheorie auf  
vektorieller Grundlage, von C.F. Baeschlin, bear-  
beitet von W. Höhn, Orell Füssli Verlag, Zürich 1947.
- Baeschlin, Lehrbuch, für:  
Lehrbuch der Geodäsie von C.F. Baeschlin,  
Orell Füssli Verlag, Zürich 1948.



## II. Die wichtigsten konformen Abbildungen des Rotationsellipsoids.

### 1. Allgemeines.

Wir haben im vorangegangenen Teil I. erklärt, daß eine konforme Abbildung einer Fläche in eine andere Fläche dann entsteht, wenn einem thermischen Parameterpaar  $x, y$  einer Fläche ein gleichfalls thermisches Parameterpaar  $\bar{x}, \bar{y}$  einer anderen Fläche durch die einfache Beziehung

$$\bar{x} + i\bar{y} = x + iy$$

zugeordnet wird. Um nun alle konformen Abbildungen der einen Fläche in die andere zu finden, sind zwei Wege möglich, nämlich: Man bestimme aus der Gesamtheit aller analytischen Funktionen

$$f(x + iy)$$

alle thermischen Parameter der Fläche  $S$  und ordne diesen jeweils das thermische Parameterpaar  $\bar{x}, \bar{y}$  der Fläche  $\bar{S}$  zu. Oder: Man denke sich die Fläche  $S$  durch

$$\bar{x} + i\bar{y} = x + iy$$

in  $\bar{S}$  konform abgebildet. In  $\bar{S}$  suche man nun aus

$$\bar{X} + i\bar{Y} = f(\bar{x} + i\bar{y})$$

alle Paare thermischer Parameter  $\bar{X}, \bar{Y}$  und damit alle konformen Abbildungen von  $\bar{S}$  in sich selbst. Diese beiden gedanklich verschiedenen Wege müssen, wie leicht ersichtlich, zum gleichen Ergebnis, nämlich zur Auffindung aller konformen Abbildungen von  $S$  in  $\bar{S}$  führen.

Es ist nur eine Frage der Zweckmäßigkeit, welchen der beiden Wege man bei der Entwicklung einer konformen Abbildung wirklich geht. In unserer Spezialisierung der gestellten Aufgabe, der konformen Abbildung des Rotationsellipsoids in die Ebene, wollen wir in der Regel den ersten der beiden möglichen Wege beschreiten. Wir setzen für das Rotationsellipsoid und für die Bildebene je ein System thermischer Parameter als ein- für allemal vorgegeben voraus: Die thermischen oder auch isometrischen Parameter  $q, l$  des Rotationsellipsoids und die cartesischen Koordinaten  $x, y$  der Ebene. Indem wir für den Augenblick mit  $x, y$  alle thermischen Parameter des Rotationsellipsoids bezeichnen, finden wir diese aus

$$x + iy = f(q + il).$$



Identifizieren wir die so erhaltenen thermischen Parameter mit den ebenen cartesischen Koordinaten, so ergeben sich aus der obigen Funktion alle konformen Abbildungen des Ellipsoids in die Ebene.

Der Entwicklung einer konformen Abbildung des Ellipsoids in die Ebene liegen immer irgendwelche Forderungen zugrunde, die man an die betreffende Abbildung stellt. Man kann beispielsweise verlangen, daß das aus den Meridian- und Parallelkreisbildern in der Bildebene gebildete Kurvennetz gewisse Eigenschaften, d.h. eine bestimmte, einfach als "Netzbild" bezeichnete Anordnung dieser Kurven aufweist. Oder: Man kann die Forderung stellen, daß der ebene Richtungswinkel gleich dem Azimut sei, daß ein Gebiet von vorgegebener Erstreckung so abgebildet werde, daß innerhalb desselben die anzubringenden Reduktionen (Richtungs- und Streckenreduktionen) möglichst gering seien u.s.w. In jedem einzelnen Falle ist das der Abbildung zugrundeliegende thermische Parameterpaar des Rotationsellipsoids so zu wählen, daß diese Forderungen entweder völlig oder so weit als möglich erfüllt sind.

Nach dieser Einleitung, in der wir einiges aus dem I. Teil im Interesse der abgerundeten Darstellung wiederholt haben, wenden wir uns nun den in der Praxis gebräuchlichsten konformen Abbildungen des Rotationsellipsoids in die Ebene zu.

## 2. Die konforme Abbildung des Rotationsellipsoids nach Mercator.

Die konforme Abbildung des Rotationsellipsoids nach Mercator, einfach als Mercatorprojektion desselben bezeichnet, hat ihren Ursprung in einer von Gerhard Kremer (latinisiert: Mercator) im Jahre 1569 veröffentlichten Weltkarte. Wir definieren sie durch die Forderung: Die Meridiane und Parallelkreise des Rotationsellipsoids sollen als Grade parallel den Koordinatenlinien eines ebenen cartesischen Netzes abgebildet werden, oder, was dasselbe besagt, die geodätischen Richtungswinkel im isothermen Mercatornetz am Ellipsoid oder zufolge der Winkeltreue auch im zugeordneten ebenen cartesischen Koordinatensystem sollen gleich den ellipsoidischen Azimuten sein.

Hieraus lassen sich die notwendigen Schlüsse auf das der Mercatorabbildung zugrundeliegende isotherme Netz am Rotationsellipsoid ableiten: Die Parameterkurven  $x = \text{const.}$ ,  $y = \text{const.}$  desselben müssen durch die Parallelkreise und Meridiane des Ellipsoids gebildet werden.

Wir haben in I., 4. gezeigt, wie das aus den

Parallelkreisen und Meridianen gebildete orthogonale Netz krummer Koordinatenlinien durch Einführung der isometrischen Breite in ein isothermes Netz übergeführt werden kann; dieses letztere zeigt nun gerade jene Eigenschaften, die das der konformen Abbildung des Ellipsoids nach Mercator zugrundeliegende isotherme Netz erfüllen soll - seine Parameterkurven sind nämlich Parallelkreise und Meridiane. Wir erhalten demnach durch die Identifizierung der isometrischen Parameter  $q$  und  $\ell = \lambda$  mit den ebenen cartesischen Koordinaten  $x$  und  $y$  die konforme Abbildung des Ellipsoids nach Mercator; die einfachste Form der Abbildungsgleichung lautet daher

$$x + iy = q + i\ell \quad (1)$$

oder

$$x = q, \quad y = \ell. \quad (1a, b)$$

Hierin bedeutet  $\ell$  wie üblich den im Bogenmaß ausgedrückten Längenunterschied zu einem beliebig gewählten Grundmeridian  $\lambda_m$ ; die  $x$ -Achse des ebenen cartesischen Koordinatensystems ist das Bild dieses Grundmeridians, die  $y$ -Achse hingegen das Bild des Äquators. Aus (1b) erkennt man leicht, daß für die gleich der Einheit angenommene große Halbachse der Meridianellipse der Äquator längentreu abgebildet werden muß, da die Ordinate  $y$  gerade dem Bogen des Längenunterschiedes am Einheitskreis entspricht.

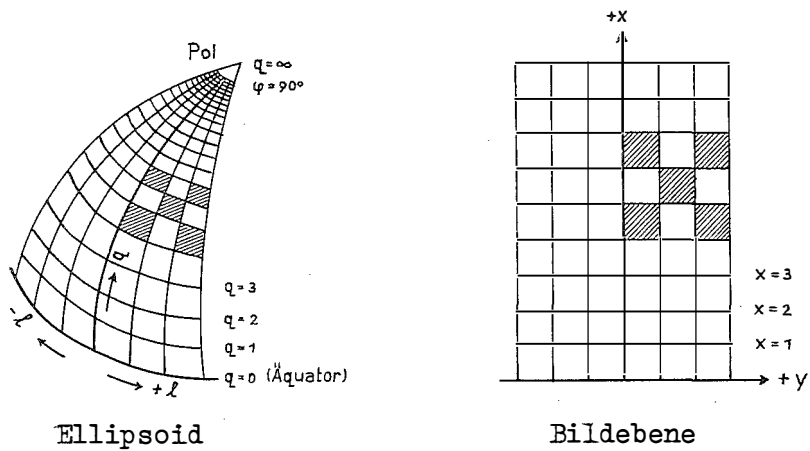


Abb. 1.

Für die praktische Anwendung der Mercatorabbildung pflegt man die Abbildungsgleichungen (1) meist in der Form

$$x + iy = k, (q + i\ell) \quad (2)$$

oder

$$x = k_1 q \quad y = k_1 l \quad (2a,b)$$

anzugeben, wobei der als reell zu denkende Faktor  $k_1$  eine Maßstabsbedingung ausdrückt. Die Beifügung einer komplexen Konstanten  $\pm k_2 = \pm (q_0 + i l_0)$  bedeutet lediglich eine Verschiebung des Bezugspunktes für die Zählung der thermischen Parameter vom Punkt  $q = 0, l = 0$  in den Punkt  $\mp (q_0, l_0)$ ; damit erhält man die allgemeinste Form der Abbildungsgleichung

$$x + iy = k_1 (q + il) \pm k_2 \quad (3)$$

oder

$$x = k_1 q \pm q_0, \quad y = k_1 l \pm l_0. \quad (3a,b)$$

Der reelle Faktor  $k_1$  ergibt sich aus der Forderung, die man hinsichtlich des Maßstabes stellt, in dem eine Parameterkurve  $q = \text{const.}$ , also ein Parallelkreis, abgebildet werden soll. Soll der Äquator längentreu abgebildet werden, so muß die Bezifferung der isothermen Ordinate mit der Bogenlänge des Äquators übereinstimmen, es ist also  $k_1$  gleich dem Äquatordurchmesser  $a$  zu setzen, womit sich

$$x + iy = a (q + il) \quad (4)$$

oder

$$x = a q \quad y = a l \quad (4a,b)$$

ergibt.

Soll hingegen die gleiche Forderung für ein Parallelkreispaar in den Breiten  $\pm \varphi_0$  erfüllt sein, so muß sinngemäß die Bezifferung der isothermen Ordinate mit der Länge dieses Parallelkreisbogens übereinstimmen; daher ist

$$x + iy = N_0 \cos \varphi_0 (q + il) \quad (5)$$

oder

$$x = N_0 \cos \varphi_0 q, \quad y = N_0 \cos \varphi_0 l. \quad (5a,b)$$

Der komplexen Konstanten  $k_2$  kommt in theoretischer Hinsicht keinerlei Bedeutung zu; sie wird eingeführt, wenn die Beträge von  $x$  und  $y$  in kleinen Grenzen gehalten werden sollen. Wir lassen sie in Einkunft weg und gehen stets von (2) aus.

Die Dichte der Koordinatenlinien im isothermen Mercatornetz ist nach I., (27) aus

$$m = \frac{1}{N \cos \varphi}$$

gegeben. Mit der Hinzufügung des Maßstabsfaktors  $k_1$  (dieser bedeutet am Ellipsoid eine ihm proportionale, für das ganze Netz konstante Verdichtung der Netzlinien) erhalten wir

$$m = \frac{K_1}{N \cos \varphi} \quad (6)$$

Dieser Ausdruck ist, wie bekannt, gleichzeitig der Abbildungsmaßstab der ebenen Abbildung.

Damit ist die konforme Abbildung des Ellipsoids nach Mercator vollkommen erklärt. Die gesamte Oberfläche des Ellipsoids bildet sich in einen Streifen der  $xy$ -Ebene ab, dessen Breite in der  $y$ -Richtung gleich  $2k_1\pi$  ist. Da für  $\varphi = \pm 90^\circ$  die isometrische Breite  $q = \pm \infty$  ist, erstreckt sich dieser Streifen in der  $x$ -Richtung von  $-\infty$  bis  $+\infty$ . Die singulären Punkte  $\varphi = \pm 90^\circ$  des Ellipsoids, die Pole, werden als Gerade parallel zur  $y$ -Achse im Abstand  $\pm \infty$  von dieser abgebildet. Der Abbildungsmaßstab nimmt mit  $\pm x$ , also auch mit  $\pm q$  zu und erreicht mit diesen Größen den Wert Unendlich.

Wir untersuchen nun, in welchem Gebiet des Rotationellipsoids das isotherme Mercatornetz hinsichtlich der Änderung der Dichte seiner Koordinatenlinien die größte Ähnlichkeit mit einem ebenen cartesischen Koordinatennetz aufweist. Es ist dieses Gebiet, wie wir wissen, gerade jener Bereich, für dessen konforme Abbildung sich das betrachtete Isothermennetz am besten eignet. Als Kriterium bilden wir die partiellen Ableitungen der Funktion  $m$  in Richtung der Koordinatenlinien. Es ist

$$m_x = \frac{\partial m}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dq} \frac{dq}{dx} = \frac{t}{N} \quad (7a)$$

$$m_y = \frac{\partial m}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dx} = 0 \quad (7b)$$

Wir erkennen, daß die Forderung  $m_x \rightarrow 0$  unabhängig von der gewählten Konstanten  $k_1$  nur in der Umgebung des Äquators - in diesem ist  $m_x = 0$  - erfüllt ist, während die partielle Ableitung nach  $y$  im ganzen Bereich verschwindet. Der geodätische Anwendungsbereich der Mercatorabbildung beschränkt sich daher auf Gebiete in der Nähe des Äquators; ihre Erstreckung in der Richtung desselben kann beliebig sein. Auch eine Änderung der Konstanten  $k_1$  etwa zur längentreuen Abbildung eines beliebigen Parallelkreises vermag an dieser Beschränkung nichts zu ändern. In größeren Abständen vom Äquator erreichen die Richtungs- und Streckenreduktionen schon für kurze geodätische Strecken relativ große Beträge, wodurch die Anwendung der Mercatorabbildung für geodätische Zwecke praktisch unmöglich wird.

Im isothermen Mercatornetz am Ellipsoid und natürlich auch in der Mercatorabbildung ist der geodätische Richtungswinkel eines Bogenelements gleich dem Azimut desselben. Dies hat zur Folge, daß die Kurve konstanten Azimuts - die Kursgleiche oder Loxodrome - sich mit der Kurve konstanten

geodätischen Richtungswinkels identifiziert und als Gerade abgebildet wird. Für eine bestimmte Strecke läßt sich demnach der längs dieser zu steuernde konstante Kurs - der Kurs ist das Azimut der gesteuerten Richtung - als Richtungswinkel der entsprechenden Geraden aus der Mercatorkarte direkt entnehmen. Man verwendet daher die Abbildung nach Mercator fast ausschließlich bei allen Seekartenwerken.

Die Loxodrome ist jedoch keine Kürzeste zwischen zwei Punkten des Ellipsoids; für Fahrten über sehr lange Strecken wählt man daher nicht diese, sondern die Orthodrome (die geodätische Kurve) als Kurslinie. Deren Bild ist jedoch keine Gerade, wodurch in diesem Fall die Mercatorkarte an Bedeutung verliert.

Die Abbildungsgleichungen geben wir nicht gesondert an; wir verweisen auf die Formeln (2)-(5), in denen wir die isometrische Breite nach I., (30,31) oder I., (37,38) berechnen.

Für einzelne Fälle - Eintragung von Messungsergebnissen in Mercatorkarten (Seekarten) - können die Richtungs- und Streckenreduktionen nach den allgemeinen Formeln I., (102) und I., (109) ermittelt werden, wofür wir noch die einzelnen partiellen Ableitungen des Abbildungsmaßstabes zusammenstellen. Es ist

$$m_x = \frac{t}{N} \quad , \quad m_y = 0 \quad ,$$

$$m_{xx} = \frac{\cos \varphi t}{N} (1 + t^2 + \eta^2) \frac{1}{K_1} \quad , \quad m_{xy} = 0 \quad , \quad m_{yy} = 0 \quad .$$

Die in den vorstehenden Ausdrücken vorkommenden Bezeichnungen haben wir in I., S.9 erklärt. Wir werden von diesen in weiterer Folge stets Gebrauch machen.

### 3. Die konforme Kegelprojektion.

Die konforme Kegelprojektion, auch als normale oder Lambertsche konforme Kegelprojektion bezeichnet, wird ebenso wie die Mercatorprojektion durch eine bestimmte Anordnung der Bildkurven der Parallelkreise und Meridiane des Ellipsoids in der Bildebene erklärt, nämlich: Das Ellipsoid wird konform in einen Kreissektor der Bildebene so abgebildet, daß die Bilder der Parallelkreise und Meridiane konzentrische Kreise und deren Radien ergeben. Parallelkreis- und Meridianbilder sind also Parameterkurven eines Systems von Polarkoordinaten in der Bildebene.

Um die dieser Abbildung zugrundeliegenden thermischen Parameter des Ellipsoids und damit die Abbildungsgleichungen zu finden, gehen wir zunächst auf das erwähnte Polar-

koordinatensystem etwas näher ein. Bezeichnen wir in diesem mit  $\bar{r}$  und  $\bar{l}$  die Parameter, so ergibt sich das Bogenelement einer ebenen Kurve aus

$$d\bar{s}^2 = d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\bar{l}^2 \quad (8)$$

Die Scharen der Parameterkurven bilden demnach ein orthogonales, nicht aber isothermes Netz. Indem wir die Gleichung (8) in die Form

$$d\bar{s}^2 = \bar{r}^2 \left( \frac{d\bar{r}^2}{\bar{r}^2} + d\bar{l}^2 \right) \quad (9)$$

umschreiben erkennen wir, daß durch

$$\frac{d\bar{r}}{\bar{r}} = -d\bar{q} \quad (10a) \quad d\bar{l} = d\bar{l}_{\text{isotherm}} \quad (10b)$$

thermische Parameter eingeführt werden können, wobei die Bezifferung des thermischen Parameters  $\bar{q}$  jener des Parameters  $\bar{r}$  entgegenlaufend angenommen ist.

Die Integration von (10) ergibt mit einer Integrationskonstanten  $\bar{c}$

$$-\bar{q} = \ln \bar{r} + \bar{c} \quad (11a)$$

oder

$$\bar{r} = c e^{-\bar{q}} \quad (11b)$$

wozu noch bei Beibehaltung der Ausgangsrichtung

$$\bar{l} = \bar{l}_{is} \quad (11c)$$

kommt. In  $\bar{q}$  und  $\bar{l}$  hat man somit ein Paar thermischer Parameter der Bildebene, die in dieser ein isothermes Netz von Parameterkurven erzeugen. Dieses unterscheidet sich von dem Netz der Koordinatenlinien eines Polarsystems nur durch die Bezifferung des Radius (Abb.2); mit der Integrationskonstanten  $c$  verfügt man offensichtlich über die Dichte der Koordinatenlinien im gesamten Bereich oder über die Bogenlängen der Parameterkurven.

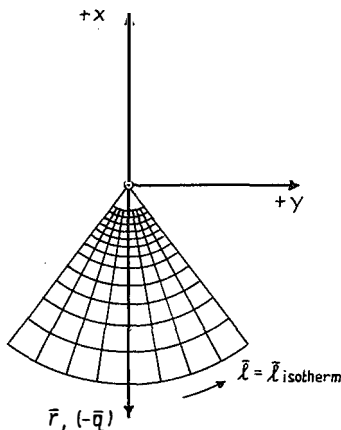


Abb.2.

Nach diesen Ausführungen ist es leicht, die Abbildungsgleichungen für die Lambertsche Kegelprojektion anzugeben. Wir wählen am Ellipsoid einen Grundmeridian  $\lambda_0$ ; dessen Bild möge die Gerade  $\bar{l} = 0$  sein. Nunmehr identifizieren wir durch

$$\bar{q} + i\bar{l} = k(q + il) \quad (12)$$

die thermischen Parameter  $\bar{q}$ ,  $\bar{l}$  der Bildebene mit den thermischen Parametern  $q$ ,  $l$  des Ellipsoids und bilden damit die Parallelkreise in die Kreise  $\bar{q} = \text{const.}$ , die Meridiane

in die Geraden  $\bar{l} = \text{const.}$  ab. Da die gesamte Oberfläche des Ellipsoids in einen Kreissektor der Bildebene abgebildet werden soll, muß der Absolutbetrag der als reell vorausgesetzten Zahl  $k$  notwendigerweise kleiner als eins sein.

Wir gehen nunmehr in der Bildebene auf cartesische Koordinaten über; nimmt man deren System nach Abb.2 an, so gilt

$$\begin{aligned}x &= -\bar{r} \cos \bar{l} = -c e^{-\bar{q}} \cos \bar{l} \\y &= \bar{r} \sin \bar{l} = c e^{-\bar{q}} \sin \bar{l}\end{aligned}$$

Wir bilden

$$x + iy = -c e^{-\bar{q}} (\cos \bar{l} - i \sin \bar{l}) = -c e^{-(\bar{q} + i\bar{l})} \quad (13)$$

Unter Berücksichtigung von (12) folgt

$$x + iy = -c e^{-K(q + i\ell)} = f(q + i\ell)$$

und

$$x = -c e^{-Kq} \cos K\ell \quad (14a) \quad y = c e^{-Kq} \sin K\ell \quad (14b)$$

Durch die analytische Funktion (14) ist nun ein Paar thermischer Parameter bestimmt, welches am Ellipsoid ein isothermes Netz von Parameterkurven erzeugt und durch seine Identifizierung mit den ebenen cartesischen Koordinaten eine konforme Abbildung des Ellipsoids unter Einhaltung der ursprünglich formulierten Bedingungen vermittelt.

Wir wollen nunmehr untersuchen, in welchem Bereich des Rotationsellipsoids das isotherme Netz  $x, y$  hinsichtlich der Änderung der Dichte seiner Koordinatenlinien einem ebenen cartesischen Netz am besten entspricht; in diesem Bereich eignet sich die durch die vorliegenden thermischen Parameter vermittelte konforme Abbildung für geodätische Zwecke am besten.

Aus I., (74) bilden wir

$$m = \frac{K c e^{-Kq}}{N \cos \varphi} \quad (15)$$

Daraus folgt mit (14)

$$m_x = \frac{-K + \sin \varphi}{N \cos \varphi \cos K\ell} \quad m_y = \frac{K - \sin \varphi}{N \cos \varphi \cos K\ell} \quad (16)$$

Diese Ausdrücke können nur für  $\sin \varphi = k$  verschwinden; hieraus schließen wir, daß die erwähnte größtmögliche Ähnlichkeit des isothermen Netzes  $x, y$  mit einem ebenen cartesischen Netz entlang eines Parallelkreises besteht, dessen Breite  $\varphi_0$  aus

$$\sin \varphi_0 = k \quad (17)$$

bestimmt ist. Mit Benützung dieses Ergebnisses können wir auch eine Verfügung hinsichtlich der Integrationskonstanten  $c$  treffen; diese wollen wir so bestimmen, daß der Parallelkreis  $\varphi$

längentreu abgebildet wird. Es muß also

$$2 \pi N_0 \cos \varphi_0 = 2 \pi \sin \varphi_0 c e^{-\sin \varphi_0 \varphi_0}$$

sein, woraus

$$c e^{-\sin \varphi_0 \varphi_0} = N_0 \cotg \varphi_0 = r_0 \quad (18)$$

folgt.

Diese letztere Gleichung erklärt die Bezeichnung Kegelprojektion. Der Ausdruck  $N_0 \cotg \varphi_0$  gibt nämlich die Länge der Mantelstrahlen eines Kegels an, dessen Achse mit der des Ellipsoids zusammenfällt und der dieses längs des Parallelkreises  $\varphi_0$  berührt. Mit einer Projektionsfläche im geometrischen Sinne hat jedoch dieser Berührungskegel hier nichts zu tun; die in unserem Falle sicherlich nicht ganz zutreffende Bezeichnung Kegelprojektion rührt daher, daß durch eine geometrische Projektion des Ellipsoids von einem Punkt der Rotationsachse auf diesen Berührungskegel nach Abwicklung desselben in die Ebene die Parallelkreis- und Meridianbilder ebenfalls konzentrische Kreise und deren Radien bilden, jedoch in anderer Anordnung. Die so entstandene Abbildung ist nicht konform.

Die früher besprochene Mercatorprojektion läßt sich nunmehr als Sonderfall der Lambertschen Kegelprojektion erklären. Indem wir  $k = 0$ , d.h.  $\varphi_0 = 0$  setzen, besteht hinsichtlich der Änderung der Dichte der Koordinatenlinien die größte Ähnlichkeit des isothermen Lambertschen Netzes mit einem ebenen cartesischen Netz im Äquator und in dessen Umgebung; das Lambertsche Netz geht also in das Mercatornetz über. Wir beweisen dies, indem wir (18) in (14b) eintragen und hierin  $\varphi \rightarrow 0$  gehen lassen. Es ist

$$y = N \cos \varphi \frac{\sin(l \sin \varphi)}{\sin \varphi} \Big|_{\varphi \rightarrow 0} = a l$$

Damit ist die obige Behauptung begründet, denn der zugehörige thermische Parameter  $x$  kann nur die isometrische Breite sein. Für  $k = \sin \varphi = 0$  geht demnach (14) in

$$x + iy = a(q + il)$$

über, was gerade der Abbildungsgleichung bei Mercator entspricht. Die Spitze des im längentreu abgebildeten Parallelkreis (Äquator) berührenden Kegels liegt nun im Unendlichen, der Kegel wird zum Zylinder. Der Sonderfall  $k = \pm 1$  ( $\varphi_0 = \pm 90^\circ$ ) ergibt die für geodätische Zwecke bedeutungslose polständige stereographische Abbildung.

Aus den Formeln (16) hatten wir gefunden, daß sich die konforme Kegelprojektion am besten für die Abbildung von Gebieten längs eines Parallelkreises eignet, deren Ausdehnung in Richtung desselben beliebig sein kann. Damit ist die Anwendungsmöglichkeit dieser Abbildung umschrieben: Sie eignet sich am besten für Gebiete von erheblicher Ausdehnung



in Richtung Ost-West, jedoch von nur geringer Ausdehnung in Richtung Nord-Süd.

Nach diesen allgemeinen Erklärungen gehen wir zur Entwicklung des Formelsystems der konformen Kegelprojektion über. Die Abbildungsgleichungen selbst - allerdings ohne Umkehrung - sowie einen Ausdruck zur Berechnung von  $m$  haben wir in (14) und (15) bereits angegeben; dies jedoch in einer für die praktische Rechnung wenig geeigneten Form. Wir machen daher von den allgemeinen Entwicklungen in I., 5., Gebrauch.

Nach Wahl des längentreu abzubildenden Parallelkreises  $\varphi_0$  (Grundparallel) nehmen wir einen Meridian  $\lambda_0$  als Grundmeridian an und zählen alle Längen als Längenunterschiede  $\ell$  zu diesem. Weiter vereinbaren wir, daß das Bild dieses Meridians die  $x$ -Achse des ebenen Koordinatensystems sein möge; der Ursprung desselben soll im Schnittpunkt der  $x$ -Achse mit dem Bild des längentreu abgebildeten Parallelkreises liegen. Der Punkt  $\varphi = \varphi_0$ ,  $\ell = 0$ , der Null- oder Anfangspunkt, ist daher auch der Punkt  $x = y = 0$ .

Indem wir in (14) den Längenunterschied gleich Null setzen, finden wir

$$x = -c e^{-k\ell} = -N \cotg \varphi = f(\ell) \quad (19)$$

Die Koeffizienten  $a_n$ ,  $b_n$  der allgemeinen Transformationsgleichungen I., (59, 60) zwischen den geographischen und den thermischen Parametern, - es sind dies auch die Abbildungsgleichungen - finden wir aus I., (54); es ist

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{1!} \left( \frac{dx}{d\ell} \right)_0 = \frac{1}{1!} k c e^{-k\ell_0} = \frac{1}{1!} N_0 \cos \varphi_0 \\ a_2 &= \frac{1}{2!} \left( \frac{d^2x}{d\ell^2} \right)_0 = -\frac{1}{2!} k^2 c e^{-k\ell_0} = -\frac{1}{2!} N_0 \cos^2 \varphi_0 t_0 \\ a_3 &= \frac{1}{3!} \left( \frac{d^3x}{d\ell^3} \right)_0 = \frac{1}{3!} k^3 c e^{-k\ell_0} = \frac{1}{3!} N_0 \cos^3 \varphi_0 (t_0^2) \\ a_4 &= \frac{1}{4!} \left( \frac{d^4x}{d\ell^4} \right)_0 = -\frac{1}{4!} k^4 c e^{-k\ell_0} = -\frac{1}{4!} N_0 \cos^4 \varphi_0 t_0 (t_0^2) \\ a_5 &= \frac{1}{5!} \left( \frac{d^5x}{d\ell^5} \right)_0 = \frac{1}{5!} k^5 c e^{-k\ell_0} = \frac{1}{5!} N_0 \cos^5 \varphi_0 (t_0^4) \end{aligned} \quad (20)$$

Nach I., (56) oder durch direkte Umkehrung nach I., (51) finden wir weiter

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{N_0 \cos \varphi_0} \\ b_2 &= \frac{t_0}{2 N_0^2 \cos \varphi_0} \\ b_3 &= \frac{1}{3 N_0^3 \cos \varphi_0} t_0^2 \\ b_4 &= \frac{t_0}{4 N_0^4 \cos \varphi_0} t_0^2 \\ b_5 &= \frac{1}{5 N_0^5 \cos \varphi_0} t_0^4 \end{aligned} \quad (21)$$

Indem wir die so gefundenen Werte der  $a_i$  und  $b_i$  in I., (59,60) eintragen, erhalten wir die Abbildungsgleichungen und deren Umkehrung mit<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}
 x = & N_0 (1 - \eta_0^2 + \eta_0^4 - \eta_0^6) \Delta \varphi + \frac{3}{2} N_0 t_0 (\eta_0^2 - 2\eta_0^4) \Delta \varphi^2 + \frac{1}{2} N_0 \cos^2 \varphi_0 t_0 \ell^2 \\
 & + \frac{1}{6} N_0 (1 + \eta_0^2 - 3t_0^2 \eta_0^2 - 3\eta_0^4 + 21t_0^2 \eta_0^4) \Delta \varphi^3 + \frac{1}{2} N_0 \cos^2 \varphi_0 (-t_0^2 + t_0^2 \eta_0^2 - t_0^2 \eta_0^4) \Delta \varphi \ell^2 \\
 & + \frac{1}{24} N_0 t_0 (1 - \eta_0^2) \Delta \varphi^4 + \frac{3}{4} N_0 \cos^2 \varphi_0 t_0 (-t_0^2 \eta_0^2) \Delta \varphi^2 \ell^2 + \frac{1}{24} N_0 \cos^4 \varphi_0 t_0 (-t_0^2) \ell^4 \\
 & + \frac{1}{120} N_0 (5 + 3t_0^2) \Delta \varphi^5 + \frac{1}{12} N_0 \cos^2 \varphi_0 (-t_0^2) \Delta \varphi^3 \ell^2 + \frac{1}{24} N_0 \cos^4 \varphi_0 t_0^4 \Delta \varphi \ell^4 \quad (22a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y = & N_0 \cos \varphi_0 \ell + N_0 \cos \varphi_0 t_0 (-1 + \eta_0^2 - \eta_0^4) \Delta \varphi \ell + \frac{3}{2} N_0 \cos \varphi_0 (-t_0^2 \eta_0^2 + 2t_0^2 \eta_0^4) \Delta \varphi^2 \ell \\
 & + \frac{1}{6} N_0 \cos^3 \varphi_0 (-t_0^2) \ell^3 + \frac{1}{6} N_0 \cos \varphi_0 t_0 (-1 - \eta_0^2 + 3t_0^2 \eta_0^2) \Delta \varphi^3 \ell \\
 & + \frac{1}{6} N_0 \cos^3 \varphi_0 t_0 (t_0^2 - t_0^2 \eta_0^2) \Delta \varphi \ell^3 \\
 & + \frac{1}{24} N_0 \cos \varphi_0 (-t_0^2) \Delta \varphi^4 \ell + \frac{1}{120} N_0 \cos^5 \varphi_0 t_0^4 \ell^5 \quad (22b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta \varphi = & \frac{1}{N_0} (1 + \eta_0^2) x + \frac{3}{2N_0^2} t_0 (-\eta_0^2 - \eta_0^4) x^2 + \frac{1}{2N_0^2} t_0 (-1 - \eta_0^2) y^2 \\
 & + \frac{1}{6N_0^3} (-1 - 5\eta_0^2 + 3t_0^2 \eta_0^2 - 7\eta_0^4 + 18t_0^2 \eta_0^4) x^3 + \frac{1}{2N_0^3} (-t_0^2 + 2t_0^2 \eta_0^2 + 3t_0^2 \eta_0^4) x y^2 \\
 & + \frac{1}{24N_0^4} t_0 (-1 + 26\eta_0^2) x^4 + \frac{1}{4N_0^4} t_0 (1 - 2t_0^2 + 5\eta_0^2 + t_0^2 \eta_0^2) x^2 y^2 \\
 & + \frac{1}{8N_0^4} t_0 (t_0^2 - 2t_0^2 \eta_0^2) y^4 \\
 & + \frac{1}{120N_0^5} (5 - 3t_0^2) x^5 + \frac{1}{6N_0^5} (2t_0^2 - 3t_0^4) x^3 y^2 + \frac{1}{8N_0^5} (-t_0^2 + 3t_0^4) x y^4 \quad (23a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \ell = & \frac{1}{N_0 \cos \varphi_0} y + \frac{1}{N_0^2 \cos \varphi_0} t_0 x y \\
 & + \frac{1}{N_0^3 \cos \varphi_0} t_0^2 x^2 y + \frac{1}{3N_0^3 \cos \varphi_0} (-t_0^2) y^3 \\
 & + \frac{1}{N_0^4 \cos \varphi_0} t_0 t_0^2 x^3 y + \frac{1}{N_0^4 \cos \varphi_0} t_0 (-t_0^2) x y^3 \\
 & + \frac{1}{N_0^5 \cos \varphi_0} t_0^4 x^4 y + \frac{2}{N_0^5 \cos \varphi_0} (-t_0^4) x^2 y^3 + \frac{1}{5N_0^5 \cos \varphi_0} t_0^4 y^5 \quad (23b)
 \end{aligned}$$

Die Meridiankonvergenz in der konformen Kegelprojektion läßt sich auf elementarem Wege ableiten. Jeder Meridian bildet sich in einer Geraden ab; in einem Punkt der Bildebene ist der Winkel zwischen dieser Geraden - dem Meridianbild - und der Koordinatenlinie  $y = \text{const.}$  durch denselben Punkt die Meridiankonvergenz. Diese ist sonach aus

$$\gamma = k\ell = \sin\varphi \ell \quad (24a)$$

gegeben; trägt man hierin für  $\ell$  die Gleichung (23b) ein, so kann die Meridiankonvergenz auch als Funktion von  $x$  und  $y$  berechnet werden. Es ist<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{t_0}{N_0} y + \frac{1}{N_0^2} (t_0^2) xy + \frac{t_0}{N_0^3} (t_0^2) x^2 y \\ &+ \frac{t_0}{3N_0^2} (-t_0^2) y^3 + \frac{1}{N_0^4} (t_0^4) x^3 y \\ &+ \frac{1}{N_0^4} (-t_0^4) xy^3 + \frac{t_0}{N_0^5} (t_0^4) x^4 y \\ &+ \frac{t_0}{N_0^5} (-2t_0^4) x^2 y^3 + \frac{t_0}{5N_0^5} (t_0^4) y^5 \end{aligned} \quad (24b)$$

Das bisher angegebene Formelsystem ist noch durch die Ausdrücke zur Berechnung der Dichte der isothermen Koordinatenlinien am Ellipsoid oder des Abbildungsmaßstabes zu ergänzen. Wir denken uns die zu den allgemeinen Ausdrücken I., (83) führende Entwicklung bis zu den Gliedern 5. Ordnung fortgeführt und erhalten<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} m &= 1 + \frac{1}{2} (1 - \eta_0^2 + \eta_0^4) \Delta\varphi^2 + \frac{1}{6} t_0 (1 - 3\eta_0^2 - 7\eta_0^4) \Delta\varphi^3 \\ &+ \frac{1}{24} (5 + 3t_0^2 - 2\eta_0^2 - 3t_0^2\eta_0^2) \Delta\varphi^4 + \frac{1}{40} t_0 (7 + 4t_0^2) \Delta\varphi^5 \end{aligned} \quad (25a)$$

Die Dichte der Koordinatenlinien, d.h. der Abbildungsmaßstab ist; wie sich aus der obigen Formel in Übereinstimmung mit (15) zeigt, eine Funktion allein des Breitenunterschiedes zur Ausgangsbreite. Als Funktion der thermischen Parameter oder der ebenen Koordinaten ergibt sich dieser aus<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} m &= 1 + \frac{1}{2N_0^2} (1 + \eta_0^2) x^2 + \frac{1}{6N_0^2} t_0 (1 - 3\eta_0^2 - 4\eta_0^4) x^3 \\ &+ \frac{1}{2N_0^2} t_0 (-1 - \eta_0^2 - \eta_0^4) xy^2 + \frac{1}{24N_0^4} (1 + 3t_0^2 - 2\eta_0^2 + 3t_0^2\eta_0^2) x^4 \\ &+ \frac{1}{4N_0^4} (-3t_0^2 + t_0^2\eta_0^2) x^2 y^2 + \frac{1}{8N_0^4} (t_0^2 + t_0^2\eta_0^2) y^4 \\ &+ \frac{1}{20N_0^5} t_0 (1 + 2t_0^2) x^5 + \frac{1}{12N_0^5} t_0 (-1 - 12t_0^2) x^3 y^2 + \frac{1}{2N_0^5} t_0^2 t_0 xy^4 \end{aligned} \quad (25b)$$

In den Formeln (22) - (25) beziehen sich alle Koeffizienten auf die Breite des Anfangspunktes, d.h. auf die des längentreu abgebildeten Grundparallels  $\varphi$ .

Mit den angegebenen Ausdrücken ist die konforme Kegelprojektion vollständig anwendbar. Zur Lösung der geodätischen Hauptaufgaben in Lambertschen Koordinaten am Ellipsoid ziehen wir die Potenzreihen I., (88,89) heran; um die Hauptaufgaben in der Bildebene zu lösen, benützen wir die allgemeinen Formeln I., (102,109). Die zur Aufstellung dieser Ausdrücke notwendigen partiellen Ableitungen von  $m$  im betrachteten Punkt bilden wir aus (25b).

Abschließend noch einige Bemerkungen über die praktische Anwendung der konformen Kegelprojektion. Wie wir nachgewiesen haben, eignet sich diese am besten für die Abbildung von Bereichen des Rotationsellipsoids, die sich mit geringer Nord-Süd-Ausdehnung längs des Grundparallels erstrecken. Die Konvergenz der Potenzreihen (22,23) reicht gerade hin, um in mittleren Breiten für  $\Delta\varphi = \pm 1,5^\circ$  - also für eine Gesamtausdehnung des abzubildenden Gebietes über drei Breitengrade - einen Längenunterschied von  $\mathcal{L} = \pm 2^\circ$ , mit ge-

ringerer Genauigkeit noch von  $\mathcal{L} = \pm 3^\circ$ , zu überstreichen. Erstreckt sich das abzubildende Gebiet jedoch über mehr als vier, bzw. sechs Längengrade, so wählt man zwei Grundmeridiane, die im Schnitt mit dem Grundparallel zwei Anfangspunkte gleicher geographischer Breite  $\varphi_0$ , jedoch verschiedener geographischer Länge  $\lambda_{01}$  und  $\lambda_{02}$  ergeben (Abb. 3). Für jeden dieser Punkte gilt dasselbe Formelsystem (22)-(25); die ebenen Koordinatensysteme  $x_1, y_1$  und  $x_2, y_2$  erscheinen jedoch um den Winkel

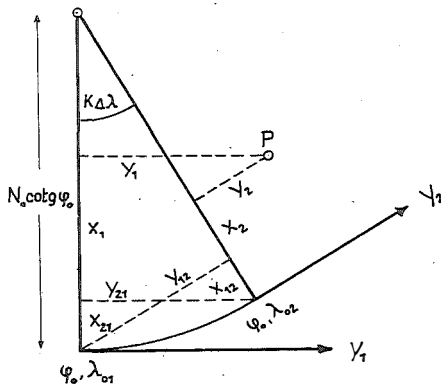


Abb. 3.

$$K(\lambda_{02} - \lambda_{01}) = K\Delta\lambda$$

gegeneinander verdreht. Die cartesischen Koordinaten in beiden Systemen sind durch die Formeln der ebenen Koordinatentransformation miteinander verbunden; es ist

$$x_1 + iy_1 = x_{21} + iy_{21} + (x_2 + iy_2) e^{-iK\Delta\lambda} \quad (26a)$$

$$x_2 + iy_2 = x_{12} + iy_{12} + (x_1 + iy_1) e^{iK\Delta\lambda} \quad (26b)$$

mit

$$x_{21} = N_0 \cotg \varphi_0 (1 - \cos K\Delta\lambda) \quad y_{21} = N_0 \cotg \varphi_0 \sin K\Delta\lambda$$

$$x_{12} = N_0 \cotg \varphi_0 (1 - \cos K\Delta\lambda) \quad y_{12} = -N_0 \cotg \varphi_0 \sin K\Delta\lambda$$

Es kann demnach mit einem auf einen Grundparallel  $\varphi_0$  bezogenen Formelsystem unter Benützung der Formeln (26) eine sich um das ganze Ellipsoid erstreckende Zone zwischen zwei Parallelkreisen abgebildet werden. Weist jedoch der abzubildende Bereich eine größere Breitenausdehnung auf, so muß dieser in mehrere von Parallelkreisen begrenzte Zonen unterteilt werden. In der mittleren Breite jeder Zone wird ein Grundparallel angenommen; es entstehen dadurch ebensoviele voneinander verschiedene Abbildungs- und Formelsysteme.

Hin und wieder pflegt man auch einen Reduktionsfaktor  $k_0 < 1$  einzuführen, mit dem man die ebenen Koordinatenwerte multipliziert. Dies hat zur Folge, daß der Abbildungsmaßstab längs des Bildes des Grundparallels kleiner als eins ist; er wächst - nicht gleich - mit  $\pm \Delta\varphi$ , um in zwei Parallelkreisen  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  den Wert eins zu erreichen und nördlich bzw. südlich derselben weiter anzusteigen. Man erreicht damit, daß an der nördlichen und südlichen Grenze des abgebildeten Bereichs kleinere Werte für den Abbildungsmaßstab bestehen. Auf die Größe der Richtungsreduktionen und damit auf die Ausdehnung des Abbildungsbereichs hat diese Operation keinen Einfluß; sie hat jedoch den Nachteil, daß zwischen den Parallelkreisen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  eine Bildstrecke kleiner, außerhalb derselben aber größer ist als das zugehörige Bogenstück am Ellipsoid. Der Vorgang entspricht der längentreuen Abbildung zweier Parallelkreise.

Die Entwicklung der konformen Kegelprojektion läßt sich auch so ausführen, daß zwei vorgegebene Parallelkreise  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  längentreu abgebildet werden. Auf die Herleitung des Formelsystems für diese Abbildung<sup>2</sup> gehen wir nicht näher ein; wir geben jedoch in den Tafeln des Teiles III. auch die Zahlenwerte der Koeffizienten der Reihenentwicklungen für einen Ansatz derselben an.

#### 4. Die Gauß-Krügersche Abbildung. (Transversale Mercatorabbildung)

##### a. Allgemeines.

Stellt man zur Definition einer konformen Abbildung des Rotationsellipsoids die Forderung, daß ein Meridian desselben - der Grundmeridian - längentreu in die  $x$ -Achse eines ebenen cartesischen Koordinatensystems abgebildet werden soll, so definiert man mit dieser Festsetzung die Gauß-Krügersche Abbildung des Ellipsoids in die Ebene. Die dieser Abbildung zugrundeliegenden thermischen Parameter des

Rotationsellipsoids werden demnach dadurch erklärt, daß der thermische Parameter  $x$  dem linearen Maß  $B$  der Bogenlänge des Grundmeridians gleichgesetzt wird, wobei dieser Meridian gleichzeitig die Parameterkurve  $y = 0$  des isothermen Netzes darstellt. Es genügt wie wir wissen diese Festsetzung, um das Parameterpaar  $x, y$  zu bestimmen.

Für das Netz der Gauß-Krügerschen Koordinatenlinien auf dem Rotationsellipsoid ergibt sich folgendes Bild: Ein Meridian  $\lambda_m$  ist der Grundmeridian, also die Parameterkurve  $y = 0$ ; in ihm wird der Parameter  $x$  als dessen Bogenlänge gezählt. Die Linien  $x = \text{const.}$  durchsetzen rechtwinklig in gleichen Abständen diesen Meridian und werden von den Linien  $y = \text{const.}$  so geschnitten, daß das Kriterium des isothermen Netzes, die Zerlegung der Fläche in infinitesimale Quadrate, erfüllt ist. Zufolge der mit dem wachsenden Absolutbetrag der Ordinate  $y$  zunehmenden Konvergenz der Linien  $x = \text{const.}$  - man vergegenwärtige sich zur einfacheren Vorstellung die Verhältnisse auf der Kugel - nimmt die Dichte der Koordinatenlinien in Richtung  $+y$  zu und zwar in erster Annäherung mit dem Quadrat der Ordinate. Im Grundmeridian ist sie zufolge der Festsetzung  $x = B$  konstant und ändert sich außerhalb desselben mit  $x$  nur wenig; wir erklären dies mit der nur geringen Abplattung des Rotationsellipsoids. Weiterhin können wir aussagen, daß für das ganze Netz Symmetrie hinsichtlich der Parameterkurve  $y = 0$ , des Grundmeridians, bestehen muß; legen wir für die Zählung des Parameters  $x$  und der Bogenlänge des Grundmeridians den gleichen Anfangspunkt fest - den Schnittpunkt des Grundmeridians mit dem Äquator - so besteht diese Symmetrie auch in Bezug auf die Parameterkurve  $x = 0$ , den Äquator. Setzt man im Übrigen die Kugel als Bezugsfläche voraus, so entspricht dem Gauß-Krügerschen Netz auf dieser völlig das Mercatornetz, wobei lediglich anstelle des Großkreises des Äquators der Großkreis des Grundmeridians tritt. Aus diesem Grunde bezeichnet man vielfach die Gauß-Krügersche Abbildung als "Transversale Mercatorprojektion".

Man erkennt, daß eine gewisse Verwandtschaft zwischen den rechtwinkligen geodätischen Linearkoordinaten (Soldnerschen Koordinaten) und den Gauß-Krügerschen Koordinaten besteht. Ausdrücklich sei aber betont, daß die rechtwinkligen geodätischen Linearkoordinaten wohl ein orthogonales, nicht aber isothermes Netz krummer Koordinatenlinien am Rotationsellipsoid bilden. Denn es läßt sich leicht zeigen, daß bei Beibehaltung der Parameterkurven dieses Netzes - dessen Linien  $x = \text{const.}$  sind geodätische Kurven orthogonal zum Hauptmeridian, die Linien  $y = \text{const.}$  geodätische Parallelen zu diesem - dieses Netz nicht in ein isothermes Netz übergeführt werden kann<sup>3</sup>. Denkt man sich die Grundmeridiane eines Gauß-Krügerschen und eines Soldnerschen Netzes

ineinandergelegt, so überdecken sich die Parameterkurven der beiden Netze streng nur im Grundmeridian, annähernd in dessen nächster Umgebung. Die Linien  $x = \text{const.}$  beider Netze berühren sich für korrespondierende Parameterwerte im Hauptmeridian; je weiter man sich jedoch von diesem entfernt, umso mehr weicht die geodätische Kurve  $x = \text{const.}$  des Soldnerschen Netzes von der Kurve gleichen Parameterwertes des Gauß-Krügerschen Netzes ab. Eine Eigenschaft jedoch ist den beiden verschiedenartigen Netzen gemeinsam: Soferne man nur für eines derselben die Parameterkurve  $y = 0$  mit einem Meridian identifiziert, ergibt sich an jeder Stelle des Rotationsellipsoids, d.h. mit jedem beliebigen Meridian als Grundmeridian ein völlig kongruentes Netz.

Nach dieser vom Gegenstand etwas abweichenden Gegenüberstellung mit den Soldnerschen Koordinaten kehren wir zum ursprünglichen Thema zurück. Wir erhalten die Gauß-Krügersche Abbildung des Rotationsellipsoids in die Ebene, wenn wir die thermischen Gauß-Krügerschen Parameter  $x, y$  mit den ebenen cartesischen Koordinaten der Bildebene identifizieren, den Parameterkurven am Rotationsellipsoid also ebene Koordinatenlinien gleichen Parameterwertes zuordnen. Damit wird, der Definition der Abbildung entsprechend, der Grundmeridian in die  $x$ -Achse des ebenen Koordinatensystems längentreu abgebildet. Das - nicht längentreue - Bild des Äquators liegt in der  $y$ -Achse.

Die bisherigen Ausführungen genügen, um die Eigenschaften der Gauß-Krügerschen Koordinaten zu diskutieren. Wir wissen, daß die größtmögliche Ähnlichkeit eines Netzes isothermer krummer Koordinatenlinien mit einem ebenen cartesischen Netz hinsichtlich der Änderung der Dichte der Koordinatenlinien in dem Bereich besteht, in dem die partiellen Ableitungen  $m_x, m_y$  verschwinden oder möglichst klein werden. Im Grundmeridian folgen nun die Linien  $x = \text{const.}$  zufolge der Festsetzung  $x = B$  in gleichen Abständen aufeinander, es ist also in diesem die Dichte der Koordinatenlinien konstant. Für den Grundmeridian gilt daher  $m_x = 0$ . Der späteren Entwicklung etwas vorgreifend, setzen wir genähert

$$m = 1 + (m_{02}) y^2 + \dots$$

Für  $y = 0$ , also gleichfalls im Grundmeridian, ist daher auch  $m_y = 0$ .

Die größtmögliche Ähnlichkeit besteht demzufolge im Grundmeridian und in dessen nächster Umgebung; dies legt den Schluß nahe, daß sich die Gauß-Krügerschen Koordinaten zur Behandlung geodätischer Aufgaben und zur konformen Abbildung des Rotationsellipsoids für Gebiete desselben am besten eignen, die innerhalb eines schmalen, von zwei Meridianen begrenzten Teiles der ellipsoidischen Oberfläche liegen, sich jedoch in diesem Bereich in Richtung des Grund-

meridians beliebig erstrecken können. Hierin liegt wie bei allen isothermen Netzen am Ellipsoid eine Beschränkung vor; in der praktischen Anwendung der Gauß-Krügerschen Koordinaten wird diese aber weitgehend dadurch aufgehoben, daß das Rotationsellipsoid nach Wahl geeigneter Grundmeridiane mit mehreren unter sich kongruenten Netzen überdeckt werden kann, in denen stets die gleichen Formelsysteme gelten (Gauß-Krügersche Meridianstreifen). Damit erwähnen wir einen der größten Vorzüge der Gauß-Krügerschen Koordinaten vor allen anderen, als Grundlage konformer Abbildung dienenden isothermen Koordinatensystemen.

Als Abschluß der allgemeinen Bemerkungen noch einige Worte über die Geschichte der Gauß-Krügerschen Koordinaten. Diese stammen neben den Grundlagen der Theorie der Isothermennetze für beliebige Flächen und der "Allgemeinen Lösung der Aufgabe: Die Teile einer gegebenen Fläche auf einer anderen gegebenen Fläche so abzubilden, daß die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird" (Preisschrift 1822) von C.F.Gauß (1777 bis 1855), der auch erstmals die Bezeichnung "konform" für die winkeltreuen Abbildungen einführte. Die Entstehung der nach Gauß benannten Koordinaten fällt zwischen die Jahre 1816 bis 1820; sie wurden von ihm selbst in seiner Hannoverschen Landesvermessung in den Jahren 1821 bis 1825 verwendet. Gauß hat hierüber nichts veröffentlicht. Oskar Schreiber, damals Hauptmann der Hannoverschen Armee, brachte 1866 die Ableitungen und auch weitere Entwicklungen der Gaußschen Formeln in seiner "Theorie der Hannoverschen Landesvermessung". Ein umfassendes Werk über die Gaußschen Koordinaten verdanken wir Prof.Dr.L.Krüger, dessen Arbeit "Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene" zur Grundlage der später vielfachen praktischen Anwendung derselben wurde<sup>4</sup>. In der Folge bürgerte sich die heute vielfach übliche Bezeichnung "Gauß-Krügersche" Koordinaten ein. Neben dem Vorschlag von Baumgart 1919 über die Bezeichnungen in den einzelnen Meridianstreifen seien aus den letzten eineinhalb Jahrzehnten u.a. noch die Arbeiten Dr. Hristows zu diesem Gegenstand sowie vor allem dessen Schrift "Die Gauß-Krügerschen Koordinaten auf dem Ellipsoid" genannt<sup>5</sup>.

Österreich-Ungarn hat als erster Staat Gauß-Krügersche Koordinaten im Jahre 1917 in seiner Landesvermessung eingeführt (die im heutigen Österreich noch verwendeten Meridianstreifen 28, 31, 34<sup>o</sup> ö. Ferro). Im Laufe nur weniger Jahrzehnte haben sich viele Staaten diesem Schritt angeschlossen, sodaß man heute mit ziemlicher Berechtigung die Gauß-Krügerschen als internationale Koordinaten am Rotationsellipsoid - oder auf einigen Rotationsellipsoiden - bezeichnen kann.

Es möge der vorstehende kurze Abriß der Geschichte der Gauß-Krügerschen Koordinaten die geradezu



seherische Sicherheit zeigen, mit der Gauß - neben seinen grundlegenden Arbeiten - für die von ihm selbst durchgeführte hannoversche Landesvermessung eine konforme Abbildung entwickelte, deren Bedeutung erst ein Jahrhundert später voll erkannt werden sollte.

- b. Die Transformation geographischer in Gauß-Krügersche Koordinaten und die inverse Transformation (Aufstellung der Abbildungsgleichungen).

Unsere Aufgabe besteht darin, die Parameter  $\varphi$ ,  $\lambda$  des Rotationsellipsoids in isotherme Gauß-Krügersche Parameter  $x$ ,  $y$  oder einfach in Gauß-Krügersche Koordinaten zu transformieren; ebenso ist diese Transformation im umgekehrten Sinne auszuführen.

Zur Aufstellung der Transformationsgleichungen - es sind dies gleichzeitig die Abbildungsgleichungen - haben wir im Abschnitt I., 5. das allgemeine Formelsystem bereits vorbereitet. Wir wählen am Ellipsoid einen Meridian  $\lambda_m$  als Grundmeridian und auf diesem einen Anfangs- oder Nullpunkt  $P_0$ , der durch seine geographischen Koordinaten  $\varphi_0$  und  $\lambda_0 = \lambda_m$  gegeben ist. Für einen in der Umgebung dieses Nullpunktes liegenden Punkt  $P$  setzen wir dessen geographische Koordinaten als gegeben voraus und bilden die Koordinatenunterschiede.

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 \qquad \Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$$

Diesen beiden Punkten seien die Werte  $x_0, y_0$  und  $x, y$  als isotherme Gauß-Krügersche Parameter zugeordnet, worunter wir - wie schon erwähnt - zunächst isotherme krummlinige Koordinaten am Ellipsoid, in weiterer Folge cartesische Koordinaten in der Bildebene verstehen.

Wir haben die Gauß-Krügerschen Koordinaten definiert durch die Festsetzung, daß die Linie  $y = 0$  durch einen Meridian des Rotationsellipsoids gebildet werden soll, in dem der Parameter  $x$  als dessen metrische Länge gezählt wird. Diesen Meridian identifizieren wir mit dem Grundmeridian  $\lambda_m = \lambda_0$ , so daß wir für den in diesem gewählten Anfangspunkt  $P_0$  die Gauß-Krügerschen Koordinaten

$x_0 = B_0$                        $y_0 = 0$   
erhalten. Für den zweiten Punkt  $P$  gilt

$$\Delta x = x - x_0 \qquad \Delta y = y$$

In der allgemeinen Entwicklung haben wir die Differenz  $\Delta x$  einfach gleich  $x$  gesetzt; wir machen indes hier davon ausnahmsweise keinen Gebrauch und halten an

der Bezeichnung  $\Delta x$  fest, da wir die Gauß-Krügerschen Abszissen im Grundmeridian ebenso zählen werden wie die Bogenlänge desselben, nämlich vom Äquator aus.

Die zur Aufstellung der Transformationsgleichung notwendigen Koeffizienten  $a_i$ ,  $b_i$  finden wir, indem wir für den Grundmeridian

$$x = B = f(q) \quad (27)$$

setzen und zunächst nach

$$a_n = \frac{1}{n!} \left( \frac{d^n x}{d q^n} \right)_0$$

die Koeffizienten  $a_n$  an der Stelle  $\varphi = \varphi_0$  berechnen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} a_1 &= N_0 \cos \varphi_0 \\ a_2 &= \frac{1}{2} N_0 \cos^2 \varphi_0 t_0 (-1) \\ a_3 &= \frac{1}{6} N_0 \cos^3 \varphi_0 (-1 + t_0^2 - \eta_0^2) \\ a_4 &= \frac{1}{24} N_0 \cos^4 \varphi_0 t_0 (5 - t_0^2 + 9\eta_0^2 + 4\eta_0^4) \\ a_5 &= \frac{1}{120} N_0 \cos^5 \varphi_0 (5 - 18t_0^2 + t_0^4 + 14\eta_0^2 - 58t_0^2\eta_0^2) \end{aligned} \quad (28a)$$

Nach den Formeln I., (56, bzw. 50 und 51) bilden wir die Koeffizienten  $b_n$  der inversen Entwicklung; diese ergeben sich mit

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{N_0 \cos \varphi_0} \\ b_2 &= \frac{1}{2N_0^2 \cos \varphi_0} t_0 \\ b_3 &= \frac{1}{6N_0^3 \cos \varphi_0} (1 + 2t_0^2 + \eta_0^2) \\ b_4 &= \frac{1}{24N_0^4 \cos \varphi_0} t_0 (5 + 6t_0^2 + \eta_0^2 - 4\eta_0^4) \\ b_5 &= \frac{1}{120N_0^5 \cos \varphi_0} (5 + 28t_0^2 + 24t_0^4 + 6\eta_0^2 + 8t_0^2\eta_0^2) \end{aligned} \quad (28b)$$

Die Bedeutung der hier und später immer verwendeten Bezeichnungen ist in I., Seite 9, angegeben.

Wir tragen nun die Werte  $a_n$  in das Formelpaar I., (59) ein und erhalten die Transformationsgleichungen zwischen den geographischen und den Gauß-Krügerschen Koordinaten und damit auch die Abbildungsgleichungen

$$\begin{aligned}
\Delta x = & N_0 (1 - \eta_0^2 + \eta_0^4 - \eta_0^6) \Delta \varphi + \frac{3}{2} N_0 t_0 (\eta_0^2 - 2\eta_0^4) \Delta \varphi^2 \\
& + \frac{1}{2} N_0 \cos^2 \varphi_0 t_0 l^2 + \frac{1}{2} N_0 (\eta_0^2 - t_0^2 \eta_0^2 - 2\eta_0^4 + 7t_0^2 \eta_0^4) \Delta \varphi^3 \\
& + \frac{1}{2} N_0 \cos^2 \varphi_0 (1 - t_0^2 + t_0^2 \eta_0^2 - t_0^2 \eta_0^4) \Delta \varphi l^2 + \frac{1}{2} N_0 t_0 (-\eta_0^2) \Delta \varphi^4 \\
& + \frac{1}{4} N_0 \cos^2 \varphi_0 t_0 (-4 + 3\eta_0^2 - 3t_0^2 \eta_0^2) \Delta \varphi^2 l^2 \\
& + \frac{1}{24} N_0 \cos^4 \varphi_0 t_0 (5 - t_0^2 + 9\eta_0^2) l^4 + \frac{1}{3} N_0 \cos^2 \varphi_0 (-1 + t_0^2) \Delta \varphi^3 l^2 \\
& + \frac{1}{24} N_0 \cos^4 \varphi_0 (5 - 18t_0^2 + t_0^4) \Delta \varphi l^4 \quad (29a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y = & N_0 \cos \varphi_0 l + N_0 \cos \varphi_0 t_0 (-1 + \eta_0^2 - \eta_0^4) \Delta \varphi l \\
& + \frac{1}{2} N_0 \cos \varphi_0 (-1 + \eta_0^2 - 3t_0^2 \eta_0^2 - \eta_0^4 + 6t_0^2 \eta_0^4) \Delta \varphi^2 l \\
& + \frac{1}{6} N_0 \cos^3 \varphi_0 (1 - t_0^2 + \eta_0^2) l^3 + \frac{1}{6} N_0 \cos \varphi_0 t_0 (1 - 10\eta_0^2 + 3t_0^2 \eta_0^2) \Delta \varphi^3 l \\
& + \frac{1}{6} N_0 \cos^3 \varphi_0 t_0 (-5 + t_0^2 - 4\eta_0^2 - t_0^2 \eta_0^2) \Delta \varphi l^3 \\
& + \frac{1}{24} N_0 \cos \varphi_0 \Delta \varphi^4 l + \frac{1}{12} N_0 \cos^3 \varphi_0 (-5 + 13t_0^2) \Delta \varphi^2 l^3 \\
& + \frac{1}{120} N_0 \cos^5 \varphi_0 (5 - 18t_0^2 + t_0^4) l^5 \quad (29b)
\end{aligned}$$

Da wir die Meridianbogenlänge  $B$  und damit auch die Gauß-Krügersche Abszisse vom Äquator aus zählen, bilden wir als endgültiges Ergebnis  $x = x_0 + \Delta x$ .

Als inverse Form der obigen Gleichungen erhalten wir durch Eintragung der Koeffizienten  $b_n$  in I., (60)

$$\begin{aligned}
\Delta \varphi = & \frac{1}{N_0} (1 + \eta_0^2) \Delta x + \frac{3}{2N_0^2} t_0 (-\eta_0^2 - \eta_0^4) \Delta x^2 + \frac{1}{2N_0^2} t_0 (-1 - \eta_0^2) y^2 \\
& + \frac{1}{2N_0^3} (-\eta_0^2 + t_0^2 \eta_0^2 - 2\eta_0^4 + 6t_0^2 \eta_0^4) \Delta x^3 \\
& + \frac{1}{2N_0^3} (-1 - t_0^2 - 2\eta_0^2 + 2t_0^2 \eta_0^2 - \eta_0^4 + 3t_0^2 \eta_0^4) \Delta x y^2 \\
& + \frac{1}{2N_0^4} t_0 \eta_0^2 \Delta x^4 + \frac{1}{4N_0^4} t_0 (-2 - 2t_0^2 + 9\eta_0^2 + t_0^2 \eta_0^2) \Delta x y^2 \\
& + \frac{1}{24N_0^4} t_0 (5 + 3t_0^2 + 6\eta_0^2 - 6t_0^2 \eta_0^2) y^4 + \frac{1}{6N_0^5} (-1 - 4t_0^2 - 3t_0^4) \Delta x^3 y^2 \\
& + \frac{1}{24N_0^5} (5 + 14t_0^2 + 9t_0^4) \Delta x y^4 \quad (30a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ell = & \frac{1}{N_0 \cos \varphi_0} Y + \frac{1}{N_0^2 \cos \varphi_0} t_0 \Delta X Y + \frac{1}{2 N_0^3 \cos \varphi_0} (1 + 2 t_0^2 + \eta_0^2) \Delta X^2 Y \\
& + \frac{1}{6 N_0^3 \cos \varphi_0} (-1 - 2 t_0^2 - \eta_0^2) Y^3 + \frac{1}{6 N_0^4 \cos \varphi_0} t_0 (5 + 6 t_0^2 + \eta_0^2) \Delta X^3 Y \\
& + \frac{1}{6 N_0^4 \cos \varphi_0} t_0 (-5 - 6 t_0^2 - \eta_0^2) \Delta X Y^3 + \frac{1}{24 N_0^5 \cos \varphi_0} (5 + 28 t_0^2 + 24 t_0^4) \Delta X^4 Y \\
& + \frac{1}{12 N_0^5 \cos \varphi_0} (-5 - 28 t_0^2 - 24 t_0^4) \Delta X^2 Y^3 + \frac{1}{120 N_0^5 \cos \varphi_0} (5 + 28 t_0^2 + 24 t_0^4) Y^5. \quad (30b)
\end{aligned}$$

Mit den so errechneten Koordinatendifferenzen ergibt sich schließlich

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta \varphi \quad \lambda = \lambda_m + \ell$$

Wir erinnern daran, daß in (29, 30) alle von der geographischen Breite abhängigen Größen für die Breite des Ausgangspunktes  $P_0$  zu nehmen sind<sup>6</sup>.

Mit der Angabe der Formelpaare (29) und (30) ist die gestellte Aufgabe gelöst. Für die Gauß-Krügerschen Koordinaten lassen sich aber noch einfachere Formen derselben angeben.

Wir betrachten zunächst das Formelpaar (29). In diesem bringen wir den Koordinatenunterschied  $\Delta \varphi$  zum Verschwinden, indem wir den Anfangspunkt  $P_0$  am Grundmeridian solange verschieben, bis dessen Breite gerade gleich der des abzubildenden Punktes  $P$  ist. Mit  $\varphi = \varphi_0$  und daher  $\Delta \varphi = 0$  ergibt sich aus (29) unter Hinzufügung der Meridianbogenlänge in der ersten Formel

$$x = B + \frac{1}{2} N \cos^2 \varphi t \ell^2 + \frac{1}{24} N \cos^4 \varphi t (5 - t^2 + 9 \eta^2) \ell^4 \quad (31a)$$

$$y = N \cos \varphi \ell + \frac{1}{6} N \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) \ell^3 + \frac{1}{120} N \cos^5 \varphi (5 - 18 t^2 + t^4) \ell^5 \quad (31b)$$

Hierin beziehen sich nunmehr alle von der Breite abhängigen Größen auf die Breite des abzubildenden Punktes selbst<sup>7</sup>. Die Formeln (31) können auch aus der allgemeinen Entwicklung I., (42) - wir haben an dieser Stelle bereits darauf verwiesen - mit  $f(q) = B$  direkt gewonnen werden<sup>8</sup>.

Auch das Formelpaar (30) läßt sich in ähnlicher Weise umformen. Wir denken uns am Ellipsoid die durch den Punkt  $P$  verlaufende Koordinatenlinie  $x = \text{const.}$  mit dem Grundmeridian zum Schnitt gebracht. Dieser Schnittpunkt  $P_1$  - der Fußpunkt der Ordinate von  $P$  - habe die Breite  $\varphi_1$ . Diese bezeichnen wir als die Fußpunktsbreite von  $P$ ; für Punkte außerhalb des Grundmeridians gilt immer  $|\varphi_1| > |\varphi|$ .

Nun denken wir uns den Ausgangspunkt  $P_0$  entlang des Grundmeridians solange verschoben, bis er nach  $P_1$  gelangt. Es ist dann

$$\varphi_0 = \varphi_1$$

und

$$x_1 = x_0 - x \quad \Delta x = x - x_0 = 0.$$

Damit geht (30) über in

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2N_1^2} t_1 (-1 - \eta_1^2) Y^2 + \frac{1}{24N_1^4} t_1 (5 + 3t_1^2 + 6\eta_1^2 - 6t_1^2\eta_1^2) Y^4 \quad (32a)$$

$$l = \frac{1}{N_1 \cos \varphi} Y + \frac{1}{6N_1^3 \cos \varphi} (-1 - 2t_1^2 - \eta_1^2) Y^3 + \frac{1}{120N_1^5 \cos \varphi} (5 + 28t_1^2 + 24t_1^4) Y^5. \quad (32b)$$

Hierin beziehen sich nun die von der Breite abhängigen Größen nicht mehr auf den Punkt P selbst, sondern auf dessen Fußpunkt  $P_1$ . Dieser ist gerade der Endpunkt des durch die Abszisse  $x$  gegebenen Meridianbogens; die Fußpunktsbreite  $\varphi$ , kann daher zufolge der Beziehung

$$\varphi = \varphi(B)$$

leicht, am besten aus einer Tafel der Meridianbogenlängen ermittelt werden<sup>9</sup>.

Die Formelpaare (29)(30) sind hinsichtlich des für die praktische Rechnung erforderlichen Arbeitsaufwandes nicht gleichwertig mit den Formelpaaren (31)(32). Die letzteren wird man wegen ihrer geringeren Gliederzahl immer dann verwenden, wenn es sich um die Transformation, d.h. um die Abbildung nur eines Punktes oder auch mehrerer, jedoch in sehr verschiedenen Breiten liegender Punkte handelt. Für jede Transformation sind hiebei die Koeffizienten neu zu berechnen.

Die Formeln (29)(30) werden trotz ihrer gegenüber (31)(32) viel größeren Gliederzahl dann mit Vorteil angewendet, wenn es sich um die Abbildung vieler Punkte handelt, die jedoch in einem der Breite nach beschränkten Gebiet liegen. Man wird in diesem Falle einen in mittlerer Breite des Umformungsgebietes liegenden Anfangspunkt  $P_0$  wählen und für diesen ein für allemal die Koeffizienten von (29)(30) berechnen; der Rechengang besteht hernach für den einzelnen Punkt nur mehr in der Bildung der Produkte  $\Delta\varphi^i l^k$  oder  $\Delta x^i Y^k$  und in der Multiplikation derselben mit den zugeordneten Koeffizienten. Weist das Umformungsgebiet eine Breitenausdehnung auf, für die die Konvergenz von (29)(30) nicht mehr hinreicht, so wird man mehrere Anfangspunkte  $P_{01}$ ,  $P_{02}$  u.s.w. in demselben wählen<sup>10</sup>.

Wir wollen aber ausdrücklich erklären, daß die Anwendung der Formeln (29)(30) - die meisten konformen Abbildungen müssen mit derartigen Formelsystemen berechnet werden - für die Gauß-Krügersche Abbildung nicht den einfachsten Rechengang ergibt. Dieser wird vielmehr dadurch erreicht, daß man für jede Transformation die einzelnen

Koeffizienten der Formeln (31) und (32) aus vorberechneten Tafeln entnimmt. Zu diesem Zweck tabelliert man die Koeffizienten von (31) mit der geographischen Breite des umzuformenden Punktes als Eingangswert<sup>11</sup>; für die Tabellierung der Koeffizienten von (32) wählt man zweckmäßig nicht die Fußpunktsbreite, sondern die Abszisse des umzuformenden Punktes als Argument. Der gesamte Rechenvorgang besteht dann in der Bildung der Potenzen des Längenunterschiedes oder der Ordinate und in der Multiplikation derselben mit den den Tafeln entnommenen Koeffizienten.

In den Tafeln des Teiles III. sind die Koeffizienten von (31) und (32) für das Besselsche und das Internationale Ellipsoid angegeben. Die Zahl der Glieder und deren Stellenzahl wurde dabei so gewählt, daß auch bei sehr großen Abständen ( $\ell = \pm 6^\circ$ ) des umzuformenden Punktes vom Grundmeridian die ebenen Koordinaten auf etwa  $\pm 0,001\text{m}$  erhalten werden.

Noch einfacher läßt sich der Rechenvorgang einer Koordinatentransformation gestalten, wenn man die gesuchten Koordinaten zwischen gegebenen Werten interpoliert. Zu diesem Zweck tabelliert man für runde, in Abständen von beispielsweise  $0,1^\circ$  aufeinanderfolgende Eingangswerte der geographischen Breite und des Längenunterschiedes die Gauß-Krügerschen Koordinaten  $x$  und  $y$  und interpoliert für einen beliebigen Eingangswert zwischen diesen. Für den umgekehrten Vorgang tabelliert man gleichfalls für runde, etwa in Abständen von 10 km aufeinanderfolgende Eingangswerte der Gauß-Krügerschen Koordinaten die zugehörige geographische Breite und den Längenunterschied.

Derartige Tafeln lassen sich natürlich für jede beliebige Abbildung berechnen<sup>12</sup>. Die Rechenarbeit wird damit auf ein Minimum reduziert, da alle zur Interpolation benötigten relativ kleinen Werte (erste und zweite Differenzen) in die Tafel aufgenommen und dieser direkt entnommen werden können. Die Argumentunterschiede für eine Interpolation werden durch das vorgegebene Tafelintervall ebenfalls in engen Grenzen gehalten, wodurch sich verhältnismäßig geringe Stellenzahlen für die einzelnen Faktoren eines Rechenganges ergeben. Da in den Interpolationsformeln für beide Koordinatenwerte die gleichen Funktionen der Argumentdifferenzen vorkommen, läßt sich die Berechnung eines Koordinatenpaares auf der Doppelrechenmaschine gleichzeitig ausführen.

In den Zahlentafeln des dritten Teiles sind derartige Interpolationstafeln für die Gauß-Krügerschen Koordinaten auf dem Besselschen Ellipsoid in einem für die österreichische Landesvermessung ausreichenden Umfang angegeben. Mit den gleichfalls mitgeteilten Übergangsformeln können diese Tafeln auch zur Berechnung der Gauß-Krügerschen Koordinaten am Internationalen Ellipsoid verwendet werden.

## c. Meridiankonvergenz und Abbildungsmaßstab,

Wir gehen von einem Anfangspunkt  $P_0$  aus und berechnen zunächst die Meridiankonvergenz in einem Punkt  $P$ . Indem wir die für die Gauß-Krügerschen Koordinaten berechneten Koeffizienten  $a_n, b_n$  (28) in die allgemeinen Formeln I., (83) eintragen und uns deren Entwicklung bis zu den fünften Potenzen der Koordinatenunterschiede weitergeführt denken, erhalten wir<sup>13</sup>

$$\begin{aligned} \gamma &= \cos \varphi_0 \ell + \cos \varphi_0 \Delta \varphi \ell + \frac{1}{2} \cos \varphi_0 t_0 (-1) \Delta \varphi^2 \ell \\ &+ \frac{1}{3} \cos^3 \varphi_0 t_0 (1 + 3\eta_0^2 + 2\eta_0^4) \ell^3 + \frac{1}{6} \cos \varphi_0 (-1) \Delta \varphi^3 \ell \\ &+ \frac{1}{3} \cos^3 \varphi_0 (1 - 2t_0^2 + 3\eta_0^2 - 12t_0^2 \eta_0^2) \Delta \varphi \ell^3 + \frac{1}{24} \cos \varphi_0 t_0 \Delta \varphi^4 \ell \\ &+ \frac{1}{6} \cos^3 \varphi_0 t_0 (-7 + 2t_0^2) \Delta \varphi^2 \ell^3 + \frac{1}{15} \cos^5 \varphi_0 t_0 (2 - t_0^2) \ell^5 \end{aligned} \quad (33a)$$

und

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{N_0} t_0 \gamma + \frac{1}{N_0^2} (1 + t_0^2 + \eta_0^2) \Delta x \gamma + \frac{1}{N_0^3} t_0 (1 + t_0^2 - \eta_0^2 - 2\eta_0^4) \Delta x^2 \gamma \\ &+ \frac{1}{3N_0^3} t_0 (-1 - t_0^2 + \eta_0^2 + 2\eta_0^4) \gamma^3 + \frac{1}{3N_0^4} (1 + 4t_0^2 + 3t_0^4 + 2t_0^2 \eta_0^2) \Delta x^3 \gamma \\ &+ \frac{1}{3N_0^4} (-1 - 4t_0^2 - 3t_0^4 - 2t_0^2 \eta_0^2) \Delta x \gamma^3 + \frac{1}{3N_0^5} t_0 (2 + 5t_0^2 + 3t_0^4) \Delta x^4 \gamma \\ &+ \frac{2}{3N_0^5} t_0 (-2 - 5t_0^2 - 3t_0^4) \Delta x^2 \gamma^3 + \frac{1}{15N_0^5} t_0 (2 + 5t_0^2 + 3t_0^4) \gamma^5 \end{aligned} \quad (33b)$$

Wie wir wissen, beziehen sich hierin alle von der Breite abhängigen Größen auf die Breite des Anfangs- oder Nullpunktes  $P_0$ , den wir uns am Grundmeridian in der Nähe des betrachteten Punktes  $P$  angenommen denken.

Ebenso wie dies früher gezeigt wurde, läßt sich auch eine andere, einfachere Form dieser Ausdrücke angeben, wenn man in (33a) den Anfangspunkt  $P_0$  bis zum Parallelkreis durch  $P$  verschiebt, also  $\varphi_0 = \varphi$  und damit  $\Delta \varphi = 0$  setzt; in (33b) denkt man sich den Anfangspunkt in den Fußpunkt  $P_1$  der Ordinate von  $P$  verschoben und erreicht damit, daß  $\varphi_0 = \varphi$ , also  $x_1 = x_0 = x$  und  $\Delta x = 0$  wird. Es ergibt sich

$$\gamma = \cos \varphi t \ell + \frac{1}{3} \cos^3 \varphi t (1 + 3\eta^2 + 2\eta^4) \ell^3 + \frac{1}{15} \cos^5 \varphi t (2 - t^2) \ell^5 \quad (34a)$$

und

$$\gamma = \frac{1}{N_1} t_1 \gamma + \frac{1}{3N_1^3} t_1 (-1 - t_1^2 + \eta_1^2 + 2\eta_1^4) \gamma^3 + \frac{1}{15N_1^5} t_1 (2 + 5t_1^2 + 3t_1^4) \gamma^5. \quad (34b)$$

Wir betonen, daß die von der Breite abhängigen Größen in (34a) für die Breite des Punktes P selbst, in (34b) hingegen für die Fußpunktsbreite  $P_1$  von P zu nehmen sind.

In gleicher Weise erhalten wir die Ausdrücke zur Berechnung der Dichte der Gauß-Krügerschen Koordinatenlinien am Ellipsoid, d.h. also des Maßstabes der konformen Abbildung. Wir denken uns wieder die allgemeinen Entwicklungen I., (83) bis zu den fünften Potenzen der Koordinatenunterschiede weitergeführt und hierin die Koeffizienten  $a_n, b_n$  (28) eingetragen. Damit ergibt sich<sup>14</sup>

$$\begin{aligned}
 m = 1 + & \frac{1}{2} \cos^2 \varphi_0 (1 + \eta_0^2) l^2 + \cos^2 \varphi_0 t_0 (-1 - 2\eta_0^2) \Delta \varphi l^2 \\
 & + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi_0 (-1 + t_0^2 - 2\eta_0^2 + 6t_0^2 \eta_0^2) \Delta \varphi^2 l^2 \\
 & + \frac{1}{24} \cos^4 \varphi_0 (5 - 4t_0^2 + 14\eta_0^2 - 28t_0^2 \eta_0^2) l^4 \\
 & + \frac{2}{3} \cos^2 \varphi_0 t_0 \Delta \varphi^3 l^2 + \frac{1}{6} \cos^4 \varphi_0 t_0 (-7 + 2t_0^2) \Delta \varphi l^4 \quad (35a)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 m = 1 + & \frac{1}{2R_0^2} Y^2 + \frac{1}{R_0^2} t_0 (-2\eta_0^2 + \eta_0^4) \Delta x Y^2 \\
 & + \frac{1}{R_0^4} (-\eta_0^2 + t_0^2 \eta_0^2) \Delta x^2 Y^2 + \frac{1}{24R_0^4} (1 + 4\eta_0^2) Y^4. \quad (35b)
 \end{aligned}$$

Auch hierin beziehen sich, wie immer, die von der Breite abhängigen Größen zunächst auf den Anfangspunkt  $P_0$ ; indem wir uns diesen wie früher am Grundmeridian einmal bis in die Breite  $\varphi$  des betrachteten Punktes P, zum anderen Mal in die Fußpunktsbreite  $\varphi_1$  verschoben denken, wird in (35a) die Koordinatendifferenz  $\Delta \varphi$ , in (35b) die Koordinatendifferenz  $\Delta x$  zu Null und wir erhalten

$$m = 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi (1 + \eta^2) l^2 + \frac{1}{24} \cos^4 \varphi (5 - 4t^2 + 14\eta^2 - 28t^2 \eta^2) l^4 \quad (36a)$$

und

$$m = 1 + \frac{1}{2R_1^2} Y^2 + \frac{1}{24R_1^4} (1 + 4\eta_1^2) Y^4. \quad (36b)$$

Hinsichtlich der Anwendung der Formeln (33)-(36) gilt eben das, was wir für die Formeln (29)-(32) erwähnt haben; die einfachste Rechnung ergibt sich mit Hilfe von Tafeln, in denen die Koeffizienten von (34) und (36) mit den Eingangswerten  $\varphi$  (34a, 36a) und  $x(\varphi_1)$  (34b, 36b) tabelliert sind<sup>15</sup>.



## d. Richtungs- und Streckenreduktionen.

Als Richtungs- und Streckenreduktionen haben wir in I., 8. jene Größen erklärt, die für die Lösung der Hauptaufgaben den Übergang von den Elementen der ellipsoidischen Geometrie in jene der Bildebene vermitteln. In den Formeln I., (102) und I., (109) wurden allgemeine Ausdrücke für diese Reduktionen angegeben; es sollen diese nun für die Gauß-Krügersche Abbildung spezialisiert werden.

Wir gehen von der früher angegebenen Gleichung (36b) aus und schreiben diese - mit einer Vereinfachung des Koeffizienten von  $y^4$  - nochmals an. Es ist

$$m = 1 + \frac{1}{2R^2} Y^2 + \frac{1}{24R^4} Y^4 \quad \text{mit} \quad R = \sqrt{MN}. \quad (37)$$

Wir bilden nun aus (35b) die in I., (102, 109) angezeigten partiellen Ableitungen von  $m$ ; indem wir den Anfangspunkt  $P_0$  in die Fußpunktsbreite des betrachteten Punktes verschieben, d.h.  $\Delta x = 0$  setzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} m_x &= -\frac{2t\eta^2}{R^3} Y^2 & m_y &= \frac{1}{R^2} Y + \frac{1}{6R^4} Y^3 \\ m_{xx} &= 0 & m_{xy} &= -\frac{4t\eta^2}{R^3} Y & m_{yy} &= \frac{1}{R^2} + \frac{1}{2R^4} Y^2 \\ m_x^2 &= 0 & m_x m_y &= 0 & m_y^2 &= \frac{1}{R^4} Y^2. \end{aligned} \quad (38)$$

In diesen Ausdrücken sind stets jene Glieder weggelassen, die gemeinsam mit den Koordinatendifferenzen in den Formeln I., (102, 109) Glieder höherer als vierter Ordnung ergeben. Durch Anwendung des Binomischen Satzes auf die in reziproker Form angeschriebene Gleichung (37) bilden wir noch

$$\frac{1}{m} = 1 - \frac{1}{2R^2} Y^2 + \frac{5}{24R^4} Y^4 \quad (39)$$

und tragen sowohl (39) als auch (38) in die Formeln I., (102) ein. Es folgt<sup>16</sup>

$$\begin{aligned} \psi_{12} &= \left[ -\frac{1}{2R^2} Y_1 + \frac{1}{6R^4} Y_1^3 \right] \Delta X_{12} + \left[ -\frac{t\eta^2}{R^3} Y_1^2 \right] \Delta Y_{12} \\ &+ \left[ \frac{2}{3} \frac{t\eta^2}{R^3} Y_1 \right] \Delta X_{12}^2 + \left[ -\frac{1}{6R^2} + \frac{1}{4R^4} Y_1^2 \right] \Delta X \Delta Y_{12} \\ &+ \left[ -\frac{2}{3} \frac{t\eta^2}{R^3} Y_1 \right] \Delta Y_{12}^2 \end{aligned} \quad (40a)$$

und

$$\begin{aligned} \Psi_{21} = & \left[ \frac{1}{2R^2} Y_2 - \frac{1}{6R^4} Y_2^3 \right] \Delta X_{21} + \left[ \frac{t\eta^2}{R^3} Y_2^2 \right] \Delta Y_{21} \\ & + \left[ -\frac{4}{3} \frac{t\eta^2}{R^3} Y_2 \right] \Delta X_{21}^2 + \left[ \frac{1}{3R^2} - \frac{1}{4R^4} Y_2^2 \right] \Delta X \Delta Y_{21} \\ & + \left[ \frac{4}{3} \frac{t\eta^2}{R^3} Y_2 \right] \Delta Y_{21}^2. \end{aligned} \quad (40b)$$

Diese Formeln können, wie eine Abschätzung der einzelnen Glieder mit den üblichen Werten von  $y$ ,  $\Delta x$  und  $\Delta y$  zeigt, weitgehend vereinfacht werden; es genügen zur Berechnung der Richtungsreduktionen in der Regel die Ausdrücke

$$\Psi_{12}'' = \left[ -\frac{\rho''}{2R^2} Y_1 \right] \Delta X_{12} + \left[ -\frac{\rho''}{6R^2} \right] \Delta X \Delta Y_{12} \quad (41a)$$

$$\Psi_{21}'' = \left[ \frac{\rho''}{2R^2} Y_1 \right] \Delta X_{12} + \left[ \frac{\rho''}{3R^2} \right] \Delta X \Delta Y_{12}. \quad (41b)$$

Wir haben nun in den vorstehenden Ausdrücken schon die Umwandlungszahl  $\rho''$  hinzugefügt; es ergeben sich daher die Richtungsreduktionen in Sekunden. Weiter sei noch hinzugefügt, daß die von der Breite abhängigen Größen in (40,41) stets für die Fußpunktsbreite des ersten Punktes zu nehmen sind; die Koordinatendifferenzen sind im Sinne 12 zu bilden.

Für die Strecke  $P_1P_2$  ergeben sich daher - ausführlich angeschrieben - die Richtungsreduktionen in folgender Form:

1.) Nehmen wir  $P_1$  als ersten Punkt, so gilt

$$\begin{aligned} \Psi_{12}'' &= \left[ -\frac{\rho''}{2R^2} Y_1 \right] (X_2 - X_1) + \left[ -\frac{\rho''}{6R^2} \right] (X_2 - X_1)(Y_2 - Y_1) \\ \Psi_{21}'' &= \left[ \frac{\rho''}{2R^2} Y_1 \right] (X_2 - X_1) + \left[ \frac{\rho''}{3R^2} \right] (X_2 - X_1)(Y_2 - Y_1). \end{aligned} \quad (42)$$

Der mittlere Krümmungsradius  $R$  ist hierin für die Fußpunktsbreite von  $P_1$  zu nehmen.

2.) Nehmen wir hingegen  $P_2$  als ersten Punkt an, so ist

$$\begin{aligned} \Psi_{21}'' &= \left[ -\frac{\rho''}{2R^2} Y_2 \right] (X_1 - X_2) + \left[ -\frac{\rho''}{6R^2} \right] (X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) \\ \Psi_{12}'' &= \left[ \frac{\rho''}{2R^2} Y_2 \right] (X_1 - X_2) + \left[ \frac{\rho''}{3R^2} \right] (X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2). \end{aligned} \quad (43)$$

Der mittlere Krümmungsradius ist nunmehr für die Fußpunktsbreite von  $P_2$  zu nehmen.

Als weitere Vereinfachung können wir noch zulassen, daß der mittlere Krümmungsradius nicht für die Fußpunktsbreite, sondern für die Breite des Punktes selbst genommen wird; vielfach - besonders bei nur kurzen Strecken - genügt es

sogar, für ein größeres Gebiet einen Mittelwert desselben zu verwenden.

Die Richtungsreduktion ist stets am geodätischen Richtungswinkel der geodätischen Strecke anzubringen; es gilt

$$t_{12} = \tau_{12} + \psi_{12}$$

$$t_{21} = \tau_{21} + \psi_{21}$$

Mit Benützung der Ableitungen (38) und der allgemeinen Formel I., (109) können wir auch den Ausdruck für die Streckenreduktion in der Gauß-Krügerschen Abbildung angeben; es ist<sup>16</sup> (vergl. Fußnote auf Seite 32)

$$\begin{aligned} \bar{s} = \sigma \left\{ m + \frac{m_x}{2} \Delta x_{12} + \frac{m_y}{2} \Delta y_{12} + \left[ -\frac{m_x^2}{12m} + \frac{m_y^2}{24m} + \frac{m_{xx}}{6} \right] \Delta x_{12}^2 \right. \\ \left. + \left[ -\frac{m_x m_y}{4m} + \frac{m_{xy}}{3} \right] \Delta x \Delta y_{12} + \left[ \frac{m_x^2}{24m} - \frac{m_y^2}{12m} + \frac{m_{yy}}{6} \right] \Delta y_{12}^2 \dots \right\} \end{aligned} \quad (44a)$$

und

$$\begin{aligned} \sigma = \bar{s} \left\{ \frac{1}{m} - \frac{m_x}{2m^2} \Delta x_{12} - \frac{m_y}{2m^2} \Delta y_{12} + \left[ \frac{m_x^2}{3m^3} - \frac{m_y^2}{24m^3} - \frac{m_{xx}}{6m^2} \right] \Delta x_{12}^2 \right. \\ \left. + \left[ \frac{3m_x m_y}{4m^3} - \frac{m_{xy}}{3m^2} \right] \Delta x \Delta y_{12} + \left[ -\frac{m_x^2}{24m^3} + \frac{m_y^2}{3m^3} - \frac{m_{yy}}{6m^2} \right] \Delta y_{12}^2 \dots \right\} \end{aligned} \quad (44b)$$

Auch diese Ausdrücke können weitgehend vereinfacht werden; indem wir die einzelnen Glieder abschätzen erkennen wir, daß mit ausreichender Genauigkeit gilt

$$\bar{s} = \sigma \left\{ 1 + \frac{1}{2R^2} Y_1^2 + \frac{1}{24R^4} Y_1^4 + \left[ \frac{1}{2R^2} Y_1 \right] \Delta y_{12} + \left[ \frac{1}{6R^2} \right] \Delta y_{12}^2 \right\} \quad (45a)$$

und

$$\sigma = \bar{s} \left\{ 1 - \frac{1}{2R^2} Y_1^2 + \frac{5}{24R^4} Y_1^4 + \left[ -\frac{1}{2R^2} Y_1 \right] \Delta y_{12} + \left[ -\frac{1}{6R^2} \right] \Delta y_{12}^2 \right\} \quad (45b)$$

Zweckmäßig verwendet man diese Formeln in der Form

$$\bar{s} = m\sigma + d\sigma$$

$$\sigma = \frac{1}{m} \bar{s} - d\sigma$$

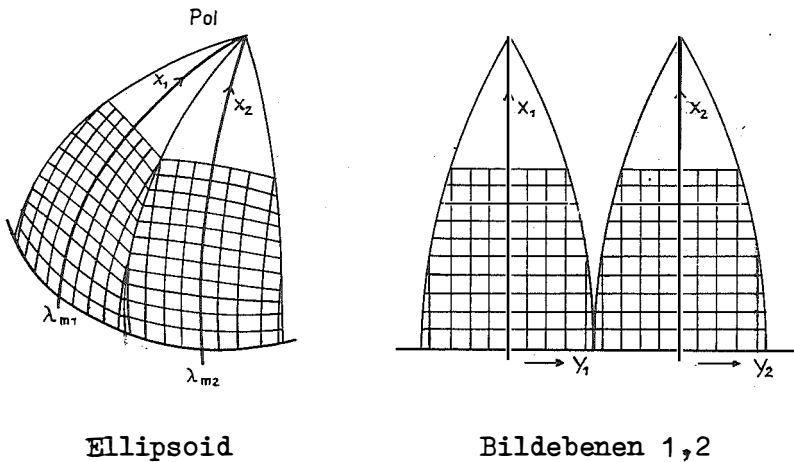
Die Bedeutung dieser Zuschläge ergibt sich durch eine Vergleichung mit (45); hinsichtlich der Ermittlung der Koeffizienten gelten dieselben Regeln wie bei der Berechnung der Richtungsreduktionen.

Die Formeln (40-45) können auch in etwas einfacherer Form mit Benützung einer mittleren Ordinate  $y_m = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$  angegeben werden; dies bietet für eine einzelne Richtung wohl Vorteile, nicht aber für mehrere von einem Punkt ausgehende Richtungen. Wir gehen daher nicht näher darauf ein und verweisen auf die Literatur<sup>17</sup>.

Zur Berechnung der Richtungs- und Streckenreduktionen in der Gauß-Krügerschen Abbildung geben wir im Teil III ausführliche Tafeln an, mit denen die Reduktionen - auch in extremen Fällen - ausreichend genau berechnet werden können.

#### e. Gauß-Krügersche Meridianstreifen.

Zur Abbildung des ganzen Rotationsellipsoids oder von Bereichen desselben, die größere Längenunterschiede überstreichen, wendet man die Gauß-Krügerschen Koordinaten und damit auch die Gauß-Krügersche Abbildung in Form der sogenannten Meridianstreifen an. Es wird die Oberfläche des Rotationsellipsoids durch geeignet gewählte, in gleichen Abständen aufeinanderfolgende Meridiane in Streifen von gleicher Längenausdehnung - die Meridianstreifen - unterteilt; der Mittelmeridian jedes einzelnen Streifens ist der Grundmeridian, also die Linie  $y = \ell = 0$  je eines Gauß-Krügerschen Systems. Man begrenzt die Meridianstreifen durch zwei Meridiane im Abstand von drei oder von sechs Längengraden und spricht von  $3^\circ$ -Streifen oder von  $6^\circ$ -Streifen. Die Grundmeridiane, auch als Anfangs-, Bezugs- oder Mittelmeridiane der Streifen bezeichnet, folgen im System der  $3^\circ$ -Streifen natürlich ebenfalls im Abstand von je drei Längengraden und ebenso bei  $6^\circ$ -Streifen im Abstand von sechs Längengraden aufeinander.



Ellipsoid

Bildebenen 1,2

Abb.4.

Jeder Meridianstreifen kann durch die Angabe der geographischen Länge seines Grundmeridians oder auch durch eine fortlaufende Nummer bezeichnet werden. Als Ursprung der Längenzählung dient meistens der Meridian von Greenwich; in seltenen Fällen (Österreich) der von Ferro. Im  $3^{\circ}$ -Meridianstreifensystem erhält der Streifen mit der Länge 0 des Mittelmeridians die Bezifferung 0, es ergibt sich also die Nummer des Streifens aus der durch drei dividierten Gradzahl der Länge seines Grundmeridians. Hievon abweichend werden die  $6^{\circ}$ -Streifen so angeordnet, daß die westliche Begrenzung des Meridianstreifens 1 durch den Meridian von Greenwich erfolgt. In diesem System erhält man die Nummer eines Meridianstreifens, indem man zur Gradzahl der Länge seines Grundmeridians die Zahl drei addiert und diese Summe durch sechs dividiert. Demnach überdeckt beispielsweise der Meridianstreifen 5 im  $3^{\circ}$ -System das Rotationsellipsoid zwischen den Meridianen  $13^{\circ}30'$  und  $16^{\circ}30'$ ; sein Grundmeridian hat die Länge  $15^{\circ}$ . Im  $6^{\circ}$ -System hingegen überdeckt der Meridianstreifen 5 das Ellipsoid zwischen den Meridianen  $24^{\circ}$  und  $30^{\circ}$ ; der Mittelmeridian hat die Länge  $27^{\circ}$ .

Zur Erleichterung der Rechnung in den Randgebieten der einzelnen Streifen läßt man in diesen die Meridianstreifen sich gegenseitig um je einen halben Längengrad überdecken, sodaß beiderseits des Grenzmeridians zwischen zwei aufeinanderfolgenden Meridianstreifen ein Gebiet von insgesamt einem Grad Längenausdehnung sowohl vom Netz des einen als auch von dem des anderen Meridianstreifens, also doppelt, überdeckt wird.

Durch die Angabe der Nummer des Meridianstreifens und der Gauß-Krügerschen Koordinaten in demselben kann nunmehr jeder Punkt des Rotationsellipsoids genau so festgelegt werden wie etwa durch die Angabe seiner geographischen Koordinaten; man vergleiche übrigens die Meridianstreifen mit den Zeitzonen!

Die Breite der Meridianstreifen entspricht den Erfordernissen der praktischen Geodäsie. Sie wurde mit dem  $3^{\circ}$ -System so festgelegt, daß auch in den Randgebieten eines Streifens für die elementaren Operationen (Triangulierungen niederster Ordnung, Winkelmeßzüge und Detailmessungen) die Übergänge von den Elementen der ellipsoidischen Geometrie in jene der Ebene meist bis auf den Abbildungsmaßstab unberücksichtigt bleiben oder durch einfachste Näherungen ersetzt werden können, ohne daß die dabei auftretenden Vernachlässigungen das Ergebnis in der Größenordnung der Messungsunsicherheiten beeinflussen. Geringere Anforderungen in dieser Hinsicht kann man an das  $6^{\circ}$ -System stellen; dieses wird vielfach für die Abbildung sehr weit ausgedehnter Gebiete und im militärischen Vermessungswesen

angewendet. Es sei noch erwähnt, daß auf der 9. Generalversammlung der Internationalen Union für Geodäsie und Geophysik (IUGG), Brüssel, 1951, die Einführung einer einheitlichen Abbildung für Europa diskutiert und dazu die Einführung von 6°-breiten Gauß-Krügerschen Meridianstreifen - international als U.T.M. (Uniforme Transversal Mercator) bezeichnet - vorgeschlagen wurde.

f. Die Transformation der Gauß-Krügerschen Koordinaten zweier benachbarter Systeme ineinander.

Wir denken uns am Rotationsellipsoid zwei Gauß-Krügersche Koordinatensysteme 1 und 2 mit den Grundmeridianen  $\lambda_{m1}$  und  $\lambda_{m2}$ ; ein Punkt P habe im System 1 die Koordinaten  $x_1, y_1$ ; im System 2 die Koordinaten  $x_2, y_2$ . Wir stellen die Frage, wie aus den gegebenen Koordinaten des Punktes im ersten System die Koordinaten desselben Punktes im zweiten System und umgekehrt abgeleitet werden können. Diese Aufgabe tritt immer dann auf, wenn für Punkte im Grenzgebiet zwischen zwei Meridianstreifen - in dem von diesen doppelt überdeckten Bereich - die auf beide Systeme bezogenen Koordinaten berechnet werden sollen.

Wir legen uns zunächst einige Bezeichnungen zurecht. Die Längen der Grundmeridiane der vorliegenden Systeme seien mit  $\lambda_{m1}$  und  $\lambda_{m2}$  bezeichnet; ein Punkt P im Grenzgebiet zwischen den beiden Meridianstreifen - der zu transformierende Punkt - habe die geographischen Koordinaten  $\varphi$  und  $\lambda$ . Die Längenunterschiede dieses Punktes gegen die beiden Grundmeridiane sind

$$l_1 = \lambda - \lambda_{m1} \qquad l_2 = \lambda - \lambda_{m2} \qquad (46)$$

Weiterhin wollen wir die Gauß-Krügerschen Koordinaten des betrachteten Punktes in den beiden Systemen mit  $x_1, y_1$  und  $x_2, y_2$  bezeichnen.

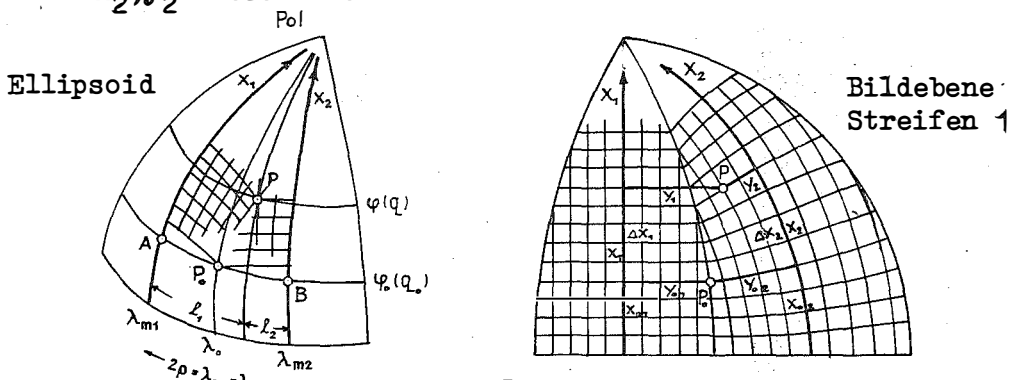


Abb. 5.

Der Mittelmeridian zwischen den beiden Grundmeridianen, also der Grenzmeridian zwischen den beiden Streifen hat die geographische Länge

$$\lambda_0 = \frac{1}{2} (\lambda_{m1} + \lambda_{m2}) \quad (47)$$

Auf diesem Grenzmeridian nehmen wir nun in der Nähe des Punktes P einen Ausgangspunkt  $P_0$  an; dieser hat - neben seiner geographischen Breite  $q_0$  - in den beiden Systemen die Gauß-Krügerschen Koordinaten  $x_{01}, y_{01}$  und  $x_{02}, y_{02}$ . Weiterhin denken wir uns noch den Parallelkreis durch  $P_0$  mit den beiden Grundmeridianen zum Schnitt gebracht; wir erhalten damit auf dem ersten Grundmeridian einen Punkt A, auf dem zweiten Grundmeridian einen Punkt B.

Nach diesen Vorbereitungen beginnen wir mit der eigentlichen Lösung der Aufgabe<sup>18</sup>. Wie bekannt, sind die Gauß-Krügerschen Koordinaten thermische Parameter des Ellipsoids; zwischen zwei verschiedenen Gauß-Krügerschen Systemen muß daher die Zuordnung der Parameter nach

$$x_2 + iy_2 = f(x_1 + iy_1) \quad (48)$$

bestehen. Die eingangs gestellte Aufgabe läuft offensichtlich auf die Bestimmung dieser Funktion hinaus.

Wir bilden für die Punkte P und  $P_0$  die komplexen Größen

$$\omega = q + i\lambda \quad \omega_0 = q_0 + i\lambda_0$$

$$Z_1 = x_1 + iy_1 \quad Z_{01} = x_{01} + iy_{01}$$

$$Z_2 = x_2 + iy_2 \quad Z_{02} = x_{02} + iy_{02}$$

und ebenso für die Anfangspunkte A und B

$$\omega_A = q_0 + i\lambda_{m1} \quad \omega_B = q_0 + i\lambda_{m2}$$

$$Z_A = x_{A1} \quad Z_B = x_{B2} = x_{A1} \quad (49)$$

Damit läßt sich die Entwicklung von (48) nach Taylor im Punkt  $P_0$  in der Form

$$Z_2 = Z_{02} + \frac{1}{1!} \left( \frac{dZ_2}{dZ_1} \right)_0 (Z_1 - Z_{01}) + \frac{1}{2!} \left( \frac{d^2 Z_2}{dZ_1^2} \right)_0 (Z_1 - Z_{01})^2 + \dots \quad (50)$$

anschreiben; die Funktion (48) wird innerhalb eines bestimmten Gebietes durch (50) ersetzt werden können, wenn man für diese die einzelnen Ableitungen

$$\left( \frac{d^n Z_2}{dZ_1^n} \right)_0$$

bilden kann.

Mit dem Anfangspunkt A gilt nun für die Gauß-Krügerschen Koordinaten des Punktes P

$$z_1 = z_A + a_1 (\Delta q + i l_1) + a_2 (\Delta q + i l_1)^2 + \dots \quad (51a)$$

Ebenso gilt für den Anfangspunkt B

$$z_2 = z_B + a_1 (\Delta q + i l_2) + a_2 (\Delta q + i l_2)^2 + \dots \quad (51b)$$

Da wir die beiden Punkte A und B auf demselben Parallelkreis angenommen haben, ist der isometrische Breitenunterschied zwischen dem Punkt P und den Punkten A und B derselbe; aus dem gleichen Grund sind die Koeffizienten  $a_n$  in beiden Gleichungen dieselben. Diese letzteren entnehmen wir aus (28a).

Weiterhin gilt, bezogen auf den Punkt A

$$\Delta q + i l_1 = b_1 (z_1 - z_A) + b_2 (z_1 - z_A)^2 + \dots \quad (51c)$$

Die Koeffizienten  $b_n$  dieser Entwicklung entnehmen wir aus (28b).

Wir berechnen nun die in (50) angezeigten Ableitungen. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{dz_2}{dz_1} &= \frac{dz_2}{d\omega} \frac{d\omega}{dz_1} \\ \frac{d^2 z_2}{dz_1^2} &= \frac{d^2 z_2}{d\omega^2} \left( \frac{d\omega}{dz_1} \right)^2 + \frac{dz_2}{d\omega} \frac{d^2 \omega}{dz_1^2} \end{aligned} \quad (52)$$

u. s. w.

Die Ableitungen rechter Hand können leicht gebildet werden; da

$$\omega = \omega_A + (\Delta q + i l_1) = \omega_B + (\Delta q + i l_2)$$

ist, finden wir für diese Ableitungen im Punkt  $P_0$  aus (51b) mit

$$\Delta q + i l_2 = \omega - \omega_B$$

$$\left( \frac{dz_2}{d\omega} \right)_0 = a_1 + 2a_2 (\omega_0 - \omega_B) + 3a_3 (\omega_0 - \omega_B)^2 + \dots$$

$$\left( \frac{d^2 z_2}{d\omega^2} \right)_0 = 2a_2 + 6a_3 (\omega_0 - \omega_B) + \dots \quad (53)$$

Und ebenso aus (51c)

$$\left( \frac{d\omega}{dz_1} \right)_0 = b_1 + 2b_2 (z_0 - z_A) + 3b_3 (z_0 - z_A)^2 + \dots$$

$$\left( \frac{d^2 \omega}{dz_1^2} \right)_0 = 2b_2 + 6b_3 (z_0 - z_A) + \dots \quad (54)$$

Weiterhin gilt für den Punkt  $P_0$  aus (51a)

$$z_0 - z_A = a_1 (\omega_0 - \omega_A) + a_2 (\omega_0 - \omega_A)^2 + \dots \quad (55)$$



Wir bilden noch den Längenunterschied zwischen den beiden Grundmeridianen; dieser ist

$$2\rho = \lambda_{m_2} - \lambda_{m_1} .$$

Damit ergibt sich

$$\omega_o - \omega_A = +ip$$

$$\omega_o - \omega_B = -ip . \quad (56)$$

Trägt man diese Ausdrücke in (53) und (55) ein, weiterhin (55) in (54) und trägt man schließlich diese Ergebnisse in (52) ein, so ergeben sich daraus die gesuchten Ableitungen. Unter Einführung der Koeffizienten  $a_n$ ,  $b_n$  aus (28a) und (28b) geben wir dafür die endgültigen Ausdrücke an. Es ist

$$\begin{aligned} \left(\frac{dz_2}{dz_1}\right)_o &= 1 + i2 \cos \varphi_o t_o p + 2 \cos^2 \varphi_o (-t_o^2) p^2 \\ &\quad + i \frac{2}{3} \cos^3 \varphi_o t_o (1 - 2t_o^2 + 3\eta_o^2) p^3 + \frac{2}{3} \cos^4 \varphi_o (-2t_o^2 + t_o^4) p^4 \\ \left(\frac{d^2 z_2}{dz_1^2}\right)_o &= i \frac{2}{N_o} \cos \varphi_o (1 + \eta_o^2) p + \frac{6}{N_o} \cos^2 \varphi_o t_o (-1 - \eta_o^2) p^2 \\ &\quad + i \frac{1}{3N_o} \cos^3 \varphi_o (-1 - 31t_o^2) p^3 \\ \left(\frac{d^3 z_2}{dz_1^3}\right)_o &= i \frac{2}{N_o^2} \cos \varphi_o t_o (-1 - 5\eta_o^2) p + \frac{2}{N_o^2} \cos^2 \varphi_o (-3 + 4t_o^2) p^2 . \end{aligned} \quad (57)$$

Indem wir diese Differentialquotienten in (50) eintragen, erhalten wir bereits die Transformationsgleichungen. Mit  $\Delta x_1 = x_1 - x_{o1}$  und  $\Delta y_1 = y_1 - y_{o1}$  ergibt sich

$$\begin{aligned} x_2 = x_{o2} &+ [1 + 2 \cos^2 \varphi_o (-t_o^2) p^2 + \frac{2}{3} \cos^4 \varphi_o (-2t_o^2 + t_o^4) p^4] \Delta x_1 \\ &+ [(-2) \cos \varphi_o t_o p + \frac{2}{3} \cos^3 \varphi_o t_o (-1 + 2t_o^2 - 3\eta_o^2) p^3] \Delta y_1 \\ &+ \left[\frac{3}{N_o} \cos^2 \varphi_o t_o (-1 - \eta_o^2) p^2\right] (\Delta x_1^2 - \Delta y_1^2) \\ &+ \left[\frac{2}{N_o} \cos \varphi_o (-1 - \eta_o^2) p + \frac{1}{3N_o} \cos^3 \varphi_o (1 + 31t_o^2) p^3\right] \Delta x_1 \Delta y_1 \\ &+ \left[\frac{1}{3N_o^2} \cos^2 \varphi_o (-3 + 4t_o^2) p^2\right] (\Delta x_1^3 - 3 \Delta x_1 \Delta y_1^2) \\ &+ \left[\frac{1}{3N_o^2} \cos \varphi_o t_o (1 + 5\eta_o^2) p\right] (3 \Delta x_1^2 \Delta y_1 - \Delta y_1^3) \end{aligned} \quad (58a)$$

$$\begin{aligned} y_2 = y_{o2} &+ [2 \cos \varphi_o t_o p + \frac{2}{3} \cos^3 \varphi_o t_o (1 - 2t_o^2 + 3\eta_o^2) p^3] \Delta x_1 \\ &+ [1 + 2 \cos^2 \varphi_o (-t_o^2) p^2 + \frac{2}{3} \cos^4 \varphi_o (-2t_o^2 + t_o^4) p^4] \Delta y_1 \\ &+ \left[\frac{1}{N_o} \cos \varphi_o (1 + \eta_o^2) p + \frac{1}{6N_o} \cos^3 \varphi_o (-1 - 31t_o^2) p^3\right] (\Delta x_1^2 - \Delta y_1^2) \\ &+ \left[\frac{6}{N_o} \cos^2 \varphi_o t_o (-1 - \eta_o^2) p^2\right] \Delta x_1 \Delta y_1 + \left[\frac{1}{3N_o^2} \cos \varphi_o t_o (-1 - 5\eta_o^2) p\right] (\Delta x_1^3 - 3 \Delta x_1 \Delta y_1^2) \\ &+ \left[\frac{1}{3N_o^2} \cos^2 \varphi_o (3 - 4t_o^2) p^2\right] (3 \Delta x_1^2 \Delta y_1 - \Delta y_1^3) \end{aligned} \quad (58b)$$

Will man umgekehrt aus den im System 2 gegebenen Gauß-Krügerschen Koordinaten  $x_2y_2$  die auf das System 1 bezogenen Koordinaten errechnen, so ist im obigen Formelpaar lediglich überall der Index 2 durch den Index 1 und umgekehrt zu ersetzen; die Längendifferenz  $2p$  ist im Sinne 2,1 - also aus  $2p = \lambda_{m1} - \lambda_{m2}$  - zu bilden, d.h. sie ist mit dem umgekehrten Vorzeichen einzuführen.

In den Tafeln des III. Teiles geben wir Interpolationstafeln zur Transformation des Koordinaten eines Meridianstreifens in den benachbarten im  $3^0$ -Meridianstreifensystem für das Besselsche Ellipsoid an. Die ebenfalls mitgeteilte Übergangsformel ermöglicht die Benützung dieser Tafeln auch am Internationalen Ellipsoid; der Umfang des Tafelwerkes ist für den Gebrauch in der österreichischen Landesvermessung gewählt.

## 5. Die stereographische Abbildung des Ellipsoids.

Um die stereographische Abbildung des Ellipsoids zu erklären, müssen wir diese Abbildung zunächst für die Kugel definieren. Dazu denken wir uns in einem Punkt  $P_0$  der Kugel die Tangentialebene und projizieren auf diese die Kugel von einem Punkt, der auf der Kugel dem Berührungspunkt  $P_0$  der Tangentialebene diametral gegenüberliegt. Die so entstehende, durch eine geometrische Projektion erklärte Abbildung der Kugel zeigt zwei bemerkenswerte Eigenschaften: Sie ist, wie sich leicht nachweisen läßt, einerseits konform oder winkeltreu, andererseits ist sie kreistreu, d.h. die Kreise auf der Kugel gehen in Kreise in der Bildebene über. Diese Abbildung war schon Hipparch (160 v. Chr.) bekannt; sie ist die einzige durch eine geometrische Projektion zustandekommende konforme Abbildung der Kugel.

Wendet man diese Definition auf das Ellipsoid an, so ist die damit erklärte Abbildung desselben nicht mehr konform. Eine konforme Abbildung des Ellipsoids in die Ebene, die ähnliche Eigenschaften aufweist wie die stereographische Abbildung der Kugel - ähnlich im Hinblick auf die Änderung des Abbildungsmaßstabes - definieren wir nach Gauß, Krüger und Roussilhe<sup>19</sup> als eine konforme Abbildung des Ellipsoids, die für den Fall  $a = b$ , also mit der Kugel als abzubildende Fläche, in die stereographische Abbildung der Kugel übergeht. Im besonderen können wir vereinbaren, daß in der stereographischen Abbildung des Ellipsoids der Grundmeridian, d.h. der Meridian durch den Hauptpunkt der Abbildung (im Falle der Kugel jener durch den Berührungspunkt der Tangentialebene) in gleicher Weise abgebildet

werde, wie dies bei der stereographischen Abbildung der Kugel der Fall ist (Roussilhe<sup>20</sup>).

Nach dieser Festsetzung können wir jene thermischen Parameter des Ellipsoids bestimmen, die durch ihre Identifizierung mit den ebenen cartesischen Koordinaten eine konforme Abbildung des Ellipsoids von der obigen Eigenschaft ergeben. Wir wählen einen Punkt  $P_0(\varphi_0, \lambda_0)$  des Rotationsellipsoids als Anfangspunkt und bezeichnen diesen als den Hauptpunkt der Abbildung; der durch diesen Punkt verlaufende Meridian, der Grundmeridian, soll nun ebenso abgebildet werden wie dies bei der stereographischen Abbildung der Kugel der Fall ist. Denken wir uns für einen Augenblick anstelle des Ellipsoids die Kugel, so gilt für diese

$$x = 2r \operatorname{tg} \frac{\Delta\varphi}{2} \quad (59)$$

oder, mit  $\Delta\varphi = \frac{\Delta B}{r}$

$$x = 2r \operatorname{tg} \frac{\Delta B}{2r} \quad (60)$$

In einem kleinen Bereich um den Hauptpunkt  $P_0$  kann anstelle der Tangente in (60) deren Entwicklung an der Stelle Null gesetzt werden; es ist

$$\operatorname{tg} \frac{\Delta B}{2r} = \frac{\Delta B}{2r} + \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta B}{2r}\right)^3 + \frac{2}{15} \left(\frac{\Delta B}{2r}\right)^5 + \dots$$

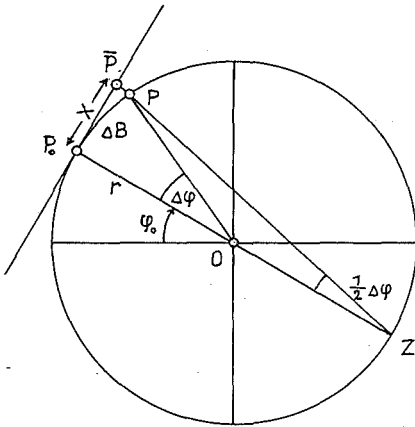


Abb. 6.

Die Eintragung dieses Ausdrucks in (60) ergibt das Abbildungsgesetz für den Hauptmeridian mit

$$x = \Delta B + \frac{1}{12r^2} \Delta B^3 + \frac{1}{120r^4} \Delta B^5 + \dots \quad (61)$$

Dies gilt, wie gesagt, für die Kugel; für das Ellipsoid setzen wir anstelle des Kugelradius den mittleren Krümmungsradius  $R_0 = \sqrt{M_0 N_0}$  im Hauptpunkt und erhalten - es ist  $\frac{1}{R_0^2} = \frac{1+\eta_0^2}{N_0^2}$  -

$$x = \Delta B + \frac{1}{12N_0^2} (1+\eta_0^2) \Delta B^3 + \frac{1}{120N_0^4} (1+2\eta_0^2+\eta_0^4) \Delta B^5 + \dots \quad (62)$$

Damit ist das für die stereographische Abbildung des Ellipsoids geltende Abbildungsgesetz des Hauptmeridians gefunden<sup>21</sup>. Alle Größen der rechten Seite dieses Ausdruckes sind Funktionen der geographischen und damit der isometrischen Breite; die vorstehende Gleichung stellt demnach den Zusammenhang des thermischen stereographischen Parameters  $x$  mit der isometrischen Breite  $q$  dar und definiert die analytische Funktion

$$x + iy = f(q + i\ell)$$

entlang des Grundmeridians, der Parameterkurve  $\ell = y = 0$ . Die Funktion ist damit vollständig definiert.

Wir bilden nun - um die Koeffizienten  $a_n$  in den Gleichungen I., (59) zu erhalten - die Ableitungen von  $x$  nach  $q$  im Punkt  $P_0$ . Es ist

$$a_1 = \frac{1}{1!} \left( \frac{dx}{dq} \right)_0 = \frac{1}{1!} \frac{d}{dq} (\Delta B + \frac{1+\eta^2}{12N^2} \Delta B^3 + \dots)$$

u. s. w.

Indem wir die hierin angezeigten Ableitungen bilden, erhalten wir  $a_1$ ; die weiteren Ableitungen nach  $q$  geben nach Beifügung der konstanten Vorzeichen der Ableitungen die einzelnen Koeffizienten  $a_n$ . Wir nehmen diese für den Punkt  $P_0$ , d. h. wir beziehen alle von der geographischen Breite abhängigen Größen auf die Breite dieses Punktes und setzen die Meridianbogenlänge  $\Delta B$  gleich Null. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{1!} N_0 \cos \varphi_0 \\ a_2 &= \frac{1}{2!} N_0 \cos^2 \varphi_0 t_0 (-1) \\ a_3 &= \frac{1}{3!} N_0 \cos^3 \varphi_0 \left( -\frac{1}{2} + t_0^2 - \frac{1}{2} \eta_0^2 \right) \\ a_4 &= \frac{1}{4!} N_0 \cos^4 \varphi_0 t_0 (2 - t_0^2 + 6\eta_0^2) \\ a_5 &= \frac{1}{5!} N_0 \cos^5 \varphi_0 \left( 1 - 5 \frac{1}{2} t_0^2 + t_0^4 \right) \end{aligned} \quad (63)$$

Die Koeffizienten  $b_n$  erhalten wir nach I., (56); wir können sie aber auch aus den Koeffizienten  $a_n$  nach I., (51) oder auch aus den Ableitungen  $\frac{d^n x}{dq^n}$  nach I., (50) berechnen. Es ist

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{1!} \frac{1}{N_0 \cos \varphi_0} \\ b_2 &= \frac{1}{2!} \frac{1}{N_0^2 \cos \varphi_0} t_0 \\ b_3 &= \frac{1}{3!} \frac{1}{N_0^3 \cos \varphi_0} \left( \frac{1}{2} + 2t_0^2 + \frac{1}{2} \eta_0^2 \right) \\ b_4 &= \frac{1}{4!} \frac{1}{N_0^4 \cos \varphi_0} t_0 (3 + 6t_0^2 - \eta_0^2) \\ b_5 &= \frac{1}{5!} \frac{1}{N_0^5 \cos \varphi_0} \left( \frac{3}{2} + 18t_0^2 + 24t_0^4 \right) \end{aligned} \quad (64)$$

Aus den allgemeinen Formeln I., (59) und I., (60) folgen durch Eintragung von (63) und (64) in diese die Transformationsgleichungen zwischen den geographischen und den stereographischen Parametern sowie deren Umkehrung. Diese Gleichungen sind, wie wir wissen, die Abbildungsgleichungen.

Die stereographischen Koordinaten  $x, y$  eines Punktes  $P$  - diesem kommen gegen den Hauptpunkt  $P_0$  die Koordinatenunterschiede  $\Delta\varphi, \ell$  der geographischen Koordinaten zu - erhalten wir aus

$$\begin{aligned}
 x = & N_0(1 - \eta_0^2 + \eta_0^4 - \eta_0^6) \Delta\varphi + \frac{1}{2} N_0 t_0 (3\eta_0^2 - 6\eta_0^4) \Delta\varphi^2 + \frac{1}{2} N_0 \cos^2 \varphi_0 t_0^2 \ell^2 \\
 & + \frac{1}{12} N_0 (1 + 4\eta_0^2 - 6t_0^2 \eta_0^2 - 9\eta_0^4 + 42t_0^2 \eta_0^4) \Delta\varphi^3 + \frac{1}{12} N_0 \cos^2 \varphi_0 (3 - 6t_0^2 + 5t_0^2 \eta_0^2 - 6t_0^2 \eta_0^4) \Delta\varphi \ell^2 \\
 & + \frac{1}{24} N_0 t_0 (-3\eta_0^2) \Delta\varphi^4 + \frac{1}{24} N_0 \cos^2 \varphi_0 t_0 (-9 - 6\eta_0^2 - 18t_0^2 \eta_0^2) \Delta\varphi^2 \ell^2 \\
 & + \frac{1}{24} N_0 \cos^4 \varphi_0 t_0 (2 - t_0^2 + 6\eta_0^2) \ell^4 + \frac{1}{240} 2N_0 \Delta\varphi^5 + \frac{1}{240} N_0 \cos^2 \varphi_0 (-10 - 10t_0^2) \Delta\varphi^3 \ell^2 \\
 & + \frac{1}{240} N_0 \cos^4 \varphi_0 (10 - 55t_0^2 + 10t_0^4) \Delta\varphi \ell^4 \quad (65a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y = & N_0 \cos \varphi_0 \ell + \frac{1}{2} N_0 \cos \varphi_0 t_0 (-2 + 2\eta_0^2 - 2\eta_0^4) \Delta\varphi \ell \\
 & + \frac{1}{12} N_0 \cos \varphi_0 (-3 + 3\eta_0^2 - 18t_0^2 \eta_0^2 - 3\eta_0^4 + 36t_0^2 \eta_0^4) \Delta\varphi^2 \ell + \frac{1}{12} N_0 \cos^3 \varphi_0 (1 - 2t_0^2 + \eta_0^2) \ell^3 \\
 & + \frac{1}{24} N_0 \cos \varphi_0 t_0 (-2 - 10\eta_0^2 + 12t_0^2 \eta_0^2) \Delta\varphi^3 \ell + \frac{1}{24} N_0 \cos^3 \varphi_0 t_0 (-8 + 4t_0^2 - 16\eta_0^2 - 4t_0^2 \eta_0^2) \Delta\varphi \ell^3 \quad (65b) \\
 & + \frac{1}{240} N_0 \cos \varphi_0 (-10) \Delta\varphi^4 \ell + \frac{1}{240} N_0 \cos^3 \varphi_0 (-20 + 70t_0^2) \Delta\varphi^2 \ell^3 + \frac{1}{240} N_0 \cos^5 \varphi_0 (2 - 11t_0^2 + 2t_0^4) \ell^5
 \end{aligned}$$

Aus den stereographischen Koordinaten  $x, y$  des Punktes  $P$  ergeben sich die Unterschiede seiner geographischen Koordinaten gegen den Hauptpunkt  $P_0$  mit

$$\begin{aligned}
 \Delta\varphi = & \frac{1}{N_0} (1 + \eta_0^2) X + \frac{1}{2} \frac{1}{N_0^2} t_0 (-3\eta_0^2 - 3\eta_0^4) X^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{N_0^2} t_0 (-1 - \eta_0^2) Y^2 \\
 & + \frac{1}{12} \frac{1}{N_0^3} (-1 - 8\eta_0^2 + 6t_0^2 \eta_0^2 - 13\eta_0^4 + 36t_0^2 \eta_0^4) X^3 + \frac{1}{12} \frac{1}{N_0^3} (-3 - 6t_0^2 - 6\eta_0^2 + 12t_0^2 \eta_0^2 - 3\eta_0^4 + 18t_0^2 \eta_0^4) XY^2 \\
 & + \frac{1}{24} \frac{1}{N_0^4} t_0 18\eta_0^2 X^4 + \frac{1}{24} \frac{1}{N_0^4} t_0 (-6 - 12t_0^2 + 48\eta_0^2 + 6t_0^2 \eta_0^2) X^2 Y^2 \\
 & + \frac{1}{24} \frac{1}{N_0^4} t_0 (3 + 3t_0^2 + 2\eta_0^2 - 6t_0^2 \eta_0^2) Y^4 + \frac{1}{240} \frac{1}{N_0^5} 3X^5 + \frac{1}{240} \frac{1}{N_0^5} (-90t_0^2 - 120t_0^4) X^3 Y^2 \\
 & + \frac{1}{240} \frac{1}{N_0^5} (15 + 90t_0^2 + 90t_0^4) XY^4 \quad (66a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \ell = & \frac{1}{N_0 \cos \varphi_0} Y + \frac{1}{2} \frac{1}{N_0^2 \cos \varphi_0} t_0 2XY + \frac{1}{12} \frac{1}{N_0^3 \cos \varphi_0} (3 + 2t_0^2 + 3\eta_0^2) X^2 Y \\
 & + \frac{1}{12} \frac{1}{N_0^3 \cos \varphi_0} (-1 - 4t_0^2 - \eta_0^2) Y^3 + \frac{1}{24} \frac{1}{N_0^4 \cos \varphi_0} t_0 (12 + 24t_0^2 - 4\eta_0^2) X^3 Y \\
 & + \frac{1}{24} \frac{1}{N_0^4 \cos \varphi_0} t_0 (-12 - 24t_0^2 + 4\eta_0^2) XY^3 + \frac{1}{240} \frac{1}{N_0^5 \cos \varphi_0} (15 + 180t_0^2 + 240t_0^4) X^4 Y \\
 & + \frac{1}{240} \frac{1}{N_0^5 \cos \varphi_0} (-30 - 360t_0^2 - 480t_0^4) X^2 Y^3 + \frac{1}{240} \frac{1}{N_0^5 \cos \varphi_0} (3 + 36t_0^2 + 48t_0^4) Y^5. \quad (66b)
 \end{aligned}$$

Auch in diesen Ausdrücken ist, wie stets, jeder von der Breite abhängige Koeffizient für die Breite des Anfangs- (Haupt-) Punktes  $P_0$  zu nehmen. Diesem kommen, wie üblich, die thermischen Parameterwerte  $x = 0$ ,  $y = 0$  zu; sein Bild ist also der Ursprung des ebenen Koordinatensystems.

Es ist nun noch die Meridiankonvergenz und der Ausdruck für die Dichte der Koordinatenlinien - der Abbildungsmaßstab im betrachteten Punkt - anzugeben. Wir benutzen zunächst die allgemeinen Formeln I., (82); in diese tragen wir die berechneten Werte von  $a_n$ ,  $b_n$  ein und erhalten<sup>22</sup>

$$\begin{aligned} \gamma = & \cos \varphi_0 t_0 l + \frac{1}{2} \cos \varphi_0 \Delta \varphi l + \frac{1}{12} \cos \varphi_0 t_0 (-15 \eta_0^2) \Delta \varphi^2 l \\ & + \frac{1}{12} \cos^3 \varphi_0 t_0 (1 + 9 \eta_0^2) l^3 + \frac{1}{24} \cos \varphi_0 \Delta \varphi^3 l \\ & + \frac{1}{24} \cos^3 \varphi_0 (1 - 2 t_0^2) \Delta \varphi l^3 \end{aligned} \quad (67a)$$

$$\begin{aligned} \gamma = & \frac{1}{N_0} t_0 y + \frac{1}{2 N_0^2} (1 + 2 t_0^2 + \eta_0^2) x y + \frac{1}{12 N_0^3} t_0 (9 + 12 t_0^2 - 15 \eta_0^2) x^2 y \\ & + \frac{1}{12 N_0^3} t_0 (-3 - 4 t_0^2 + 5 \eta_0^2) y^3 + \frac{1}{24 N_0^4} (3 + 24 t_0^2 + 24 t_0^4) x^3 y \\ & + \frac{1}{24 N_0^4} (-3 - 24 t_0^2 - 24 t_0^4) x y^3. \end{aligned} \quad (67b)$$

Aus der allgemeinen Formel I., (83a) berechnen wir nach Eintragung der Koeffizienten  $a_n$  die Dichte der Koordinatenlinien oder den Abbildungsmaßstab. Es ist - zunächst als Funktion der geographischen Koordinaten -

$$\begin{aligned} m = & 1 + \frac{1}{4} (1 - \eta_0^2 + \eta_0^4) \Delta \varphi^2 + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi_0 (1 + \eta_0^2) l^2 \\ & + \frac{1}{4} t_0 (3 \eta_0^2 - 6 \eta_0^4) \Delta \varphi^3 + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi_0 t_0 (-1 - 8 \eta_0^2) \Delta \varphi l^2 \\ & + \frac{1}{48} (2 + 8 \eta_0^2 - 12 t_0^2 \eta_0^2) \Delta \varphi^4 + \frac{1}{48} \cos^2 \varphi_0 (-48 \eta_0^2 + 222 t_0^2 \eta_0^2) \Delta \varphi^2 l^2 \\ & + \frac{1}{48} \cos^4 \varphi_0 (2 - t_0^2 + 12 \eta_0^2 - 49 t_0^2 \eta_0^2) l^4. \end{aligned} \quad (68a)$$

Tragen wir hingegen die Koeffizienten  $b_n$  in die allgemeine Formel I., (83b) ein, so ergibt sich der Abbildungsmaßstab aus den thermischen Parametern oder den ebenen Koordinaten mit

$$\begin{aligned} m = & 1 + \frac{1}{4 N_0^2} (1 + \eta_0^2) x^2 + \frac{1}{4 N_0^2} (1 + \eta_0^2) y^2 \\ & + \frac{1}{N_0^3} t_0 (-2 \eta_0^2 - 2 \eta_0^4) x y^2 \\ & + \frac{1}{N_0^4} (-\eta_0^2 + t_0^2 \eta_0^2) x^2 y^2 + \frac{1}{6 N_0^4} (\eta_0^2) y^4. \end{aligned} \quad (68b)$$

Dieser Ausdruck kann durch die Einführung des mittleren Krümmungsradius noch vereinfacht werden; mit

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{MN} = \frac{1+\eta^2}{N^2}$$

und

$$\frac{1}{N^2} = \frac{1}{R^2} (1 - \eta^2 + \eta^4 - \dots), \quad \frac{1}{N^3} = \frac{1}{R^3} \left(1 - \frac{3}{2}\eta^2 + \frac{15}{8}\eta^4 - \dots\right), \quad \frac{1}{N^4} = \frac{1}{R^4} (1 - 2\eta^2)$$

erhalten wir<sup>23</sup>

$$m = 1 + \frac{1}{4R_0^2} x^2 + \frac{1}{4R_0^2} y^2 + \frac{1}{R_0^3} \zeta_0 (-2\eta_0^2 + \eta_0^4) xy^2 + \frac{1}{R_0^4} (-\eta_0^2 + \zeta_0^2 \eta_0^2) x^2 y^2 + \frac{1}{6R_0^4} (\eta_0^2) y^4. \quad (68c)$$

Beschränken wir uns in (68b) auf die quadratischen Glieder, so läßt sich mit  $x^2 + y^2 = s^2$

$$m = 1 + \frac{1}{4R_0^2} s^2$$

anschreiben. Daraus folgt - mit der durch diese Vereinfachung bedingten Annäherung - daß die Orte konstanten Abbildungsmaßstabes in der Bildebene durch konzentrische Kreise dargestellt werden, deren Mittelpunkt im Ursprung des ebenen Koordinatensystems liegt. Oder, mit anderen Worten, im Rahmen der oben eingeführten Näherung wächst der Abbildungsmaßstab in der Bildebene in allen vom Ursprung ausgehenden Richtungen gleich. Bei der stereographischen Abbildung der Kugel ist dies, wie leicht bewiesen werden kann, in aller Strenge gültig.

Zufolge

$$m_x = \frac{1}{2R_0^2} x \dots$$

und

$$m_y = \frac{1}{2R_0^2} y \dots$$

besteht hinsichtlich der Änderung der Dichte der Koordinatenlinien die größtmögliche Ähnlichkeit des isothermen stereographischen Netzes am Ellipsoid mit einem ebenen cartesischen Netz nur im Hauptpunkt selbst und in dessen nächster Umgebung. Da die Dichte der Koordinatenlinien vom Hauptpunkt aus ungefähr gleichmäßig nach allen Richtungen hin zunimmt, wird sich die durch die Identifizierung der thermischen stereographischen Parameter des Ellipsoids mit den ebenen cartesischen Koordinaten entstehende konforme Abbildung am besten für solche Bereiche des Ellipsoids eignen, deren Begrenzung etwa durch einen geodätischen Kreis erfolgt, also für Bereiche, die keine ausgeprägte Erstreckung in einer bestimmten Richtung zeigen.

Um die für die praktische Anwendung der stereographischen Abbildung notwendigen Richtungs- und

Streckenreduktionen zu bestimmen, benützen wir die allgemeinen Formeln I., (102, 109). In diese tragen wir die aus (68) gebildeten partiellen Ableitungen  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_{xx}$ ,  $m_{xy}$ ,  $m_{yy}$  ein und erhalten für diese Reduktionen bei Weglassung der Glieder von nur geringem Einfluß die Ausdrücke

$$\Psi_{12} = \left[ -\frac{1}{4R_0^2} Y_1 \right] \Delta X_{12} + \left[ \frac{1}{4R_0^2} X_1 \right] \Delta Y_{12} \quad (69a)$$

$$\Psi_{21} = \left[ \frac{1}{4R_0^2} Y_1 \right] \Delta X_{12} + \left[ -\frac{1}{4R_0^2} X_1 \right] \Delta Y_{12} \quad (69b)$$

$$\bar{S} = \sigma \left\{ \left[ 1 + \frac{1}{4R_0^2} X_1^2 + \frac{1}{4R_0^2} Y_1^2 \right] + \left[ \frac{1}{4R_0^2} X_1 \right] \Delta X_{12} + \left[ \frac{1}{4R_0^2} Y_1 \right] \Delta Y_{12} \right. \\ \left. + \left[ \frac{1}{12R_0^2} \right] \Delta X_{12}^2 + \left[ \frac{1}{12R_0^2} \right] \Delta Y_{12}^2 \right\} \quad (70a)$$

$$\sigma = \bar{S} \left\{ \left[ 1 - \frac{1}{4R_0^2} X_1^2 - \frac{1}{4R_0^2} Y_1^2 \right] + \left[ -\frac{1}{4R_0^2} X_1 \right] \Delta X_{12} + \left[ -\frac{1}{4R_0^2} Y_1 \right] \Delta Y_{12} \right. \\ \left. + \left[ -\frac{1}{12R_0^2} \right] \Delta X_{12}^2 + \left[ -\frac{1}{12R_0^2} \right] \Delta Y_{12}^2 \right\} \quad (70b)$$

Abschließend erwähnen wir, daß eine stereographische Abbildung des Ellipsoids auch in zwei Schritten entwickelt werden kann. Man bildet dazu zunächst das Ellipsoid konform auf eine Kugel ab; daran schließt sich die stereographische Abbildung der Kugel in die Ebene. Dieser Abbildungsvorgang - er wird als konforme Doppelprojektion bezeichnet - wurde erstmals von Gauß angegeben in seiner Abhandlung "Auflösung der Aufgabe, die Teile einer gegebenen Fläche auf einer anderen so abzubilden, daß die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird". Von L. Krüger stammt eine Bearbeitung dieser Doppelprojektion unter dem Titel "Zur stereographischen Projektion"; man bezeichnet diese daher vielfach als Gauß-Krügersche stereographische Abbildung. Das Endergebnis wird naturgemäß davon beeinflusst, wie das Ellipsoid konform auf die Kugel abgebildet wird; da sich jedoch die Eigenschaften der durch eine Doppelprojektion bewirkten stereographischen Abbildung des Ellipsoids in keinem Falle wesentlich von jenen der von uns entwickelten direkten stereographischen Abbildung unterscheiden, gehen wir auf diese konformen Doppelprojektionen nicht näher ein<sup>24</sup>.



6. Die schiefachsige konforme Abbildung des Ellipsoids mit dem Sonderfall der querachsigen konformen Abbildung.

Die Grundlage der sogenannten schiefachsigen konformen Abbildungen des Ellipsoids bildet ein thermisches Parameterpaar  $s, s'$  des Ellipsoids, welches durch die Festsetzung bestimmt wird, daß der thermische Parameter  $s$  der Bogenlänge einer von einem Anfangspunkt  $P_0$  unter dem Azimut  $\alpha$  ausgehenden geodätischen Kurve gleichgesetzt wird. Identifiziert man diese thermischen Parameter mit ebenen cartesianischen Koordinaten, so wird die erwähnte geodätische Kurve in die  $x$ -Achse eines ebenen cartesianischen Koordinatensystems längentreu abgebildet. Zufolge der Winkeltreue schließt die  $x$ -Achse dieses ebenen Koordinatensystems im Ursprung desselben, also im Bildpunkt des Anfangspunktes  $P_0$ , mit der Bildkurve des Meridians in  $P_0$  den Winkel  $\alpha$  ein. Wir orientieren nunmehr das ebene Koordinatensystem so, daß die Richtung der positiven  $x$ -Achse mit der positiven Richtung des Meridianbildes im Ursprung übereinstimmt, d.h. wir verdrehen das ebene Koordinatensystem um den Winkel  $-\alpha$ . Dadurch wird die unter dem Azimut  $\alpha$  vom Anfangspunkt ausgehende geodätische Kurve nicht mehr in die  $x$ -Achse, sondern in eine unter dem Richtungswinkel  $\alpha$  durch den Ursprung verlaufende Gerade der Bildebene längentreu abgebildet.

Damit ist die schiefachsige konforme Abbildung des Ellipsoids vollkommen erklärt; wir verstehen unter diesem Begriff jene konforme Abbildung des Ellipsoids, für die die Nebenbedingung der längentreuen Abbildung einer beliebigen geodätischen Kurve in eine Gerade der Bildebene in der Weise besteht, daß - bezogen auf einen Anfangspunkt  $P_0$  - das Azimut der geodätischen Kurve mit dem ebenen Richtungswinkel der Bildgeraden übereinstimmt.

Einen Sonderfall dieser Abbildung haben wir bereits kennengelernt. Lassen wir nämlich das Azimut der längentreu abzubildenden geodätischen Kurve zu Null werden, so geht diese in den Meridian des Anfangspunktes über; die früher besprochene Gauß-Krügersche Abbildung ist also ein Sonderfall der schiefachsigen konformen Abbildung. Die letztere kann daher auch als Allgemeinfeld der Gauß-Krügerschen Abbildung bezeichnet werden. Einen zweiten Sonderfall erhalten wir für  $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ ; es ergibt sich damit die später zu besprechende querachsige konforme Abbildung.

Es soll nun jenes thermische Parameterpaar des Ellipsoids bestimmt werden, in welchem ein Parameter durch die Bogenlänge einer durch einen Anfangspunkt  $P_0$  unter dem vorgegebenen Azimut  $\alpha$  verlaufenden geodätischen Kurve definiert wird. Wir gehen von den isometrischen

Parametern  $q, \lambda$  des Ellipsoids aus und zählen diese als Koordinatenunterschiede  $\Delta q, \ell$  zum Anfangspunkt  $P_0$ . Indem wir die gesuchten thermischen Parameter mit  $s$  und  $s'$  bezeichnen, können wir anschreiben

$$s + is' = f(q + i\ell). \quad (71)$$

Diese Funktion entwickeln wir im Anfangspunkt  $P_0$  in die Taylorsche Reihe

$$s + is' = \frac{1}{1!} \frac{d(s+is')}{d(q+i\ell)} (\Delta q + i\ell) + \frac{1}{2!} \frac{d^2(s+is')}{d(q+i\ell)^2} (\Delta q + i\ell)^2 + \dots \quad (72)$$

Sind die hierin angezeigten Ableitungen bekannt, so können die thermischen Parameter  $s, s'$  innerhalb des Konvergenzbereichs von (72) bestimmt werden. Wir schreiben diese Potenzreihe noch in vereinfachter Form an; es ist

$$s + is' = A_1 (\Delta q + i\ell) + A_2 (\Delta q + i\ell)^2 + \dots \quad (73a)$$

Die Umkehrung dieser Reihe lautet

$$\Delta q + i\ell = B_1 (s + is') + B_2 (s + is')^2 + \dots \quad (73b)$$

Hierin ist ein Koeffizient  $B_n$  aus

$$B_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n(q+i\ell)}{d(s+is')^n} \quad (74)$$

bestimmt.

Wir wollen nun ein gleichfalls thermisches Parameterpaar  $x, y$  so einführen, daß in der ebenen Abbildung die längentreu abgebildete geodätische Kurve als Gerade durch den Ursprung mit dem ebenen Richtungswinkel  $\alpha$  erscheint. Dazu ist offenbar nur eine Verdrehung des ursprünglichen ebenen Koordinatensystems  $s, s'$  (Identifizierung der thermischen Parameter  $s, s'$  mit ebenen cartesianischen Koordinaten) um den Winkel  $-\alpha$  notwendig. Es gilt also<sup>25</sup>

$$x + iy = (s + is') e^{i\alpha} \quad (75a)$$

und

$$s + is' = (x + iy) e^{-i\alpha} \quad (75b)$$

Daraus folgt weiter

$$\begin{aligned} \frac{d(q+i\ell)}{d(x+iy)} &= \frac{d(q+i\ell)}{d(s+is')} \frac{d(s+is')}{d(x+iy)} = \frac{d(q+i\ell)}{d(s+is')} e^{-i\alpha} \\ &= \frac{d(q+i\ell)}{d(s+is')} (\cos \alpha - i \sin \alpha) \end{aligned} \quad (76)$$

und

$$\frac{d^n(q+i\ell)}{d(x+iy)^n} = \frac{d^n(q+i\ell)}{d(s+is')^n} (\cos \alpha - i \sin \alpha)^n \quad (77)$$

Unter Einführung der Parameter  $x, y$  gehen die Entwicklungen (73) über in

$$x + iy = a_1(\Delta q + i\ell) + a_2(\Delta q + i\ell)^2 + \dots \quad (78a)$$

$$\Delta q + i\ell = b_1(x + iy) + b_2(x + iy)^2 + \dots \quad (78b)$$

Zur Bestimmung der in den vorstehenden Potenzreihen bestehenden Koeffizienten gehen wir von den Koeffizienten  $b_n$  aus. Es ist

$$b_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n(q + i\ell)}{d(s + is')^n} (\cos \alpha - i \sin \alpha)^n. \quad (79)$$

Zur Bildung dieser Differentialquotienten erinnern wir daran, daß wir eine analytische Funktion in einer beliebigen Richtung differenzieren dürfen. Indem wir die Ableitung in der Richtung der geodätischen Kurve  $s$  nehmen, ist  $s' = 0$  und es gilt

$$\frac{d^n(q + i\ell)}{d(s + is')^n} = \frac{d^n q}{ds^n} + i \frac{d^n \ell}{ds^n}$$

Für die Bildung der Differentialquotienten  $\frac{d^n q}{ds^n}$  und  $\frac{d^n \ell}{ds^n}$  schreiben wir die Zusammenhänge zwischen dem Bogenelement  $ds$  einer Flächenkurve und den Elementen der Parameterkurven für das thermische Parameterpaar  $q, \ell$  an. Hat das Bogenelement in einem Punkt der Fläche das Azimut  $\alpha$ , so gilt nach I., (86) mit  $m = \frac{1}{N \cos \varphi}$

$$\frac{dq}{ds} = \frac{1}{N \cos \varphi} \cos \alpha \quad \frac{d\ell}{ds} = \frac{1}{N \cos \varphi} \sin \alpha \quad (80a, b)$$

Es ist also

$$\frac{d(q + i\ell)}{d(s + is')} = \frac{dq}{ds} + i \frac{d\ell}{ds} = \frac{1}{N \cos \varphi} (\cos \alpha + i \sin \alpha). \quad (81)$$

Bei der Bildung der weiteren Ableitungen haben wir zu beachten, daß wir diese längs einer geodätischen Kurve nehmen. Für diese gilt in einem orthogonalen System krummer Koordinatenlinien  $u, v$

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{2\sqrt{EG}} (E_v \frac{du}{ds} - G_u \frac{dv}{ds}) \quad (82a)$$

Mit  $u = q, v = \ell$ , weiter mit  $E = G = N^2 \cos^2 \varphi$  und  $\tau = \alpha$  nimmt die obige Differentialgleichung die Form

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{t}{N} \sin \alpha \quad (82b)$$

an. Damit können wir die weiteren Ableitungen von (81) bilden, es ist

$$\begin{aligned} \frac{d^2(q + i\ell)}{d(s + is')^2} &= \frac{1}{N^2 \cos^2 \varphi} t [\cos^2 \alpha + 2i \cos \alpha \sin \alpha - \sin^2 \alpha] \\ \frac{d^3(q + i\ell)}{d(s + is')^3} &= \frac{1}{N^3 \cos^3 \varphi} [(1 + 2t^2 + \eta^2) \cos^3 \alpha + i(2 + 6t^2 + 2\eta^2) \cos^2 \alpha \sin \alpha \\ &\quad + (1 - 6t^2 - \eta^2) \cos \alpha \sin^2 \alpha + i(-2t^2) \sin^3 \alpha] \end{aligned} \quad (83)$$

u. s. w.

Als letzten Schritt in der Berechnung der Koeffizienten  $b_n$  in (78b) multiplizieren wir jeweils eine Ableitung der Ordnungszahl  $n$  mit  $(\cos \alpha - i \sin \alpha)^n$  und dividieren durch  $n!$ . Wir erhalten bis zur 4. Ordnung<sup>26</sup>

$$\frac{1}{1!} \frac{d(q+il)}{d(x+iy)} = b_1 = \frac{1}{N \cos \varphi}$$

$$\frac{1}{2!} \frac{d^2(q+il)}{d(x+iy)^2} = b_2 = \frac{t}{2N^2 \cos \varphi}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3!} \frac{d^3(q+il)}{d(x+iy)^3} = b_3 = & \frac{1}{6N^3 \cos \varphi} \left[ (1+2t^2+\eta^2) \cos^6 \alpha + 2(1+3t^2+\eta^2) \sin^2 \alpha \cos^4 \alpha \right. \\ & \left. + (1+6t^2+\eta^2) \sin^4 \alpha \cos^2 \alpha + 2t^2 \sin^6 \alpha + i(-1-\eta^2) \sin \alpha \cos \alpha \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4!} \frac{d^4(q+il)}{d(x+iy)^4} = b_4 = & \frac{t}{24N^4 \cos \varphi} \left[ (5+6t^2+\eta^2-4\eta^4) \cos^8 \alpha + 4(4+6t^2+3\eta^2-\eta^4) \sin^2 \alpha \cos^6 \alpha \right. \\ & \left. + 2(9+18t^2+11\eta^2+2\eta^4) \sin^4 \alpha \cos^4 \alpha + 4(2+6t^2+3\eta^2+\eta^4) \sin^6 \alpha \cos^2 \alpha \right. \\ & \left. + (1+6t^2+\eta^2) \sin^8 \alpha + 4i \sin \alpha \cos \alpha (-1+\eta^2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + 2\eta^4 \cos^2 \alpha) \right]. \quad (84) \end{aligned}$$

Die Koeffizienten  $a_n$  finden wir durch die Umkehrung der Reihe (78b), wozu wir die Formeln I., (51) benützen; ebenso können wir aber auch die inversen Differentialquotienten nach I., (50) bilden und mit diesen die Koeffizienten  $a_n$  angeben<sup>27</sup>.

Mit den hier angedeuteten Entwicklungen können die Gebrauchsformeln einer schiefachsigen Abbildung gewonnen werden. Wir gehen jedoch auf die Entwicklung dieser recht umfangreichen Ausdrücke nicht ein, sondern betrachten einen Spezialfall dieser schiefachsigen Abbildung, nämlich jenen, für den das Azimut der längentreu abzubildenden geodätischen Kurve mit  $\pm \frac{\pi}{2}$  angenommen wird. Es ist dies die sogenannte querachsige konforme Abbildung. Für diese erhalten wir die Koeffizienten  $b_n$ , indem wir in (84)  $\cos \alpha = 0$ ,  $\sin \alpha = \pm 1$  setzen. Damit verschwindet in jedem Ausdruck (84) der imaginäre Teil, die Koeffizienten  $b_n$  werden zu reellen Größen. Dies muß so sein, da für  $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$  das von den thermischen Parametern  $x$  und  $y$  am Ellipsoid erzeugte isotherme Netz krummer Koordinatenlinien Symmetrie hinsichtlich der Ebene des Meridians  $l = 0$  aufweist. (I., 5.)

Für  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  entnehmen wir aus (84)

$$b_1 = \frac{1}{N \cos \varphi}$$

$$b_3 = \frac{1}{6N^3 \cos \varphi} (2t^2)$$

$$b_2 = \frac{1}{2N^2 \cos \varphi} t$$

$$b_4 = \frac{1}{24N^4 \cos \varphi} t (1+6t^2+\eta^2)$$

(85b)

und fügen noch hinzu<sup>28</sup>

$$b_5 = \frac{1}{120 N^5 \cos \varphi} (8t^2 + 24t^4).$$

Nach I., (50) oder I., (51) bilden wir

$$\begin{aligned} a_1 &= N \cos \varphi \\ a_2 &= \frac{1}{2} N \cos^2 \varphi t (-1) \\ a_3 &= \frac{1}{6} N \cos^3 \varphi (t^2) \\ a_4 &= \frac{1}{24} N \cos^4 \varphi t (-1 - t^2 - \eta^2) \\ a_5 &= \frac{1}{120} N \cos^5 \varphi (7t^2 + t^4). \end{aligned} \quad (85a)$$

Indem wir diese Ausdrücke in die allgemeinen Formeln I., (59,60) und I., (82,83) eintragen, erhalten wir das vollständige Formelsystem der querachsigen konformen Abbildung des Ellipsoids<sup>29</sup>. Es ist

$$\begin{aligned} x &= N_0 (1 - \eta_0^2 + \eta_0^4 - \eta_0^6) \Delta \varphi + \frac{1}{2} N_0 t (3\eta_0^2 - 6\eta_0^4 + 9\eta_0^6) \Delta \varphi^2 + \frac{1}{2} N_0 t \cos^2 \varphi l^2 \\ &+ \frac{1}{6} N_0 (1 + \eta_0^2 - 3t^2 \eta_0^2 - 3\eta_0^4 + 21t^2 \eta_0^4) \Delta \varphi^3 + \frac{1}{6} N_0 \cos^2 \varphi (-3t^2 + 3t^2 \eta_0^2 - 3t^2 \eta_0^4) \Delta \varphi l^2 \\ &+ \frac{1}{24} N_0 t (2\eta_0^2) \Delta \varphi^4 + \frac{1}{24} N_0 t \cos^2 \varphi (6 - 6\eta_0^2 - 18t^2 \eta_0^2) \Delta \varphi^2 l^2 + \frac{1}{24} N_0 t \cos^4 \varphi (-1 - t^2 - \eta_0^2) l^4 \\ &+ \frac{1}{24} N_0 \Delta \varphi^5 + \frac{1}{24} N_0 (-10t^2) \cos^2 \varphi \Delta \varphi^3 l^2 + \frac{1}{24} N_0 t \cos^4 \varphi (7t^2 + t^4) \Delta \varphi l^4 \end{aligned} \quad (86a)$$

$$\begin{aligned} y &= N_0 \cos \varphi l + N_0 \cos \varphi t (-1 + \eta_0^2 - \eta_0^4 + \eta_0^6) \Delta \varphi l \\ &+ \frac{1}{6} N_0 \cos \varphi (-9t^2 \eta_0^2 + 18t^2 \eta_0^4) \Delta \varphi^2 l + \frac{1}{6} N_0 \cos^3 \varphi (-t^2) l^3 \\ &+ \frac{1}{6} N_0 \cos \varphi t (-2 + \eta_0^2 + 3t^2 \eta_0^2) \Delta \varphi^3 l + \frac{1}{6} N_0 \cos^3 \varphi t (1 + t^2 - t^2 \eta_0^2) \Delta \varphi l^3 \\ &+ \frac{1}{2} N_0 \cos^3 \varphi (-t^2) \Delta \varphi^2 l^3 + \frac{1}{120} N_0 \cos^5 \varphi (7t^2 + t^4) l^5 \end{aligned} \quad (86b)$$

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \frac{1}{N_0} (1 + \eta_0^2) x + \frac{1}{2N_0^2} t (-3\eta_0^2 - 3\eta_0^4) x^2 + \frac{1}{2N_0^2} t (-1 - \eta_0^2) y^2 \\ &+ \frac{1}{6N_0^3} (-1 - 5\eta_0^2 + 3t^2 \eta_0^2 - 7\eta_0^4 + 18t^2 \eta_0^4) x^3 + \frac{1}{6N_0^3} (-3t^2 + 6t^2 \eta_0^2 + 9t^2 \eta_0^4) x y^2 \\ &+ \frac{1}{24N_0^4} t (28\eta_0^2) x^4 + \frac{1}{24N_0^4} t (-12t^2 + 18\eta_0^2 + 6t^2 \eta_0^2) x^2 y^2 \\ &+ \frac{1}{24N_0^4} t (1 + 3t^2 + 2\eta_0^2 - 6t^2 \eta_0^2) y^4 + \frac{1}{24N_0^5} (-2t^2 - 12t^4) x^3 y^2 \\ &+ \frac{1}{24N_0^5} (4t^2 + 9t^4) x y^4 + \frac{1}{24N_0^5} x^5 \end{aligned} \quad (87a)$$

$$\begin{aligned}
l = & \frac{1}{N_0 \cos \varphi} Y + \frac{1}{N_0^2 \cos \varphi} t_0 XY + \frac{1}{N_0^3 \cos \varphi} (t_0^2) X^2 Y + \frac{1}{3 N_0^3 \cos \varphi} (-t_0^2) Y^3 \\
& + \frac{1}{6 N_0^4 \cos \varphi} t_0 (1 + 6 t_0^2 + \eta_0^2) X^3 Y + \frac{1}{6 N_0^4 \cos \varphi} t_0 (-1 - 6 t_0^2 - \eta_0^2) X Y^3 \\
& + \frac{1}{15 N_0^5 \cos \varphi} (5 t_0^4 + 15 t_0^2) X^4 Y + \frac{1}{15 N_0^5 \cos \varphi} (-10 t_0^4 - 30 t_0^2) X^2 Y^3 + \frac{1}{15 N_0^5 \cos \varphi} (t_0^2 + 3 t_0^4) Y^5 \quad (87b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y = & \frac{1}{N_0} t_0 Y + \frac{1}{N_0^2} t_0^2 XY + \frac{1}{6 N_0^3} t_0 (3 + 6 t_0^2 + 3 \eta_0^2) X^2 Y + \frac{1}{6 N_0^3} t_0 (-1 - 2 t_0^2 - \eta_0^4) Y^3 \\
& + \frac{1}{3 N_0^4} (2 t_0^2 + 3 t_0^4 - 2 \eta_0^2 t_0^2) X^3 Y + \frac{1}{3 N_0^4} (-2 t_0^2 - 3 t_0^4 + 2 \eta_0^2 t_0^2) X Y^3 \quad (88a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y = & \cos \varphi t_0 l + \frac{1}{6} \cos \varphi t_0 (3 - 3 \eta_0^2 + 3 \eta_0^4) \Delta \varphi^2 l + \frac{1}{6} \cos^3 \varphi t_0 (-1 - \eta_0^2) l^3 \\
& + \frac{1}{6} \cos \varphi (-2 \eta_0^2 t_0^2) \Delta \varphi^3 l + \frac{1}{6} \cos^3 \varphi (3 t_0^2 + 8 \eta_0^2 t_0^2) \Delta \varphi l^3 \quad (88b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m = & 1 + \frac{1}{2 N_0^2} (1 + \eta_0^2 + \eta_0^6 + 4 t_0^2 \eta_0^6) X^2 + \frac{1}{3 N_0^3} t_0 (-2 \eta_0^2 - 2 \eta_0^4) X^3 \\
& + \frac{1}{24 N_0^4} (1 - 2 \eta_0^2 + 8 t_0^2 \eta_0^2) X^4 + \frac{1}{N_0^4} (-t_0^2 \eta_0^2) X^2 Y^2 \quad (89a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m = & 1 + \frac{1}{2} (1 - \eta_0^2 + \eta_0^4 + 4 t_0^2 \eta_0^6) \Delta \varphi^2 + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi t_0 \Delta \varphi l^2 + \frac{1}{6} t_0 (5 \eta_0^2 - 10 \eta_0^4) \Delta \varphi^3 \\
& + \frac{1}{24} (5 - 2 \eta_0^2 - 4 t_0^2 \eta_0^2) \Delta \varphi^4 + \frac{1}{24} \cos^2 \varphi (-12 t_0^2 - 12 t_0^2 \eta_0^2) \Delta \varphi^2 l^2 \\
& + \frac{1}{24} \cos^4 \varphi (3 t_0^2 + 6 \eta_0^2 t_0^2) l^4 \quad (89b)
\end{aligned}$$

Wie immer beziehen sich in den vorstehenden Formeln alle von der Breite abhängigen Größen auf die Breite des Anfangspunktes  $P_0$ .

Man wird die hier entwickelte querachsige konforme Abbildung mit Vorteil zur Abbildung von Bereichen des Rotationsellipsoids anwenden können, die sich mit nur geringer Nord-Südausdehnung in Richtung Ost-West erstrecken. Doch ist auch in dieser Richtung die Anwendungsmöglichkeit durch den Konvergenzbereich der angegebenen Potenzreihen beschränkt. Wie ein Vergleich zeigt, stimmen die Abbildungsgleichungen (86) bis zu den Gliedern 3. Ordnung einschließlich mit den Abbildungsgleichungen der konformen Kegelprojektion (22) überein. In der praktischen Anwendung bietet die Kegelprojektion mehr Vorteile als die querachsige Abbildung, da die Formelsysteme der letzteren für größere Bereiche zu vielfältig und damit auch zu unhandlich werden.

Wie wir uns leicht überzeugen können, gehen die in (84) mitgeteilten Koeffizienten  $b_n$  auch für  $\alpha = 0$  und  $\alpha = 180^\circ$  in reelle Größen über; wir erhalten damit die Koeffizienten  $b_n$  des zweiten Spezialfalls der schiefachsigen Koordinaten, nämlich die der Gauß-Krügerschen.

7. Die konforme Abbildung eines Rotationsellipsoids in ein anderes Rotationsellipsoid.

Wir widmen einige Bemerkungen dem Problem, ein Ellipsoid  $E$  konform in ein Ellipsoid  $\bar{E}$  abzubilden. Die allgemeine Lösung dieser Aufgabe ist nach I., 3. in

$$\bar{x} + i\bar{y} = f(x + iy)$$

enthalten, wenn wir unter  $x, y$  und  $\bar{x}, \bar{y}$  je ein Paar thermischer Parameter der Ellipsoide  $E$  und  $\bar{E}$  verstehen. Da wir meist von geographischen Koordinaten ausgehen und solche als Ergebnis zu erhalten wünschen, werden wir anstelle der beliebigen thermischen Parameterpaare  $x, y$  und  $\bar{x}, \bar{y}$  die mit den geographischen Koordinaten in einfacher Beziehung stehenden thermischen Parameter  $q, \ell$  einführen. Die allgemeine Abbildungsgleichung ist daher umzuschreiben in

$$\bar{q} + i\bar{\ell} = f(q + i\ell).$$

Die Wahl der Funktion  $f$  muß nun so getroffen werden, daß die im einzelnen Fall gestellten Forderungen entweder zur Gänze oder möglichst weitgehend erfüllt werden. Hiefür wollen wir zwei Beispiele anführen.

Es soll - als erster Fall - ein Bereich des Ellipsoids  $E$  um einen Punkt  $P_0$  in ein Ellipsoid  $\bar{E}$  so abgebildet werden, daß sich der Punkt  $P_0$  in einen vorgegebenen Punkt  $\bar{P}_0$  abbildet und daß die Azimute irgendwelcher, von Punkten im Bereich um  $P_0$  ausgehender geodätischer Strecken nach deren Abbildung in  $\bar{E}$  unverändert erhalten bleiben.

Diese Forderung bedingt, daß die Meridiane von  $E$  in Meridiane von  $\bar{E}$  abgebildet werden müssen. Zählen wir die Unterschiede der isometrischen Koordinaten  $\Delta q, \Delta \ell$  auf beiden Ellipsoiden von den Punkten  $P_0$  und  $\bar{P}_0$ , so wird durch die einfache Beziehung

$$\Delta \bar{q} + i\Delta \bar{\ell} = \Delta q + i\Delta \ell \quad (90)$$

bereits eine Abbildung mit der geforderten Eigenschaft vermittelt. Wir können sogar durch einen reellen Faktor  $k$  noch eine Maßstabsbedingung einführen, indem wir etwa verlangen, daß der Parallelkreis  $\varphi_0$  durch  $P_0$  längentreu in den Parallelkreis  $\bar{\varphi}_0$  durch  $\bar{P}_0$  abgebildet wird. Es muß also

$$\bar{\ell} \bar{N}_0 \cos \bar{\varphi}_0 = \ell N_0 \cos \varphi_0$$

sein, woraus

$$\bar{\ell} = \frac{N_0 \cos \varphi_0}{\bar{N}_0 \cos \bar{\varphi}_0} \ell = k \ell \quad (91)$$

und

$$\Delta \bar{q} + i \bar{l} = K(\Delta q + i l) \quad (92)$$

folgt.

Als zweiten Fall behandeln wir die Aufgabe, einen Bereich von  $\underline{E}$  so in  $\bar{E}$  abzubilden, daß eine geodätische Kurve, die auf  $\underline{E}$  von einem Punkt  $P_0$  in diesem Bereich unter dem Azimut  $\alpha$  ausgeht, längentreu in eine von einem Punkt  $\bar{P}_0$  des Ellipsoids  $\bar{E}$  unter dem Azimut  $\bar{\alpha}$  ausgehende geodätische Kurve abgebildet wird. Wir bedienen uns der thermischen Parameterpaare  $s, s'$  und  $\bar{s}, \bar{s}'$  der beiden Ellipsoide; diese Parameter definieren wir so, daß die thermischen Parameter  $s$  und  $\bar{s}$  den von  $P_0$  und  $\bar{P}_0$  aus gezählten Bogenlängen der beiden geodätischen Kurven in  $\underline{E}$  und  $\bar{E}$  entsprechen. Soll nun  $s$  längentreu in  $\bar{s}$  abgebildet werden, so muß die Abbildungsgleichung notwendigerweise in der einfachen Form

$$s + i s' = \bar{s} + i \bar{s}' \quad (93)$$

bestehen. Um zu einer praktisch brauchbaren Rechenformel zu kommen, wenden wir die Gleichung (73a) des vorherigen Abschnittes an und erhalten

$$A_1(\Delta q + i l) + A_2(\Delta q + i l)^2 + \dots = \bar{A}_1(\Delta \bar{q} + i \bar{l}) + \bar{A}_2(\Delta \bar{q} + i \bar{l})^2 + \dots \quad (94)$$

Aus diesem Ausdruck ist  $\Delta \bar{q}, \bar{l}$  und in weiterer Folge  $\Delta \bar{\varphi}, \bar{l}$  zu berechnen, womit die gestellte Aufgabe gelöst ist.

Soll ein Bereich  $B$  eines Ellipsoids  $\underline{E}$  konform in einen anderen Bereich  $\bar{B}$  desselben Ellipsoids abgebildet werden, so gelten genau dieselben Überlegungen, wie wir sie gerade vorhin für die beiden Ellipsoide  $\underline{E}$  und  $\bar{E}$  angestellt haben; anstelle des zweiten Ellipsoids  $\bar{E}$  tritt nunmehr  $\underline{E}$ .

Wir haben mit diesen wenigen Problemstellungen und den zunächst flüchtig angedeuteten Lösungen derselben ein Gebiet der praktischen Anwendung konformer Abbildungen berührt, welches unter den Begriffen "konforme Ellipsoidübergänge" und "konforme Abbildungen eines Ellipsoids in sich selbst" zusammengefaßt werden kann. Wir begegnen diesen Aufgaben dann, wenn ein auf einem Ellipsoid berechnetes Dreiecksnetz ohne Neuberechnung auf ein anderes Ellipsoid übertragen oder wenn die Lage und Orientierung eines Dreiecksnetzes - gegebenenfalls auch dessen Maßstab - auf einem Ellipsoid einer Änderung so unterworfen werden soll, daß zwischen dem Ur- und Abbild Ähnlichkeit in kleinsten Teilen besteht (konformer Ellipsoidübergang, konforme Anfelderung von Netzteilen, konforme Umorientierung eines Netzes). Vielfach werden auch diese beiden Operationen in eine einzige vereinigt.

Von den beiden vorstehend angedeuteten



Problemstellungen und deren Lösungen wollen wir in weiterer Folge wenigstens eine etwas näher ausführen. Wir wählen dazu die Abbildung des Ellipsoids  $E$  in  $\bar{E}$ , die nach (92) definiert wird als eine Abbildung, bei der die Azimute unverändert erhalten bleiben. Streng genommen bezieht sich die Erhaltung der Azimute allerdings nur auf die Azimute der Bildkurven der geodätischen Kurven von  $E$  in  $\bar{E}$ . Diese Bildkurven sind aber im allgemeinen nicht geodätische Kurven des Ellipsoids  $\bar{E}$ ; verbindet man die einzelnen Bildpunkte in  $\bar{E}$  durch geodätische Kurven, so sind daher deren Azimute um die (sehr geringfügigen) Beträge der entstehenden Richtungsreduktionen (Azimutreduktionen) verschieden von den Azimuten der geodätischen Strecken des Ellipsoids  $E$ .

Die Aufgabe kann in der Praxis zunächst in folgender Formulierung auftreten: Es sind im Bereich  $B$  des Ellipsoids  $E$  die Punkte  $P_{1-n}$  gegeben (Punkte eines Triangulationsnetzes  $N$ ); dieser Bereich ist konform in ein Ellipsoid  $\bar{E}$  so abzubilden, daß ein Punkt  $P_Z$  des Triangulationsnetzes  $N$  (etwa der Fundamentalpunkt) in den Punkt  $\bar{P}_Z$  des Ellipsoids  $\bar{E}$  abgebildet wird. Die Maßstabsbedingung wählen wir in der früher schon erwähnten einfachen Form so, daß wir verlangen, der Parallelkreis durch  $P_Z$  werde längentreu in den Parallelkreis von  $\bar{P}_Z$  abgebildet.

Hat der Fundamentalpunkt  $P_Z$  von  $N$  die geographischen Koordinaten  $\varphi_0, \lambda_0$ , so gilt für einen beliebigen Punkt  $P_i$  von  $N$

$$\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_0, \quad \Delta\lambda_i = \lambda_i - \lambda_0.$$

Ebenso gilt für das Ellipsoid  $\bar{E}$

$$\Delta\bar{\varphi}_i = \bar{\varphi}_i - \bar{\varphi}_0, \quad \Delta\bar{\lambda}_i = \bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_0,$$

wenn wir mit  $\bar{\varphi}_i, \bar{\lambda}_i$  die geographischen Koordinaten eines in  $\bar{E}$  abgebildeten Punktes  $P_i$  und mit  $\bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_0$  die geographischen Koordinaten des in  $\bar{E}$  abgebildeten Fundamentalpunktes bezeichnen.

Denken wir uns die Unterschiede der geographischen Koordinaten in solche der isothermen Koordinaten  $q, l$  verwandelt, so gilt nach (92)

$$\Delta\bar{q} + i\Delta\bar{l} = K(\Delta q + i\Delta l).$$

Um zu praktisch brauchbaren Rechenformeln zu gelangen, gehen wir auf geographische Koordinaten über und schreiben mit der Entwicklung I., (39) die vorstehende Formel nochmals an; gleichzeitig trennen wir Reelles vom Imaginären, woraus sich

$$\bar{c}_1 \Delta\bar{\varphi} + \bar{c}_2 \Delta\bar{\varphi}^2 + \dots = K(c_1 \Delta\varphi + c_2 \Delta\varphi^2 + \dots) \quad (95a)$$

und

$$\bar{l} = k l \quad (95b)$$

ergibt.

Indem wir die rechte Seite der Gleichung (95a) für den Augenblick einem Wert  $y$  gleichsetzen, kehren wir die Gleichung nach den Formeln I., (51) nach  $\Delta\bar{\varphi}$  um und erhalten

$$\Delta\bar{\varphi} = \frac{1}{\bar{c}_1} y - \frac{\bar{c}_2}{\bar{c}_1^3} y^2 + \dots$$

Rechter Hand ersetzen wir  $y$  wieder durch die rechte Gleichungseite (95a), woraus

$$\Delta\bar{\varphi} = K \frac{c_1}{\bar{c}_1} \Delta\varphi + \left[ K \frac{c_2}{\bar{c}_1} - K^2 \frac{\bar{c}_2}{\bar{c}_1^3} c_1^2 \right] \Delta\varphi^2 + \dots \quad (96)$$

folgt. Im Verein mit (95b) liegen damit die gesuchten Transformationsgleichungen für den Übergang von geographischen Koordinaten  $\varphi_i, \lambda_i$  in  $\bar{\varphi}_i, \bar{\lambda}_i$  vor; wir schreiben diese Gleichungen mit den aus I., (37) entnommenen Werten von  $c_i$  und  $\bar{c}_i$  nochmals an und erhalten nach einer einfachen Rechnung das endgültige Ergebnis

$$\Delta\bar{\varphi} = \frac{M_o}{M_o} \Delta\varphi + \frac{M_o}{2M_o} \left[ t_o (1+2\eta_o^2) - \bar{t}_o \frac{M_o}{M_o} (1+2\bar{\eta}_o) \right] \Delta\varphi^2 + \dots \quad (97a)$$

und

$$\bar{l} = \frac{N_o \cos \varphi_o}{\bar{N}_o \cos \bar{\varphi}_o} l \quad (97b)$$

Die vorstehend behandelte Aufgabe kann noch etwas anders formuliert werden und zwar so: Welche geographischen Koordinaten  $\bar{\varphi}_i, \bar{\lambda}_i$  erhalten die Punkte  $P_i$  des Netzes  $N$ , wenn der Fundamentalpunkt  $P_z$  um die Beträge  $d\varphi, dl$  verschoben und das Ellipsoid  $E$  in Form und Größe so geändert wird, daß seine große Halbachse  $a$  um den Betrag  $da$ , seine Abplattung  $u$  um den Betrag  $du$  geändert wird?

Es sei vorausgesetzt - praktisch ist dies immer der Fall - daß die Änderungen

$$d\varphi = \bar{\varphi}_z - \varphi_z \quad dl = \bar{\lambda}_z - \lambda_z$$

$$da = \bar{a} - a \quad du = \bar{u} - u$$

sehr klein seien. Es kann dann mit hinreichender Näherung jeder von  $\bar{\varphi}, \bar{a}$  und  $\bar{u}$  abhängige Ausdruck  $\bar{z}_o$  ersetzt werden durch

$$\bar{z}_o = z_o + \left( \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)_o d\varphi + \left( \frac{\partial z}{\partial a} \right)_o da + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \right)_o du. \quad (98)$$

Wir schreiben die Gleichungen (97) nochmals mit einer einfachen Bezeichnung ihrer Koeffizienten an. Es ist

$$\Delta\bar{\varphi} = A_{10} \Delta\varphi + A_{20} \Delta\varphi^2 + \dots \quad (99a)$$

$$\bar{l} = A_{01} l \quad (99b)$$

Indem wir alle quergestrichenen Werte in (97) an der Stelle der nichtgestrichenen Werte nehmen - die partiellen Ableitungen sind für die quergestrichenen Funktionen von  $\varphi, a$  und  $u$  auszuführen - erhalten wir

$$\bar{\varphi} = \varphi_0 + d\varphi + [A_{10} + \frac{\partial A_{10}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial A_{10}}{\partial a} da + \frac{\partial A_{10}}{\partial u} du] \Delta\varphi \quad (100a)$$

$$+ [A_{20} + \dots] \Delta\varphi^2$$

$$\bar{\lambda} = \lambda_0 + d\lambda + [A_{01} + \frac{\partial A_{01}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial A_{01}}{\partial a} da + \frac{\partial A_{01}}{\partial u} du] l \quad (100b)$$

Auf die etwas umständliche Ausrechnung der partiellen Ableitungen gehen wir nicht näher ein und beschränken uns auf das vorstehende allgemeine Ergebnis. Die Klammerausdrücke entsprechen gerade den Koeffizienten, die im Punkt  $\bar{P}_z$  für das Ellipsoid  $\bar{E}$  bestehen.

Mit den Gleichungen (100) ist der etwas anders formulierte konforme Ellipsoidübergang vollzogen. Wir können die Gleichungen (100) aber noch in anderer Weise benützen.

Es sei folgende Aufgabe gestellt: Auf einem Ellipsoid  $\bar{E}$  sei ein Triangulationsnetz  $\bar{N}$ , auf einem anderen Ellipsoid  $E$  in einem anschließenden Bereich ein Triangulationsnetz  $N$  gegeben. Eine Reihe von Punkten  $\bar{P}_i$  und  $P_i$  seien identische Punkte, d.h. sie sind beiden Triangulationsnetzen gemeinsam. Der Bereich des Triangulationsnetzes  $\bar{N}$  am Ellipsoid  $\bar{E}$  soll nun konform so in das Ellipsoid  $E$  abgebildet werden, daß die abgebildeten identischen Punkte möglichst gut mit den vorgegebenen Punkten  $\bar{P}_i$  übereinstimmen.

Wenn wir an der ursprünglich angenommenen konformen Abbildung (Erhaltung der Azimute) und an der Maßstabsbedingung festhalten, so liefert jedes identische Punktpaar  $P_i, \bar{P}_i$  ein Gleichungspaar (100), in dem die Verschiebungen  $d\varphi, d\lambda$  des Fundamentalpunktes  $P_z$  des Netzes  $N$  als Unbekannte auftreten. Die Größen  $da, du$  sind - da  $E$  vorgegeben ist - als bekannt vorauszusetzen.

Zufolge der den Punktkoordinaten durch die unvermeidlichen Unsicherheiten der Messungen innewohnenden Unsicherheit wird man aus verschiedenen Paaren von Koordinaten identischer Punkte verschiedene Verschiebungsgrößen bestimmen; wir können daher mehrere identische Punkte zu einer Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen heranziehen, d.h. wir bestimmen die Verschiebungsgrößen so, daß die an den identischen Punkten verbleibenden Klaffungen in ihrer Quadratsumme möglichst klein werden. Dazu setzen wir folgende Verbesserungsgleichungen an:

$$\bar{\varphi}_i + v_{\varphi_i} = \varphi_0 + d\varphi + [A_{10} + \frac{\partial A_{10}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial A_{10}}{\partial a} da + \frac{\partial A_{10}}{\partial u} du] \Delta\varphi \quad (101a)$$

$$+ [A_{20} + \dots] \Delta\varphi^2$$

$$\bar{\lambda}_i + v_{\lambda_i} = \lambda_o + d\lambda + [A_{o\lambda} + \frac{\partial A_{o\lambda}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial A_{o\lambda}}{\partial a} da + \frac{\partial A_{o\lambda}}{\partial \mu} d\mu] l \quad (101b)$$

u. s. w. Als Unbekannte, deren wahrscheinlichste Werte unter Einhaltung der Bedingung  $[vv] = \text{Min!}$  zu bestimmen sind, treten die Größen  $d\varphi$  und  $d\lambda$  auf; die Änderungen  $da, d\mu$  sind, da das Ellipsoid  $E$  vorgegeben ist, als bekannt vorauszusetzen. Nach entsprechender Ordnung der obigen Ausdrücke erhält man für jeden den beiden Netzen angehörenden Punkt ein Paar Verbesserungsgleichungen der allgemeinen Form

$$\begin{aligned} v_{\varphi_i} &= a_{\varphi_i} d\varphi & + l_{\varphi_i} \\ v_{\lambda_i} &= a_{\lambda_i} d\varphi + b_{\lambda_i} d\lambda & + l_{\lambda_i} \end{aligned} \quad (102)$$

Wir haben in diesen Verbesserungsgleichungen die allgemein übliche Art der Bezeichnung der Koeffizienten mit  $a, b$  und des Absolutgliedes mit  $l$  gewählt; in bekannter Weise folgen aus diesen die Normalgleichungen, deren Auflösung nach den Unbekannten  $d\varphi$  und  $d\lambda$  das gesuchte Ergebnis liefert. Drückt man die Verbesserungen nicht linear, sondern im Gradmaß aus, so wird man bei der Aufstellung der Verbesserungsgleichungen in jedem Gleichungspaar  $v_{\varphi_i}, v_{\lambda_i}$  die Gewichte  $1$  und  $\cos \varphi_i$  einführen.

Ein nur kleiner Schritt führt zur allgemeinsten Formulierung dieser Aufgabe. Wir denken uns in einem Dreiecksnetz eine Reihe von Punkten  $\bar{P}_i$  astronomisch bestimmt; das Netz sei durch die astronomische Bestimmung des Fundamentalpunktes und eines Azimuts auf einem Ellipsoid  $E$  vorläufig orientiert und berechnet. Die astronomisch bestimmten Punkte  $\bar{P}_i$  seien identisch mit den aus der geodätischen Bestimmung hervorgehenden Punkten  $P_i$ . Wir stellen die Frage, um welche Beträge  $d\varphi, d\lambda$  - bezogen auf den Fundamentalpunkt  $P_Z$  - das Netz zu verschieben ist und welche Größen- und Formänderung dem Ellipsoid  $E$  zu erteilen ist, um etwa die Differenzen (Lotabweichungskomponenten in Breite und Länge)

$$d\varphi_i = \bar{\varphi}_i - \varphi_i, \quad d\lambda_i = \bar{\lambda}_i - \lambda_i$$

in ihrer Quadratsumme möglichst klein zu machen. Die Lösung dieser Aufgabe ist in den Gleichungen (101) bereits enthalten; wir entnehmen aus ihnen Verbesserungsgleichungen der Form

$$\begin{aligned} d\varphi_i = v_{\varphi_i} &= a_{\varphi_i} d\varphi + c_{\varphi_i} da + d_{\varphi_i} d\mu + l_{\varphi_i} \\ d\lambda_i = v_{\lambda_i} &= a_{\lambda_i} d\varphi + b_{\lambda_i} d\lambda + c_{\lambda_i} da + d_{\lambda_i} d\mu + l_{\lambda_i} \end{aligned} \quad (103)$$

wozu wir, da die Lotabweichungskomponenten im Fundamentalpunkt mit einzubeziehen sind, als erstes Gleichungspaar noch die Identitäten

$$d\varphi_1 = v_{\varphi_1} = d\varphi$$

$$dl_1 = v_{l_1} = dl$$

hinzufügen.

Mit den beiden zuletzt erwähnten Problemstellungen haben wir - immer unter Beibehaltung der Forderung nach unveränderten Azimuten - die sogenannte konforme Anfelderung mit dem Ansatz der Verbesserungsgleichungen nach (102) und die Bestimmung eines bestanschließenden Ellipsoids mit konformer Übertragung, Ansatz nach (103), erwähnt. Als Grundlage diene, worauf wir mehrfach hingewiesen haben, die durch die Gleichung (92) definierte konforme Abbildung.

Es sind für die Lösung derartiger Aufgaben noch verschiedene Variationen im Ansatz möglich. Zum Beispiel kann außer der Verschiebung sowie der Änderung der Ellipsoidparameter noch eine auf den Fundamentalpunkt bezogene Verschwenkung, eine Maßstabsänderung neben weiteren Bedingungen der konformen Übertragung (etwa die möglichst längentreue Abbildung der Nahtstelle der beiden Netze) eingeführt werden. Alle diese Möglichkeiten im Einzelnen zu erwähnen ist im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht möglich<sup>30</sup>.

Als Abschluß dieses Abschnittes wollen wir noch einen relativ häufigen Fall einer konformen Anfelderung etwas näher ausführen, für den wir folgende Gegebenheiten annehmen: Zwei Triangulationsnetze  $N$  und  $\bar{N}$  berühren sich entlang der sogenannten "Naht" und haben in dieser die Punkte  $P_{1-n}$  und  $\bar{P}_{1-n}$  gemeinsam (identische Punkte). Das Netz  $N$  sei auf einem Ellipsoid  $E$  orientiert, berechnet und irgendwie konform abgebildet. Ebenso sei das Netz  $\bar{N}$  - jedoch auf einem anderen Ellipsoid  $\bar{E}$  - orientiert, berechnet und gleichfalls irgendwie konform abgebildet. Als Ergebnis erhält man jeweils für die Punkte des Netzes  $N$  die konformen Koordinaten  $x, y$ , für die Punkte des Netzes  $\bar{N}$  die konformen Koordinaten  $\bar{x}, \bar{y}$ ; für die Nahtpunkte, also für die identischen Punkte in beiden Netzen, ergeben sich jedoch stets zwei verschiedene Paare von Koordinatenwerten, nämlich  $x_{1-n}, y_{1-n}$  und  $\bar{x}_{1-n}, \bar{y}_{1-n}$ .

Wir stellen die Aufgabe, die Bereiche der Netze  $N$  und  $\bar{N}$  konform so ineinander abzubilden, daß in den identischen Punkten möglichst geringe Klaffungen zwischen den beiden Netzen entstehen. Im Gegensatz zu den früheren Problemstellungen sagen wir über die Art der konformen Abbildung nichts aus; diese ist nur durch die vorhin genannte Forderung bestimmt. Es sind also, einfach ausgedrückt, Transformationsformeln für eine konforme Transformation der Netzpunkte  $P$  in  $\bar{P}$  und umgekehrt aufzustellen.

Zunächst sei die Transformation der Netzpunkte  $P$  in  $\bar{P}$ , also die konforme Abbildung des Bereiches  $N$  in den Bereich  $\bar{N}$  vorausgesetzt; es muß, wie wir wissen,

$$\bar{x} + i\bar{y} = f(x + iy) \quad (104)$$

sein. Wir wählen im Bereich  $N$  einen geeigneten Anfangspunkt (z.B. in der Nähe der Mitte oder des Schwerpunkts der Nahtstelle) als rechnerischen Nullpunkt, für den wir zweckmäßig runde Koordinatenwerte  $x_0, y_0$  einführen. Die vorhin angeschriebene Funktion entwickeln wir in diesem Punkt in die Potenzreihe

$$\bar{x} + i\bar{y} = f(x_0 + iy_0) + a_1 (\Delta x + i\Delta y) + a_2 (\Delta x + i\Delta y)^2 + \dots \quad (105)$$

mit den noch unbestimmten komplexen Koeffizienten  $a_i$ . Hierin ist

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0.$$

Setzen wir (105) als konvergierend voraus, so wird durch diese Entwicklung bei entsprechender Gliederzahl die analytische Funktion (104) hinreichend angenähert darstellbar sein.

Dem Punkt  $x_0, y_0$  entspricht ein Punkt  $\bar{x}_0, \bar{y}_0$ ; für diesen gilt

$$\bar{x}_0 + i\bar{y}_0 = f(x_0 + iy_0).$$

Tragen wir diese Beziehung in (105) ein, so ergibt sich

$$\bar{x} + i\bar{y} = \bar{x}_0 + i\bar{y}_0 + a_1 (\Delta x + i\Delta y) + a_2 (\Delta x + i\Delta y)^2 + \dots \quad (106)$$

oder, in einfacherer Anschreibung,

$$\bar{z} = \bar{z}_0 + a_1 \Delta z + a_2 \Delta z^2 + \dots \quad (106a)$$

worin

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = \bar{x} + i\bar{y}, \quad \Delta z = \Delta x + i\Delta y$$

bedeutet.

In den vorstehenden Gleichungen (106) sind drei komplexe, d.h. sechs reelle Größen unbekannt. Da jeder identische Punkt eine Gleichung nach (106) liefert, die nach der Trennung des reellen und des imaginären Teils zwei reelle Gleichungen ergibt, müssen zumindest drei identische Punkte  $P_{1,2,3}$  gegeben sein, um aus (106) die Unbekannten

$$\bar{z}_0 = \bar{x}_0 + i\bar{y}_0, \quad a_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad a_2 = \alpha_2 + i\beta_2$$

zu berechnen. Oder, allgemeiner, mit  $n = k + 1$  vorgegebenen identischen Punkten können die Koeffizienten  $a_i$  der Potenzreihe (106) bis zur Ordnungszahl  $k$  und die Nullpunktskoordinaten im quergestrichenen System bestimmt werden.

Bricht man die Entwicklung (106) nach dem Gliede mit der Ordnungszahl eins ab, so erhält man die einfachste konforme Übertragung, die Drehstreckung. Dies ist leicht nachweisbar, da die komplexe Zahl  $a_1 = \alpha_1 + i\beta_1$  durch den mit einem reellen Maßstabsfaktor  $m$  multiplizierten Einheitsvektor  $\pi$  in der Richtung  $\varphi$  dargestellt werden kann; es ist nämlich

$$\alpha_1 = \alpha_1 + i\beta_1 = m e^{i\varphi} = m(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad (107)$$

Damit folgt aus (106)

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + m \Delta x \cos\varphi - m \Delta y \sin\varphi \quad (108a)$$

$$\bar{y} = \bar{y}_0 + m \Delta y \cos\varphi + m \Delta x \sin\varphi \quad (108b)$$

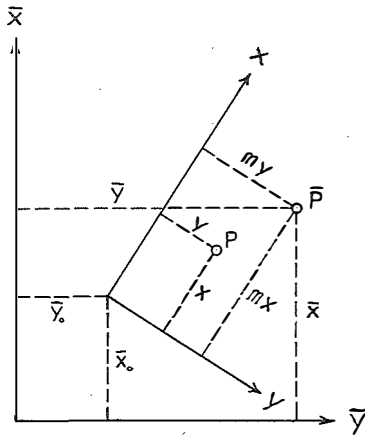


Abb.7.

Durch diese Gleichungen wird eine in der  $xy$ -Ebene vorgegebene Figur in die  $\bar{x}\bar{y}$ -Ebene so abgebildet, daß sie um die Beträge  $\bar{x}_0, \bar{y}_0$  verschoben, um den Winkel  $\alpha$  verdreht und um den Faktor  $m$  gestreckt erscheint; die konforme Abbildung durch eine Drehstreckung führt demnach nicht nur zur Ähnlichkeit in kleinsten Teilen, sondern zur Ähnlichkeit im Ganzen zwischen Ur- und Abbild (Ähnlichkeitstransformation).

Mit der vorstehend erklärten Drehstreckung wird die gestellte Aufgabe in der Regel nicht gelöst werden können, was schon aus der Überlegung hervorgeht, daß

unter den gegebenen Voraussetzungen die Geraden der  $xy$ -Ebene nicht in Gerade der  $\bar{x}\bar{y}$ -Ebene übergehen können. Denn die ersten sind die Bilder von Flächenkurven mit konstantem geodätischem Richtungswinkel in dem durch die thermischen Parameter  $x, y$  am Ellipsoid  $E$  definierten isothermen Netz krummer Koordinatenlinien; da aber - abgesehen von der Änderung der Bezugsfläche - in  $E$  ein anderes isothermes Netz vorausgesetzt ist, müssen diese Flächenkurven in Bezug auf das zweite Netz ihre charakteristische Eigenschaft verlieren.

Die an die Abbildung gestellte Forderung der möglichst klaffungsfreien Übertragung der Punkte  $P_{1-n}$  in die Punkte  $\bar{P}_{1-n}$  scheint umso besser erfüllbar zu sein, je mehr Glieder  $P_{1-n}$  in die Abbildungsgleichung (106) einführt. Eine nähere Überlegung zeigt jedoch, daß aus zweierlei Gründen der Anzahl der Glieder eine Grenze gesetzt ist, nämlich erstens aus Gründen, die in der praktischen Brauchbarkeit der Formeln liegen und zweitens deswegen, weil die gegebenen Koordinaten mit unregelmäßigen Fehlern behaftet sind. Bei einer völlig klaffungsfreien Abbildung würden die bestehenden Unsicherheiten in den Punktlagen gleichsam in die

Abbildung überlagern, wodurch der Nutzeffekt einer vielgliedrigen Formel recht zweifelhaft würde. Man beschränkt sich daher stets auf eine Gliederzahl, die eine noch einfach auszuführende Rechnung gewährleistet und nimmt verbleibende Klaffungen in der Größenordnung der Lageunsicherheit ohne weiteres in Kauf. Über die notwendige Gliederzahl kann keine eindeutige Aussage gemacht werden; diese hängt im Großen und Ganzen von drei Faktoren ab, nämlich

- 1.) von der Ausdehnung des Gebiets, in dem die Übertragung ausgeführt werden soll,
- 2.) von der Verschiedenheit der beiden isothermen Netze im Übertragungsgebiet, in der Regel also hauptsächlich vom Abstand der beiden Hauptpunkte der Abbildungen und
- 3.) von der erstrebten Genauigkeit der Übertragung.

Wir beschränken uns in der folgenden Entwicklung auf Glieder der Ordnungszahl drei und schreiben zunächst die Gleichung (106) mit diesen Gliedern, getrennt nach dem reellen und imaginären Teil, nochmals an. Es ist mit  $a_k = \alpha_k + i\beta_k$

$$\begin{aligned} \bar{x}_i = \bar{x}_0 + \alpha_1 \Delta x_i - \beta_1 \Delta y_i + \alpha_2 (\Delta x_i^2 - \Delta y_i^2) - \beta_2 2 \Delta x_i \Delta y_i \\ + \alpha_3 (\Delta x_i^3 - 3 \Delta x_i \Delta y_i^2) + \beta_3 (-3 \Delta x_i^2 \Delta y_i + \Delta y_i^3) \end{aligned} \quad (109a)$$

$$\begin{aligned} \bar{y}_i = \bar{y}_0 + \alpha_1 \Delta y_i + \beta_1 \Delta x_i + \alpha_2 2 \Delta x_i \Delta y_i + \beta_2 (\Delta x_i^2 - \Delta y_i^2) \\ + \alpha_3 (3 \Delta x_i^2 \Delta y_i - \Delta y_i^3) + \beta_3 (\Delta x_i^3 - 3 \Delta x_i \Delta y_i^2) \end{aligned} \quad (109b)$$

Ist die Anzahl  $n$  der vorgegebenen identischen Punkte gleich der um eins vergrößerten Ordnungszahl  $k$  des letzten Gliedes der obigen Ausdrücke, so reichen die  $2n$ -Gleichungen (109) gerade hin, um die Unbekannten, insgesamt  $2(k+1)$ , zu berechnen. Es sind dies die Größen

$$\bar{x}_0, \bar{y}_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_k.$$

Ist hingegen  $n > k+1$ , so liegen in den in der Anzahl  $2n$  anzuschreibenden Gleichungen (109) für diese Unbekannten überschüssige Bestimmungen vor, und zwar bei  $n$  identischen Punkten in der Zahl  $\bar{u} = 2(n-k-1)$ .

Würde man von der Vernachlässigung der weiteren Glieder und von den in den Koordinaten  $x_i, y_i, \bar{x}_i, \bar{y}_i$  bestehenden Unsicherheiten absehen, so müßten die vorstehenden Gleichungen von jedem Koordinatenpaar  $\bar{x}_i, \bar{y}_i$  und  $x_i, y_i$  streng erfüllt werden. Die erwähnten Voraussetzungen bestehen jedoch wie wir wissen nicht; es sind also an den Koordinaten Verbesserungen anzubringen, wobei wir der einfacheren Rechnung halber vereinbaren, daß diese Verbesserungen nur an den querstrichen Koordinaten anzubringen sind. Je ein in beiden Netzen berechneter Punkt ergibt daher zwei Verbesserungsgleichungen, nämlich



$$v_{x_i} = \bar{x}_0 + \Delta x_i \alpha_1 - \Delta y_i \beta_1 + (\Delta x_i^2 - \Delta y_i^2) \alpha_2 - 2 \Delta x_i \Delta y_i \beta_2 \\ + (\Delta x_i^3 - 3 \Delta x_i \Delta y_i^2) \alpha_3 + (-3 \Delta x_i^2 \Delta y_i + \Delta y_i^3) \beta_3 - \bar{x}_i \quad (110a)$$

$$v_{y_i} = \bar{y}_0 + \Delta y_i \alpha_1 + \Delta x_i \beta_1 + 2 \Delta x_i \Delta y_i \alpha_2 + (\Delta x_i^2 - \Delta y_i^2) \beta_2 \\ + (3 \Delta x_i^2 \Delta y_i - \Delta y_i^3) \alpha_3 + (\Delta x_i^3 - 3 \Delta x_i \Delta y_i^2) \beta_3 - \bar{y}_i \quad (110b)$$

Wir schreiben diese Verbesserungsgleichungen nochmals mit der üblichen Bezeichnung der Koeffizienten und des Absolutgliedes an; es ist

$$v_{x_i} = a_{x_i} \bar{x}_0 + c_{x_i} \alpha_1 + d_{x_i} \beta_1 + e_{x_i} \alpha_2 + f_{x_i} \beta_2 + g_{x_i} \alpha_3 + h_{x_i} \beta_3 + l_{x_i} \quad (111a)$$

$$v_{y_i} = b_{y_i} \bar{y}_0 + c_{y_i} \alpha_1 + d_{y_i} \beta_1 + e_{y_i} \alpha_2 + f_{y_i} \beta_2 + g_{y_i} \alpha_3 + h_{y_i} \beta_3 + l_{y_i} \quad (111b)$$

woraus durch eine Vergleichung mit (110) die Bedeutung der einzelnen Koeffizienten und der Absolutglieder entnommen werden kann.

Die Bestimmung der Unbekannten erfolgt so, daß die Quadratsumme der verbleibenden Klaffungen zu einem Minimum wird. Dazu sind die aus (110) sich ergebenden Normalgleichungen

$$\begin{aligned} [aa] \bar{x}_0 + [ab] \bar{y}_0 + [ac] \alpha_1 + [ad] \beta_1 + [ae] \alpha_2 + [af] \beta_2 + [ag] \alpha_3 + [ah] \beta_3 + [al] &= 0 \\ [bb] \bar{y}_0 + [bc] \alpha_1 + [bd] \beta_1 + [be] \alpha_2 + [bf] \beta_2 + [bg] \alpha_3 + [bh] \beta_3 + [bl] &= 0 \\ [cc] \alpha_1 + [cd] \beta_1 + [ce] \alpha_2 + [cf] \beta_2 + [cg] \alpha_3 + [ch] \beta_3 + [cl] &= 0 \\ [dd] \beta_1 + [de] \alpha_2 + [df] \beta_2 + [dg] \alpha_3 + [dh] \beta_3 + [dl] &= 0 \\ [ee] \alpha_2 + [ef] \beta_2 + [eg] \alpha_3 + [eh] \beta_3 + [el] &= 0 \\ [ff] \beta_2 + [fg] \alpha_3 + [fh] \beta_3 + [fl] &= 0 \\ [gg] \alpha_3 + [gh] \beta_3 + [gl] &= 0 \\ [hh] \beta_3 + [hl] &= 0 \end{aligned}$$

nach den Unbekannten  $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \alpha_{1-3}, \beta_{1-3}$  aufzulösen. Die Koeffizienten der Normalgleichungen folgen in bekannter Weise aus (110).

Einige Beziehungen zwischen den Koeffizienten der Normalgleichungen - wir führen diese im nächsten Abschnitt näher aus - wollen wir noch mitteilen. Für den vorstehenden Ansatz gilt

$$\begin{aligned}
[aa] &= [bb] = n, \quad [ab] = [cd] = [ef] = [gh] = 0 \\
[ac] &= [bd], [ad] = -[bc], [ae] = [bf], [af] = -[be], [ag] = [bh], [ah] = -[bg] \\
[cc] &= [dd] \\
[ce] &= [df], [cf] = -[de], [cg] = [dh], [ch] = -[dg] \\
[ee] &= [ff] \\
[eg] &= [fh], [eh] = -[fg] \\
[gg] &= [hh].
\end{aligned} \tag{112}$$

Nach der Auflösung der Normalgleichungen können die Abbildungs- oder Übertragungsgleichungen aufgestellt werden; wir benützen diese mit  $\Delta \bar{x}_i = \bar{x}_i - \bar{x}_0$  und  $\Delta \bar{y}_i = \bar{y}_i - \bar{y}_0$  für die praktische Rechnung in der Form

$$\Delta \bar{x}_i = \alpha_1 \Delta x_i - \beta_1 \Delta y_i + \alpha_2 (\Delta x_i^2 - \Delta y_i^2) - 2\beta_2 \Delta x_i \Delta y_i + \dots \tag{113a}$$

$$\Delta \bar{y}_i = \beta_1 \Delta x_i + \alpha_1 \Delta y_i + \beta_2 (\Delta x_i^2 - \Delta y_i^2) + 2\alpha_2 \Delta x_i \Delta y_i + \dots \tag{113b}$$

Es sei noch erwähnt, daß man in den Verbesserungsgleichungen (110) die Unbekannten  $\bar{x}_0, \bar{y}_0$  und  $\alpha_1, \beta_1$  zweckmäßig in einen bekannten Näherungswert und in einen unbekanntem Zuschlag aufspaltet, um allzu große Unterschiede in der Größenordnung der Unbekannten zu vermeiden<sup>31</sup>.

Mit den Formeln (113) können die Punkte P des Netzes N in  $\bar{N}$  abgebildet oder transformiert werden. Um auch die Transformation in der entgegengesetzten Richtung ausführen zu können, könnte man die ganze Rechnung mit dem Ansatz

$$x + iy = \bar{F}(\bar{x} + i\bar{y})$$

wiederholen, woraus sich Transformationsformeln

$$\Delta x_i = \bar{\alpha}_1 \Delta \bar{x}_i - \bar{\beta}_1 \Delta \bar{y}_i + \dots$$

$$\Delta y_i = \bar{\beta}_1 \Delta \bar{x}_i + \bar{\alpha}_1 \Delta \bar{y}_i + \dots$$

ergeben würden. Als zweiter, zum gleichen Ergebnis führender Weg, steht die Umkehrung der Formeln (113) zur Verfügung, worauf wir im nächsten Abschnitt zurückkommen werden.

### 8. Die Transformation verschiedenartiger thermischer Parameter ineinander.

Diese Transformationsaufgabe liegt immer dann vor, wenn man von einer bestimmten konformen Abbildung in eine andere gleichfalls konforme Abbildung übergehen will.

Wir legen unseren Überlegungen ein- und dasselbe Bezugsellipsoid zugrunde; sind  $x, y$  und  $x', y'$  irgendwelche thermischen Parameter desselben, die die konformen Abbildungen  $A$  und  $A'$  vermitteln, so muß zwischen diesen thermischen Parametern und damit auch zwischen den ebenen Koordinaten bekanntlich die Beziehung

$$x' + iy' = f(x + iy) \quad (114)$$

bestehen. Um diese Funktion zu bestimmen, nehmen wir irgendeinen Nullpunkt  $P_0$  - etwa in der Mitte des Bereichs, in dem die Transformation auszuführen ist - an; diesem mögen die Werte  $x_0, y_0$  und  $x'_0, y'_0$  der thermischen Parameter beider Systeme zukommen. In diesem Punkt entwickeln wir die analytische Funktion (114) in die Taylorsche Reihe

$$\begin{aligned} x'_0 + iy'_0 + \Delta x' + i\Delta y' &= f(x_0 + iy_0) + \frac{1}{1!} \left( \frac{d(x' + iy')}{d(x + iy)} \right)_0 (\Delta x + i\Delta y) \\ &+ \frac{1}{2!} \left( \frac{d^2(x' + iy')}{d(x + iy)^2} \right)_0 (\Delta x + i\Delta y)^2 \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (115)$$

Die gestellte Aufgabe läuft nun offensichtlich darauf hinaus, die Differentialquotienten der obigen Entwicklung an der Stelle  $P_0$  zu bestimmen.

Da wir das gleiche Ellipsoid voraussetzen und die beiden Abbildungen desselben als vollkommen definiert ansehen, sind die beiden thermischen Parameterpaare durch die analytischen Funktionen

$$x + iy = f_1(q + il) \quad , \quad x' + iy' = f_2(q + il)$$

miteinander verbunden. Es ist demnach

$$\begin{aligned} \frac{d(x' + iy')}{d(x + iy)} &= \frac{d(x' + iy')}{d(q + il)} \frac{d(q + il)}{d(x + iy)} \\ \frac{d^2(x' + iy')}{d(x + iy)^2} &= \frac{d^2(x' + iy')}{d(q + il)^2} \left( \frac{d(q + il)}{d(x + iy)} \right)^2 + \frac{d(x' + iy')}{d(q + il)} \frac{d^2(q + il)}{d(x + iy)^2} \end{aligned} \quad (116)$$

u.s.w. Damit liegt bereits die gesuchte Lösung der gestellten Aufgabe vor, da aus den obigen Ausdrücken die gesuchten Ableitungen gebildet werden können, wenn man die Gleichungen I., (46, 48) heranzieht. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}x + iy &= a_1(\Delta q + i\ell) + a_2(\Delta q + i\ell)^2 + \dots \\ \Delta q + i\ell &= b_1(x + iy) + b_2(x + iy)^2 + \dots\end{aligned}\quad (117)$$

und

$$\begin{aligned}x' + iy' &= a'_1(\Delta q' + i\ell') + a'_2(\Delta q' + i\ell')^2 + \dots \\ \Delta q' + i\ell' &= b'_1(x' + iy') + b'_2(x' + iy')^2 + \dots\end{aligned}\quad (118)$$

Es ist zu beachten, daß sich die Unterschiede der isometrischen Koordinaten  $\Delta q$ ,  $\ell$  und  $\Delta q'$ ,  $\ell'$  in den obigen Potenzreihen auf die Anfangspunkte A und A' der beiden Abbildungen beziehen; die Ableitungen sind im Punkt  $P_0$  zu nehmen. Wir erhalten beispielsweise

$$\begin{aligned}\left(\frac{d(x+iy)}{d(q+i\ell)}\right)_0 &= a_1 + 2a_2(\Delta q_0 + i\ell_0) + \dots \\ \left(\frac{d(q+i\ell)}{d(x+iy)}\right)_0 &= b_1 + 2b_2(x_0 + iy_0) + \dots \\ \left(\frac{d(x'+iy')}{d(q'+i\ell')}\right)_0 &= a'_1 + 2a'_2(\Delta q'_0 + i\ell'_0) + \dots \\ \left(\frac{d(q'+i\ell')}{d(x'+iy')}\right)_0 &= b'_1 + 2b'_2(x'_0 + iy'_0) + \dots\end{aligned}\quad (119)$$

mit

$$\Delta q_0 = q_0 - q_A, \quad \ell_0 = \ell_0 - \lambda_A, \quad \Delta q'_0 = q_0 - q_{A'}, \quad \ell'_0 = \ell_0 - \lambda_{A'}.$$

Einfach gestaltet sich die Bildung der Differentialquotienten nach (116) immer dann, wenn beide Anfangspunkte in gleicher Breite liegen (siehe die Transformation Gauß-Krüger-scher Koordinaten zweier benachbarter Streifen ineinander, Seite 86); noch einfacher wird der Vorgang, wenn die Anfangspunkte A und A' der beiden Abbildungen ineinanderfallen.

Als Endergebnis entstehen stets Transformationsgleichungen der Form

$$\Delta x' + i\Delta y' = a_1(\Delta x + i\Delta y) + a_2(\Delta x + i\Delta y)^2 + \dots\quad (120)$$

mit im allgemeinen komplexen Koeffizienten  $a_k = \alpha_k + i\beta_k$ , wobei wir darauf hinweisen, daß diese Koeffizienten  $a_1$  nicht mit den gleich bezeichneten Koeffizienten in (117-119) verwechselt werden dürfen. Auf eine nähere Ausführung und auf die Angabe spezieller Formeln wollen wir verzichten; wir verweisen auf die Literatur<sup>52</sup>.

Natürlich kann die gestellte Transformationsaufgabe auch so gelöst werden, daß man, ausgehend von den geographischen Koordinaten, außer dem angenommenen Nullpunkt  $P_0$

noch die Koordinaten weiterer Punkte in beiden Abbildungen berechnet. Jeder dieser Punkte  $P_i$  ergibt nach (120) zwei Gleichungen

$$\begin{aligned}\Delta x_i' &= \alpha_i \Delta x_i - \beta_i \Delta y_i + \dots \\ \Delta y_i' &= \alpha_i \Delta y_i + \beta_i \Delta x_i + \dots\end{aligned}\quad (121)$$

Hat man außer dem Nullpunkt  $P_0$  noch  $n$  weitere Punkte mit den Koordinaten  $x_{1-n}, y_{1-n}$  und  $x'_{1-n}, y'_{1-n}$  in beiden Abbildungen berechnet, so können die Koeffizienten der Gleichungen (121) bis einschließlich der Ordnungszahl  $k = n$  zahlenmäßig bestimmt werden, da jeder in beiden Systemen berechnete Punkt ein Gleichungspaar (121) liefert und somit insgesamt  $2n$ -Gleichungen zur Bestimmung der  $2k = 2n$  Koeffizienten (einschließlich der Ordnungszahl  $k$ ) vorgegeben sind.

Diesen Vorgang bezeichnet man als die "zahlenmäßige Aufstellung" der Transformationsgleichungen; er ist immer dann anwendbar, wenn die Abbildungsgleichungen für die Abbildungen  $A$  und  $A'$  bekannt sind.

Zur Kontrolle der Berechnung der Koeffizienten  $\alpha_{1-k}, \beta_{1-k}$  wird man über die notwendige Anzahl  $n$  hinaus weitere Punkte heranziehen, deren konforme Koordinaten in beiden Abbildungen vorliegen. Es werden daher, wenn die Transformationsgleichungen bis einschließlich der Ordnungszahl  $k$  ihrer Glieder aufgestellt werden sollen, außer dem Nullpunkt  $P_0$  noch  $n$  weitere Punkte  $P_{1-n}$  in beiden Systemen zu berechnen sein, wobei  $n > k$  sein muß. Da somit überschüssige Bestimmungsstücke vorliegen, kann zur Ermittlung der gesuchten Größen der Algorithmus der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen benützt werden. Dazu nehmen wir die Koordinaten des Nullpunktes  $P_0$  in beiden Systemen als fehlerfrei an - eine willkürliche, aber zulässige Annahme - und beschränken uns der einfacheren Rechnung halber in der Anbringung der Verbesserungen auf die gestrichenen Koordinatenwerte. Diese Verbesserungen werden hier natürlich nicht durch unregelmäßige Beobachtungsfehler, sondern durch die unvermeidlichen Abrundungen in der Berechnung der Koordinaten und auch durch die Annäherung von (114) durch eine Potenzreihe mit beschränkter Gliederzahl begründet; ihre Größenordnung darf daher etwa nur die Größenordnung der Abrundungen in der letzten Stelle der Koordinaten erreichen, woraus sich eine Kontrolle für die richtige Berechnung der Koordinaten in beiden Systemen ergibt.

Um die gesuchten Koeffizienten  $\alpha_{1-k} = \alpha_{1-k} + i\beta_{1-k}$  der Transformationsgleichung (120) zu berechnen, tragen wir die Koordinatenunterschiede zum angenommenen Nullpunkt (zweckmäßig wählt man diesen in der Mitte des Umformungsgebietes und erteilt ihm runde Koordinatenwerte  $x_0, y_0$  in der Abbildung  $A$ ) in die Gleichungen (121) ein, die wir gleich in

Form von Verbesserungsgleichungen anschreiben; jeder außer dem Nullpunkt in beiden Systemen vorgegebene Punkt  $P_i$  ergibt zwei Verbesserungsgleichungen

$$V_{x_i} = \Delta x_i \alpha_1 - \Delta y_i \beta_1 + (\Delta x_i^2 - \Delta y_i^2) \alpha_2 - 2 \Delta x_i \Delta y_i \beta_2 + (\Delta x_i^3 - 3 \Delta x_i \Delta y_i^2) \alpha_3 + (-3 \Delta x_i^2 \Delta y_i + \Delta y_i^3) \beta_3 - \Delta x_i' \quad (122a)$$

$$V_{y_i} = \Delta y_i \alpha_1 + \Delta x_i \beta_1 + 2 \Delta x_i \Delta y_i \alpha_2 + (\Delta x_i^2 - \Delta y_i^2) \beta_2 + (3 \Delta x_i^2 \Delta y_i - \Delta y_i^3) \alpha_3 + (\Delta x_i^3 - 3 \Delta x_i \Delta y_i^2) \beta_3 - \Delta y_i' \quad (122b)$$

oder, mit der üblichen Bezeichnung der Koeffizienten der Unbekannten und des Absolutgliedes

$$V_{x_i} = a_{x_i} \alpha_1 + b_{x_i} \beta_1 + c_{x_i} \alpha_2 + d_{x_i} \beta_2 + e_{x_i} \alpha_3 + f_{x_i} \beta_3 - l_{x_i} \quad (123a)$$

$$V_{y_i} = a_{y_i} \alpha_1 + b_{y_i} \beta_1 + c_{y_i} \alpha_2 + d_{y_i} \beta_2 + e_{y_i} \alpha_3 + f_{y_i} \beta_3 - l_{y_i} \quad (123b)$$

In bekannter Weise bilden wir die Normalgleichungen zur Berechnung der Unbekannten und erhalten folgendes Gleichungssystem:<sup>33</sup>

$$\begin{aligned} [aa] \alpha_1 + [ab] \beta_1 + [ac] \alpha_2 + [ad] \beta_2 + [ae] \alpha_3 + [af] \beta_3 + [al] &= 0 \\ [bb] \beta_1 + [bc] \alpha_2 + [bd] \beta_2 + [be] \alpha_3 + [bf] \beta_3 + [bl] &= 0 \\ [cc] \alpha_2 + [cd] \beta_2 + [ce] \alpha_3 + [cf] \beta_3 + [cl] &= 0 \\ [dd] \beta_2 + [de] \alpha_3 + [df] \beta_3 + [dl] &= 0 \\ [ee] \alpha_3 + [ef] \beta_3 + [el] &= 0 \\ [ff] \beta_3 + [fl] &= 0 \end{aligned} \quad (124)$$

Die Koeffizienten der Normalgleichungen folgen aus (123) durch Vergleichung mit (122); es ist

$$[aa] = [bb] = [\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2]$$

$$[ab] = [cd] = [ef] = 0$$

$$[ac] = [bd] = [\Delta x_i (\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2)]$$

$$[ad] = -[bc] = [-\Delta y_i (\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2)]$$

$$[ae] = [bf] = [(\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2)(\Delta x_i^2 - \Delta y_i^2)]$$

$$[af] = -[be] = [-2 \Delta x_i \Delta y_i (\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2)]$$

$$[al] = [-\Delta x_i \Delta x_i' - \Delta y_i \Delta y_i'] , [bl] = [\Delta y_i \Delta x_i' - \Delta x_i \Delta y_i']$$

$$\begin{aligned} [cc] &= [dd] = [(\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2)^2] \\ [ce] &= [df] = [\Delta x_i (\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2)^2] \\ [cf] &= -[de] = [-\Delta y_i (\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2)^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [c\ell] &= [-(\Delta x_i^2 - \Delta y_i^2) \Delta x_i' - 2 \Delta x_i \Delta y_i \Delta y_i'] \\ [d\ell] &= [2 \Delta x_i \Delta y_i \Delta x_i' - (\Delta x_i^2 - \Delta y_i^2) \Delta y_i'] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [ee] &= [ff] = [(\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2)] \\ [e\ell] &= [-(\Delta x_i^3 - 3 \Delta x_i \Delta y_i^2) \Delta x_i' - (3 \Delta x_i^2 \Delta y_i - \Delta y_i^3) \Delta y_i'] \\ [f\ell] &= [(3 \Delta x_i^2 \Delta y_i - \Delta y_i^3) \Delta x_i' - (\Delta x_i^3 - 3 \Delta x_i \Delta y_i^2) \Delta y_i'] \end{aligned} \quad (125)$$

Auf einige Beziehungen zwischen einzelnen Koeffizienten der Normalgleichungen haben wir schon in (112) hingewiesen; in den vorstehenden Ausdrücken haben wir diese für die Normalgleichungen (124) angegeben und durch Unterstreichen hervorgehoben. Diese Beziehungen werden durch den Aufbau der Verbesserungsgleichungen (122) oder auch der Verbesserungsgleichungen (110) erklärt.

Durch eine bestimmte Anordnung der in beiden Systemen gegebenen Punkte lassen sich die Normalgleichungen (124) weitgehend vereinfachen; aus den in (125) zusammengefaßten Formeln für die Bildung der Koeffizienten der Normalgleichungen (124) erkennt man, daß alle nicht quadratischen Koeffizienten verschwinden, wenn

- 1.) außer dem Nullpunkt eine gerade Anzahl von Punkten zur Aufstellung der Transformationsgleichungen benützt wird,
- 2.) wenn es zu jedem Punkt  $\Delta x_i, \Delta y_i$  einen Punkt  $-\Delta x_i, -\Delta y_i$  gibt und
- 3.) wenn die Punkte so angeordnet werden, daß für alle Punkte  $|\Delta x_i| = |\Delta y_i|$  gilt, wobei die Punkte entweder mit  $\Delta x_i, \Delta y_i$  oder mit  $\Delta x_i, \Delta y_i = 0$  und  $\Delta x_i = 0, \Delta y_i$  angenommen werden können.

Wählt man demnach im System A außer dem Nullpunkt  $P_0$  vier Punkte  $P_1-P_4$  so, daß sie, fortlaufend miteinander verbunden, ein zu den Achsrichtungen durch  $P_0$  symmetrisches Quadrat ergeben, so können die sechs Normalgleichungen (124) voneinander unabhängig aufgelöst werden; es kann nach (125) deren Lösung sofort angeschrieben werden mit

$$\alpha_i = \frac{[\Delta x_i \Delta x_i' + \Delta y_i \Delta y_i']}{[\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2]}, \quad \beta_i = \frac{[-\Delta y_i \Delta x_i' + \Delta x_i \Delta y_i']}{[\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2]}$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{[(\Delta x_i^2 - \Delta y_i^2)\Delta x_i' + 2\Delta x_i \Delta y_i \Delta y_i']}{[(\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2)^2]} \\ \beta_2 &= \frac{[-2\Delta x_i \Delta y_i \Delta x_i' + (\Delta x_i^2 - \Delta y_i^2)\Delta y_i']}{[(\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2)^2]} \\ \alpha_3 &= \frac{[(\Delta x_i^3 - 3\Delta x_i \Delta y_i^2)\Delta x_i' + (3\Delta x_i^2 \Delta y_i - \Delta y_i^3)\Delta y_i']}{[(\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2)^3]} \\ \beta_3 &= \frac{[-(3\Delta x_i^2 \Delta y_i - \Delta y_i^3)\Delta x_i' + (3\Delta x_i \Delta y_i^2 - \Delta y_i^3)\Delta y_i']}{[(\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2)^3]} \end{aligned} \tag{126}$$

Durch diese Annahme der Hilfspunkte wird, wie man sieht, die zahlenmäßige Aufstellung von Transformationsgleichungen zwischen verschiedenen isothermen Systemen oder konformen Abbildungen sehr vereinfacht. Zweckmäßig wählt man, wenn die Umformung sich über ein gewisses Gebiet erstrecken soll, in diesem mehrere rechnerische Nullpunkte  $P_0$  und ordnet die in beiden Systemen zu berechnenden Punkte etwa nach Abb.8 so an, daß sie zur Aufstellung mehrerer Formeln benützt werden können. Damit spart man an Rechenarbeit bei der Berechnung der Punktkoordinaten

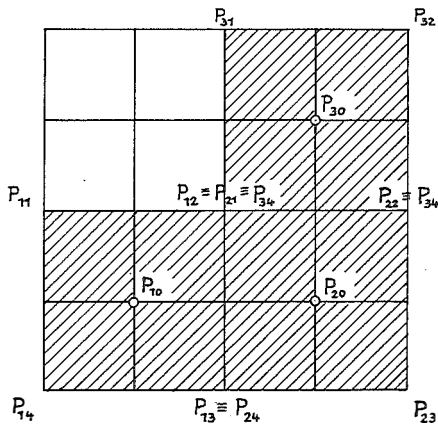


Abb.8.

in beiden Systemen und kommt - dies ist der Hauptzweck - mit einer geringeren Gliederzahl der Transformationsgleichungen (121) aus.

Um aus den im System  $x,y$  angenommenen Koordinaten die zugeordneten Werte  $x',y'$  im anderen System zu berechnen ist in der Regel der Umweg über die geographischen Koordinaten notwendig, d.h. man berechnet aus  $x_i, y_i$  zunächst  $\varphi_i, \lambda_i$  und hieraus  $x_i', y_i'$ .

In der vorliegenden Entwicklung haben wir die Transformation von  $x,y$  in  $x',y'$  angenommen. Um die Transformation in umgekehrter Richtung ausführen zu können, müßte man (114) in der Form

$$x + iy = F'(x' + iy')$$

oder

$$\Delta x + i\Delta y = a_1'(\Delta x' + i\Delta y') + a_2'(\Delta x' + i\Delta y')^2 + \dots \tag{127}$$

anschreiben und die Koeffizienten  $a_k' = \alpha_k' + i\beta_k'$  neuerlich berechnen. Es wären daher diesmal im System  $x',y'$  die Punkte  $P'_{1-n}$  symmetrisch zu einem rechnerischen Nullpunkt  $P'_0$  anzunehmen



und die Koeffizienten  $\alpha'_{1-k}, \beta'_{1-k}$  neuerlich zu berechnen. Dieser Vorgang bietet wohl den Vorteil, daß für den Nullpunkt  $P'_0$  runde Koordinatenwerte  $x'_0, y'_0$  angenommen werden können, setzt aber die Berechnung der Koordinaten  $x, y$  aus den Koordinaten  $x', y'$  für die angenommenen Punkte  $P'_{1-n}$  voraus, bedingt also dieselbe vorbereitende Rechnung.

Die Koeffizienten  $a'_k = \alpha'_k + i\beta'_k$  der Formel (127) können auch durch Umkehrung von (121) gefunden werden. Nach I., (51) ist

$$a'_1 = \frac{1}{a_1}, \quad a'_2 = -\frac{a_2}{a_1^2}, \quad a'_3 = -\frac{a_3}{a_1^3} + 2\frac{a_2^2}{a_1^5}, \quad \text{u.s.w.}$$

Wir führen anstelle der Symbole  $a_k$  für komplexe Koeffizienten ein

$$a_k = \alpha_k + i\beta_k$$

und erhalten

$$\alpha'_1 + i\beta'_1 = \frac{1}{\alpha_1 + i\beta_1} = \frac{\alpha_1 - i\beta_1}{(\alpha_1 + i\beta_1)(\alpha_1 - i\beta_1)} = \frac{\alpha_1 - i\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2}$$

$$\alpha'_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2}, \quad \beta'_1 = \frac{-\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2}$$

$$\alpha'_2 + i\beta'_2 = -\frac{\alpha_2 + i\beta_2}{(\alpha_1 + i\beta_1)^3} = -\frac{(\alpha_2 + i\beta_2)(\alpha_1 - i\beta_1)^3}{(\alpha_1 + i\beta_1)^3(\alpha_1 - i\beta_1)^3}$$

$$\alpha'_2 = \frac{(-\alpha_1^3 + 3\alpha_1\beta_1^2)\alpha_2 + (-3\alpha_1^2\beta_1 + \beta_1^3)\beta_2}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)^3}$$

$$\beta'_2 = \frac{(3\alpha_1^2\beta_1 - \beta_1^3)\alpha_2 + (-\alpha_1^3 + 3\alpha_1\beta_1^2)\beta_2}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)^3} \quad (128)$$

u.s.w.

Mit steigender Ordnungszahl  $k$  der Koeffizienten steigt der Umfang der Ausdrücke (128) rasch an, so daß unter Umständen die Annahme der Punkte im System  $x' y'$  und die direkte Berechnung nach (127) rascher zum Ziel führt als die Reihenumkehrung.

## 9. Literaturverzeichnis.

- 1 Hristow, Die mecklenburgischen Koordinaten, DZV, 1943, S.230  
oder  
Jordan-Eggert, Handbuch, III/2, § 41-43, Seite 204-215. u.a.
- 2 Hubeny, Die konforme Kegelprojektion mit zwei längentreu ab-  
gebildeten Parallelkreisen, ÖZV, 1949, S.126-140, auch  
Jordan-Eggert, Handbuch, III/2, § 44, S.216-218
- 3 Hristow, Das Wesen der Gauß-Krügerschen Koordinaten,  
DZV, 1942, S.210-216 und DZV, 1950, S.88.
- 4 Krüger, Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene,  
Veröffentlichung des kgl. preussischen Geodätischen Insti-  
tuts, Neue Folge Nr.52, Potsdam 1912, Verlag von B.G.Teub-  
ner, Leipzig.
- 5 Hristow, Die Gauß-Krügerschen Koordinaten auf dem Ellip-  
soid, Verlag von B.G. Teubner, Leipzig und Berlin 1943,  
siehe auch die Darstellung der Gauß-Krügerschen Abbildung  
in  
Jordan-Eggert, Handbuch, III/2, § 32-38, Seite 150-194.
- 6 Hristow, Potenzreihen zwischen den Gauß-Krügerschen und  
den geographischen Koordinaten und umgekehrt, mit Anwen-  
dung auf Deutschland, DZV, 1937, S.289-298.  
Dieser Abhandlung sind Tafeln der Koeffizienten der For-  
meln (29) und (30) angeschlossen u.zw. für die Breiten  
von  $47^{\circ}$  -  $55^{\circ}$  mit Nullpunkten im Abstand von  $1/2$  Grad  
(Besselsches Ellipsoid) und  
Hristow, Gauß-Krügersche Koordinaten, § 3-5, Seite 6-14,  
sowie Tafel 6, S.63 und Tafel 8, S.65 daselbst.  
Siehe auch  
Jordan-Eggert, Handbuch, III/2, § 34, S.164 und die dort  
im Anhang mitgeteilten Tabellen.
- 7 Hristow, Gauß-Krügersche Koordinaten, § 4, S.9-11,  
auch  
Hristow, Transformationsformeln zwischen den Gauß-Krüger-  
schen und den geographischen Koordinaten und umgekehrt,  
DZV, 1938, S.598-600.
- 8 Jordan-Eggert, Handbuch, III/2, § 32, S.150-153.

- 9 Hristow, siehe 7 und  
Jordan-Eggert, Handbuch, III/2, § 33, S.154-158.
- 10 Siehe die in 6 erwähnten Tafeln.
- 11 Hristow, Gauß-Krügersche Koordinaten, Tafel 2, S.59  
und Tafel 4, S.61 und  
Boltz, Formeln und Tafeln zur numerischen (nicht loga-  
rithmischen) Berechnung Gauß-Krügerscher Koordinaten  
aus den geographischen Koordinaten, Veröffentlichung des  
Geodätischen Instituts Potsdam, Neue Folge Nr.111.
- 12 Hubeny, Interpolationstafeln für Abbildungsfunktionen,  
DZV, 1944, S.149-156.
- 13 Hristow, Reihenentwicklungen für die ebene Meridiankon-  
vergenz der Gauß-Krügerschen Projektion, DZV, 1938,  
S.609-619 mit Tafeln der Koeffizienten der Formeln (33)  
innerhalb der Breiten  $47^{\circ}$ - $55^{\circ}$  (Besselsches Ellipsoid) und  
Hristow, Die Gauß-Krügerschen Koordinaten, § 6, S.15-19  
mit Koeffiziententafeln auf S.64 und 66.
- 14 Hristow, Die Gauß-Krügerschen Koordinaten, § 7, S.20-23.  
Jordan-Eggert, Handbuch, III/2, § 34, S.159.
- 15 Hristow, Gauß-Krügersche Koordinaten, Tafel 3, 5, 7, 9,  
S. 60, 62, 64 und 66.
- 16 Hristow, Allgemeine Formeln für die Richtungs- und Ent-  
fernungsreduktion für eine beliebige Fläche und eine be-  
liebige konforme Abbildung, DZV, 1938, S.457-466,  
Formeln (48)-(56).
- 17 Hristow, Gauß-Krügersche Koordinaten, § 11, S.30-35.
- 18 Hristow, Gauß-Krügersche Koordinaten, § 12, S 35-40  
Jordan-Eggert, Handbuch, III/2, § 38, S.184-194,  
weitere Literaturangaben daselbst;  
Grossmann, Zur Transformation Gauß-Krügerscher Koordi-  
naten mit der Rechenmaschine, DZV, 1935, S.353-368 und  
S.385-394.
- 19 Krüger, Zur stereographischen Projektion, Veröffentli-  
chung des Preußischen Geodätischen Instituts 1922,  
Neue Folge Nr.89, Verlag von B.G.Teubner, Leipzig (Bear-  
beitung der von Gauß 1822 angegebenen stereographischen  
Abbildung).

- Grabowski, Tafel zur Berechnung der isometrischen Breite und Hilfstafel zur Gauß-Krügerschen "stereographischen" Abbildung des Ellipsoids, DZV, 1929, S.1-9 und S.33-44.
- Roussilhe, Emploi des coordonnées rectangulaires stéréographiques pour le calcul de la triangulation dans un rayon de 560 kilomètres autour de l'origine, Paris Imprimerie Nationale, 1922 und Rapport sur les procédés de calcul en coordonnées rectangulaires .....  
(2.Generalversammlung der Internationalen Union für Geodäsie und Geophysik, Madrid 1924)  
Paris 1924.
- Eggert, Die stereographische Abbildung des Erdellipsoids, DZV, 1936, S.153-164.
- 20 Roussilhe, siehe oben.
- 21 Roussilhe, siehe oben,  
Hristow, Potenzreihen zwischen den stereographischen und den geographischen Koordinaten und umgekehrt, DZV, 1937, S.84-89.  
Hristow, Über die Transformation von Mercator- und Gauß-Krügerschen Koordinaten in stereographische Koordinaten und umgekehrt, DZV, 1935, S.47-53, auch  
Jordan-Eggert, Handbuch, III/2, § 45, S.218-221.  
Frank, Beiträge zur winkeltreuen Abbildung des Erdellipsoids, DZV, 1940, Abschnitt III, S.151.
- 22 Hristow, Reihenentwicklungen für die ebene Meridiankonvergenz der stereographischen Projektion, DZV, 1940, S.186-188.
- 23 Hristow, Entwicklung des Maßstabes der Gauß-Krügerschen, der stereographischen, der Mecklenburgischen und der Dessauer Projektion als Potenzreihe der Katasterkoordinaten, DZV, 1938, S.545-554.
- 24 Krüger, wie 19, auch  
Gauß, Werke, 4.Bd., S.259-300 u.a.
- 25 Hristow, Über die Transformation von Mercatorkoordinaten in konforme quer- und schiefachsige Koordinaten und umgekehrt, DZV, 1935, S.289-296.
- 26 Hristow, siehe 25. In den Formeln (33) daselbst wurden zwei Druckfehler richtiggestellt.

- 27 Pflüger, Der Allgemeinfall der Gauß-Krügerschen Abbildung, Dissertation, 1950, Technische Hochschule Graz.
- 28 Hristow, siehe 25.
- 29 Pflüger, siehe 27, auch  
Jordan-Eggert, Handbuch, III/2, § 39 u.40, S.195-203,  
Grossmann, Entwicklung und Transformation ebener quer-  
achsiger Koordinaten, DZV, 1934, S.481-500 und 529-545.
- 30 Bodemüller, Ellipsoidische Abbildungen von Rotations-  
ellipsoiden mit Hilfe von Differentialformeln, Nachrichten  
des Kriegskarten- und Vermessungswesens, Berlin, 1944,  
Heft 6, S.291-339, auch  
Bodemüller, Transformation Soldnerscher Koordinaten in  
ungleichartige ebene konforme Koordinatensysteme,  
DZV, 1949, Abschnitt 2, S.182-185.
- 31 Fischer, Zahlenmäßige Aufstellung der Transformations-  
formeln zwischen zwei konformen ebenen Koordinatensyste-  
men, Nachrichten des Kriegskarten- und Vermessungswes-  
ens, Berlin, 1943, Heft 2, S.3-12.
- 32 Hristow, Über die Transformation von Mercator- und  
Gauß-Krügerschen Koordinaten in stereographische Koor-  
dinaten und umgekehrt, DZV, 1935, S.45-53,  
Hristow, Über die Transformation von Mercator- und  
Gauß-Krügerschen Koordinaten in Mecklenburgische Koor-  
dinaten und umgekehrt, DZV, 1935, S.129-134, auch  
Hristow, Über die Transformation von verschiedenartigen  
isometrischen Koordinaten von isothermen Katastersyste-  
men in allgemeiner gegenseitiger Lage, DZV, 1935,  
S.545-550.
- 33 Hristow, Zahlenmäßige Aufstellung von Transformations-  
formeln zwischen zwei isothermen Katastersystemen,  
DZV, 1937, S.146-149.

Im vorstehenden Literaturverzeichnis sind häufig vorkommende Werke abgekürzt bezeichnet; die Erklärung dieser Abkürzungen findet sich auf Seite 55.

### III. Tafeln

Die nachstehend mitgeteilten Zahlentafeln dienen der praktischen Anwendung der gebräuchlichsten konformen Abbildungen für Bereiche des Rotationsellipsoids zwischen den Breiten  $\varphi = 46^\circ$  und  $\varphi = 49^\circ$ . In der Regel sind alle Tafeln sowohl für das Besselsche als auch für das Hayfordsche (Internationale) Ellipsoid berechnet; wo dies nicht der Fall ist, werden zu den für das Besselsche Ellipsoid allein berechneten Tafeln Übergangsformeln mitgeteilt. Jeder einzelnen Tafel ist eine kurze Beschreibung ihrer Einrichtung und ihres Gebrauches vorangestellt; wo es notwendig schien, wurde auch ein Rechenbeispiel beigegeben.

Den Tafeln liegen die Dimensionen des Besselschen Ellipsoids

$$\begin{array}{ll} a = 6\,377\,397,15500 \text{ m} & b = 6\,356\,078,96325 \text{ m} \\ e^2 = 0,00667\,43722\,306 & e'^2 = 0,00671\,92187\,980 \end{array}$$

und des Internationalen Ellipsoids

$$\begin{array}{ll} a = 6\,378\,388 \text{ m} & b = 6\,356\,911,94613 \text{ m} \\ e^2 = 0,00672\,26700\,223 & e'^2 = 0,00676\,81701\,972 \end{array}$$

nach Jordan-Eggert, III.Band, 2.Halbband, Seite 241-244, zugrunde.

Die Berechnung der Tafeln wurde ausgeführt von den Herren Dipl.-Ing. W. Löscher (Tafeln 2a,b) und Dipl.-Ing. G. Schelling (Tafeln 2c,f); bei der Berechnung der übrigen Tafeln wirkten ausser den genannten Herren noch die Herren Dipl.-Ing. E. Brandstötter und Dipl.-Ing. P.Fromme mit.

#### 1. Koeffizienten der Reihenformeln zur Berechnung der isometrischen Breite.

Wir geben die Zahlenwerte der Koeffizienten der Formeln I.,(31a) und I.,(31b) an. Für das Besselsche Ellipsoid ist die isometrische Breite gegeben aus<sup>\*)</sup>

$$\begin{array}{ll} q = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) & \text{oder } q = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \\ - 0,006\,6743\,722\,313 \sin \varphi & - 0,006\,6855\,463\,639 \sin \varphi \\ - 0,000\,0148\,490\,816 \sin^3 \varphi & + 0,000\,0037\,309\,467 \sin^3 \varphi \\ - 0,000\,0000\,594\,650 \sin^5 \varphi & - 0,000\,0000\,037\,478 \sin^5 \varphi \\ - 0,000\,0000\,002\,835 \sin^7 \varphi & + 0,000\,0000\,000\,045 \sin^7 \varphi \\ - 0,000\,0000\,000\,015 \sin^9 \varphi & \end{array}$$

Für die Berechnung der isometrischen Breite am Internationalen (Hayfordschen) Ellipsoid gilt

$$\begin{array}{ll} q = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) & \text{oder } q = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \\ - 0,006\,7226\,700\,223 \sin \varphi & - 0,006\,7340\,067\,340 \sin \varphi \\ - 0,000\,0150\,647\,641 \sin^3 \varphi & + 0,000\,0037\,852\,764 \sin^3 \varphi \\ - 0,000\,0000\,607\,653 \sin^5 \varphi & - 0,000\,0000\,038\,300 \sin^5 \varphi \\ - 0,000\,0000\,002\,918 \sin^7 \varphi & + 0,000\,0000\,000\,046 \sin^7 \varphi \\ - 0,000\,0000\,000\,015 \sin^9 \varphi & \end{array}$$

\*) Die Zahlenwerte der Koeffizienten für das Besselsche Ellipsoid sind der im Literaturhinweis zum Teil I. unter<sup>2)</sup> erwähnten Abhandlung von Wittke entnommen.

## 2. Tafeln für die Gauß-Krügersche Abbildung.

- a. Interpolationstafeln zur Berechnung der Gauß-Krügerschen aus den geographischen Koordinaten (Besselsches Ellipsoid, 3°-Streifen,  $\varphi = 46,2$  bis  $\varphi = 49,4^\circ$ ).

Anordnung der Zahlenwerte.

In den Tafeln sind für runde, mit Intervallen von  $0,1^\circ$  fortschreitende Werte der geographischen Breite und des Absolutwertes des Längenunterschiedes zum Grundmeridian die zahlenmäßigen Werte  $x$  und  $y$  der Gauß-Krügerschen Koordinaten tabelliert. Ebenso sind die ersten und zweiten Differenzen zwischen den Tafelwerten in Richtung der geographischen Breite und des Längenunterschiedes angegeben; die einem Tafelwert zugeordneten Differenzen sind rechts des Tafelwertes angeordnet. Die Bezeichnung  $x_m, y_m$  in der Tabelle soll die Angabe der Koordinaten in Metern hervorheben; die  $x$ -Werte sind von  $x = 5\,000\,000,000$  aus gezählt.

Berechnung der Gauß-Krügerschen aus den geographischen Koordinaten.

Es sind die geographischen Koordinaten  $\varphi, \lambda_P$  eines Punktes  $P$  gegeben; gesucht sind die Gauß-Krügerschen Koordinaten in einem Meridianstreifen, dessen Grundmeridian mit der Länge  $\lambda_m$  vorgegeben ist.

Wir bilden

$$\Delta\lambda_P = \lambda_P - \lambda_m;$$

die Werte  $\varphi$  und  $\Delta\lambda$  sind die Eingangswerte für den Eingang in die Tafeln. In diesen ist der Absolutwert des Längenunterschiedes, um Verwechslungen mit den Tafeldifferenzen zu vermeiden, einfach mit  $\lambda$  bezeichnet; diese Bezeichnung soll hier weiter gelten.

Um die zu  $\varphi, \lambda$  gehörende Abszisse  $x$  und den Absolutwert der Ordinate  $y$  zu ermitteln, ist eine Interpolation zwischen den vorgegebenen Tafelwerten notwendig. Dazu benutzen wir die Newtonsche Interpolationsformel für eine Funktion von zwei Veränderlichen; sind  $x_0, y_0$  die Werte der Gauß-Krügerschen Koordinaten, die den gegenüber  $\varphi, \lambda$  nächst niedrigeren, in der Tafel als Eingangswerte angegebenen Werten von  $\varphi_0, \lambda_0$  zukommen, so gilt

$$x = x_0 + \Delta x_\varphi n_\varphi + \Delta x_\lambda n_\lambda + \Delta x_{\varphi\varphi} \binom{n_\varphi}{2} + \Delta x_{\varphi\lambda} n_\varphi n_\lambda + \Delta x_{\lambda\lambda} \binom{n_\lambda}{2} + \dots$$

$$y = y_0 + \Delta y_\varphi n_\varphi + \Delta y_\lambda n_\lambda + \Delta y_{\varphi\varphi} \binom{n_\varphi}{2} + \Delta y_{\varphi\lambda} n_\varphi n_\lambda + \Delta y_{\lambda\lambda} \binom{n_\lambda}{2} + \dots$$

In diesen Formeln sind neben den mit  $\Delta x_\varphi, \Delta x_{\varphi\varphi}$  u.s.w. bezeichneten ersten und zweiten Tafeldifferenzen und den schon erklärten Werten  $x_0, y_0$  die Größen  $n_\varphi, n_\lambda$  durch die Differenzen

$$n_\varphi = \varphi - \varphi_0, \quad n_\lambda = \lambda - \lambda_0$$

ausgedrückt in Einheiten des Tafelintervalls, erklärt. Hat man  $\varphi - \varphi_0, \lambda - \lambda_0$  entsprechend der Bezeichnung der Tafeln in Graden mit dezimaler Unterteilung des Grades berechnet, so gilt

$$n_\varphi = \frac{(\varphi - \varphi_0)^\circ}{0,1^\circ} = (\varphi - \varphi_0)^\circ 10, \quad n_\lambda = \frac{(\lambda - \lambda_0)^\circ}{0,1^\circ} = (\lambda - \lambda_0)^\circ 10.$$

Man beachte; daß für die getroffene Festsetzung  $\varphi_0 < \varphi, |\lambda_0| < |\lambda|$  die Größen  $n_\varphi$  und  $n_\lambda$  stets positive Zahlen kleiner als eins sein müssen.

Die Werte

$$\binom{n_\varphi}{2} = \frac{n_\varphi(n_\varphi - 1)}{1,2}, \quad \binom{n_\lambda}{2} = \frac{n_\lambda(n_\lambda - 1)}{1,2}$$

entnimmt man den Hilfstafeln am Schlusse der Zahlentafeln. Beide Werte sind für  $n_\varphi, n_\lambda < 1$  stets negativ; ihre Extremwerte sind, wenn  $n_\varphi$  und  $n_\lambda$  zwischen 0 und +1 variiert, mit  $\binom{n_\varphi}{2} = \binom{n_\lambda}{2} = -0,125$  bei  $n_\varphi = n_\lambda = 0,5$  gegeben.

Die Vorzeichen der ersten und zweiten Differenzen sind teils positiv, teils negativ, jedoch für die ganze Tafel gleichbleibend; da  $n_\varphi, n_\lambda$  und somit auch das Produkt  $n_\varphi n_\lambda$  stets positiv, weiter  $\binom{n_\varphi}{2}, \binom{n_\lambda}{2}$  stets negativ sein muß, können wir - unter Berücksichtigung aller Vorzeichen - folgende Gebrauchsformeln angeben:

$$x = x_0 + \Delta x_\varphi n_\varphi + \Delta x_\lambda n_\lambda - \Delta x_{\varphi\varphi} \binom{n_\varphi}{2} - \Delta x_{\varphi\lambda} n_\varphi n_\lambda - \Delta x_{\lambda\lambda} \binom{n_\lambda}{2}$$

$$y = y_0 - \Delta y_\varphi n_\varphi + \Delta y_\lambda n_\lambda + \Delta y_{\varphi\varphi} \binom{n_\varphi}{2} - \Delta y_{\varphi\lambda} n_\varphi n_\lambda + \Delta y_{\lambda\lambda} \binom{n_\lambda}{2}$$

Hierin sind nunmehr alle Größen als Absolutwerte einzuführen. Handelt es sich um einen negativen Längenunterschied zum Grundmeridian, so wird mit dem Absolutwert desselben in die Rechnung eingegangen und das mit dem Längenunterschied übereinstimmende Vorzeichen von  $y$  diesem erst nach beendeter Rechnung vorangesetzt.

Die angegebenen Formeln reichen hin, um die ebenen Koordinaten mit einer Unsicherheit zu berechnen, die im ungünstigsten Falle den Millimeter etwas überschreitet. Man wertet die vorstehende Formel am besten auf der Doppelrechenmaschine aus; nach der Einstellung von  $x_0, y_0$  in den Ergebniswerken wird jeweils  $\Delta x_\varphi, \Delta y_\varphi$  u.s.w. in das linke und rechte Einstellwerk gebracht und unter Berücksichtigung der Vorzeichen mit den für beide Formeln gleichen Faktoren  $n_\varphi, n_\lambda$  u.s.w. multipliziert, wodurch gleichzeitig die Addition der so gebildeten Produkte zu  $x_0, y_0$  vollzogen wird.

Beispiel.

Der Punkt  $P$  habe die geographischen Koordinaten  $\varphi_P = 47^\circ 19' 22'', 376$ ,  $\lambda_P = 16^\circ 21' 36'', 421$ ; es sind die Gauß-Krügerschen Koordinaten in den Meridianstreifen  $\lambda_m = 15^\circ$  und  $\lambda_m = 18^\circ$  zu berechnen.

Wir drücken zuerst die Minuten und Sekunden der Angabe in Dezimalen des Grades aus.

Dazu verwandeln wir die Minuten in Sekunden und dividieren durch 3600; es ist

$$\begin{aligned}\varphi &= 47^\circ 19' 22'',376 = 47^\circ 1162'',376 = 47^\circ, 322 88222 \\ \lambda &= 16^\circ 21' 36'',421 = 16^\circ 1296'',421 = 16^\circ, 360 11694\end{aligned}$$

Wir berechnen zuerst die Gauß-Krügerschen Koordinaten des vorgegebenen Punktes im Meridianstreifen mit dem Mittelmeridian  $\lambda_m = 15^\circ$ . Für den Eingang in die Tafel haben wir

$$\varphi = 47^\circ, 322 88222 \quad \lambda = + 1^\circ, 360 11694, /\lambda/ = 1^\circ, 360 11694$$

Die nächst niedrigeren, in der Tafel enthaltenen Werte sind

$$\varphi_0 = 47^\circ,3 \quad /\lambda_0/ = 1^\circ,3$$

Für diese entnehmen wir der Tafel

$$\begin{array}{lll}x_0 = 240 885,190 & \Delta X_\varphi = 11 116,289 & \Delta X_{\varphi\varphi} = 0,184 \\ & \Delta X_\lambda = 130,966 & \Delta X_{\varphi\lambda} = 0,037 \\ & & \Delta X_{\lambda\lambda} = 9,704 \\ \\ y_0 = 98 305,405 & \Delta Y_\varphi = 185,542 & \Delta Y_{\varphi\varphi} = 0,301 \\ & \Delta Y_\lambda = 7 561,839 & \Delta Y_{\varphi\lambda} = 14,277 \\ & & \Delta Y_{\lambda\lambda} = 0,024\end{array}$$

Aus  $(\varphi - \varphi_0)^{\circ.10}$  und  $(\lambda - \lambda_0)^{\circ.10}$  ergibt sich

$$n_\varphi = 0,228 8222 \quad n_\lambda = 0,601 1694$$

Aus der Tafel für  $\left(\frac{2}{2}\right)$  entnehmen wir

$$\left\| \left( \frac{n_\varphi}{2} \right) \right\| = 0,088 23 \quad \text{und} \quad \left\| \left( \frac{n_\lambda}{2} \right) \right\| = 0,119 88$$

und bilden

$$n_\varphi n_\lambda = 0,137 5609$$

Es folgt nun die eigentliche Interpolation, für die wir alle Produkte gesondert anschreiben und hernach summieren; diesen Vorgang umgeht man bei der praktischen Verwendung der Tafeln durch die Summierung in der Maschine.

Wir haben

$$\begin{array}{ll}x_0 = 240 885,190 & y_0 = 98 305,405 \\ \Delta X_\varphi n_\varphi = + 2 543,653 7 & \Delta Y_\varphi n_\varphi = - 42,456 1 \\ \Delta X_\lambda n_\lambda = + 78,732 8 & \Delta Y_\lambda n_\lambda = + 4 545,946 2 \\ \Delta X_{\varphi\varphi} \left(\frac{n_\varphi}{2}\right) = - 0,016 2 & \Delta Y_{\varphi\varphi} \left(\frac{n_\varphi}{2}\right) = + 0,026 6 \\ \Delta X_{\varphi\lambda} n_\lambda = - 0,005 1 & \Delta Y_{\varphi\lambda} n_\lambda = - 1,964 0 \\ \Delta X_{\lambda\lambda} \left(\frac{n_\lambda}{2}\right) = - 1,153 3 & \Delta Y_{\lambda\lambda} \left(\frac{n_\lambda}{2}\right) = + 0,002 9 \\ \hline x = 243 506,391 9 & y = 102 806,960 6\end{array}$$

Das Vorzeichen der Ordinate  $y$  wird von der Differenz  $\lambda_p - \lambda_m$  übernommen; weiter wird zur Abszisse  $x$  der Wert 5 000 000,000 hinzugefügt. Die gesuchten Koordinatenwerte im Meridianstreifen  $\lambda_m = 15^\circ$ , auf Millimeter abgerundet, sind daher

$$x = 5 243 506,392 \quad y = + 102 806,961$$

Für den Meridianstreifen  $\lambda_m = 18^\circ$  gilt

$$\begin{aligned}\varphi &= 47^\circ,322 88222, & \lambda &= - 1^\circ,639 88306 \quad /\lambda/ = 1^\circ,639 88306 \\ \text{und} \quad \varphi &= 47^\circ,3 & & \lambda_0 = 1^\circ,6\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\text{und} \quad n_\varphi &= 0,228 8222 & n_\lambda &= 0,398 8306 & n_\varphi n_\lambda &= 0,119 88 \\ \text{und} \quad \left\| \left( \frac{n_\varphi}{2} \right) \right\| &= 0,088 23 & \left\| \left( \frac{n_\lambda}{2} \right) \right\| &= 0,091 2613 & &\end{aligned}$$

Die Interpolation ergibt

$$\begin{array}{ll}x_0 = 241 307,201 & y_0 = 120 990,845 \\ + 2 543,626 5 & - 52,257 7 \\ + 63,845 6 & + 3 015,860 5 \\ - 0,015 8 & + 0,032 6 \\ - 0,004 2 & - 1,303 3 \\ - 1,153 6 & + 0,003 7 \\ \hline x = 243 913,489 5 & y = 123 953,180 8\end{array}$$

Die gesuchten Koordinaten im Meridianstreifen  $\lambda_m = 18^\circ$  ergeben sich demnach mit

$$x = 5 243 913,490 \quad y = - 123 953,181.$$



$\varphi = 46.3^\circ$

$\lambda^\circ$	$X_m$	$\frac{\Delta X Y}{\Delta X \Delta \lambda}$	$\frac{\Delta X X Y}{\Delta X \Delta \lambda}$	$Y_m$	$\frac{\Delta Y Y}{\Delta Y \Delta \lambda}$	$\frac{\Delta Y X Y}{\Delta Y \Delta \lambda}$	$\frac{\Delta Y X X}{\Delta Y \Delta \lambda}$
0.0	128 911,014	11 114,575	14,560	0,000	0,000	0,000	0,000
		4,560	9,721	7 703,424	7 703,424	14,036	14,036
.1	915,874	11 114,574	14,561	7 703,424	7 703,423	14,036	024
		14,561	9,720	15 406,847	7 703,423	14,036	001
.2	930,455	11 114,571	14,564	15 406,847	7 703,422	14,036	049
		24,501	9,720	23 110,269	7 703,422	14,036	004
.3	954,756	11 114,567	14,567	23 110,269	7 703,418	14,037	071
		34,021	9,721	30 813,687	7 703,418	14,037	004
.4	988,777	11 114,562	14,572	30 813,687	7 703,414	14,037	094
		43,742	9,722	38 517,101	7 703,414	14,037	069
.5	129 036,519	11 114,556	14,576	38 517,101	7 703,409	14,037	007
		53,464	9,720	46 220,510	7 703,402	14,038	141
.6	095,983	11 114,546	14,581	46 220,510	7 703,395	14,040	166
		63,184	9,722	53 923,912	7 703,395	14,040	007
.7	149,167	11 114,537	14,585	53 923,912	7 703,387	14,041	236
		72,906	9,722	61 627,307	7 703,387	14,041	011
.8	224,073	11 114,525	14,588	61 627,307	7 703,386	14,041	260
		82,628	9,723	69 330,695	7 703,386	14,043	012
.9	304,701	11 114,512	14,591	69 330,695	7 703,378	14,040	212
		92,351	9,723	77 034,073	7 703,378	14,040	011
1.0	397,052	11 114,498	14,598	77 034,073	7 703,367	14,041	284
		102,074	9,724	84 737,440	7 703,367	14,041	011
.1	499,126	11 114,481	14,601	84 737,440	7 703,356	14,043	360
		111,798	9,724	92 440,796	7 703,356	14,043	012
.2	610,924	11 114,463	14,603	92 440,796	7 703,344	14,043	433
		121,522	9,725	100 144,140	7 703,344	14,043	014
.3	732,446	11 114,444	14,606	100 144,140	7 703,330	14,042	507
		131,247	9,722	107 847,470	7 703,330	14,042	014
.4	863,693	11 114,422	14,608	107 847,470	7 703,316	14,046	582
		140,972	9,728	115 550,786	7 703,316	14,046	016
.5	130 004,665	11 114,401	14,610	115 550,786	7 703,300	14,047	655
		150,700	9,726	123 254,086	7 703,300	14,047	016
.6	159,365	11 114,376	14,612	123 254,086	7 703,284	14,048	728
		160,426	9,729	130 927,370	7 703,284	14,048	018
.7	319,791	11 114,351	14,614	130 927,370	7 703,266	14,050	802
		170,165	9,729	138 660,636	7 703,266	14,050	018
.8	485,946	11 114,323	14,616	138 660,636	7 703,248	14,051	874
		179,884	9,731	146 363,884	7 703,248	14,051	021
.9	662,830	11 114,295	14,618	146 363,884	7 703,227	14,052	948
		189,615	9,733	154 067,111	7 703,227	14,052	022
2.0	852,445			154 067,111			

$\varphi = 46.2^\circ$

$\lambda^\circ$	$X_m$	$\frac{\Delta X Y}{\Delta X \Delta \lambda}$	$\frac{\Delta X X Y}{\Delta X \Delta \lambda}$	$Y_m$	$\frac{\Delta Y Y}{\Delta Y \Delta \lambda}$	$\frac{\Delta Y X Y}{\Delta Y \Delta \lambda}$	$\frac{\Delta Y X X}{\Delta Y \Delta \lambda}$
0.0	117 796,634	11 114,380	14,561	0,000	0,000	0,000	0,000
		4,561	9,722	7 717,437	7 717,437	14,013	001
.1	801,495	11 114,379	14,563	7 717,437	7 717,436	14,013	023
		14,563	9,721	15 434,873	7 717,436	14,013	002
.2	816,078	11 114,377	14,564	15 434,873	28,026	046	046
		24,504	9,722	23 152,307	42,038	071	071
.3	840,382	11 114,374	14,565	23 152,307	42,038	14,013	004
		34,026	9,723	30 869,738	56,051	14,013	004
.4	874,408	11 114,369	14,567	30 869,738	56,051	14,013	095
		43,749	9,722	38 587,165	70,064	14,013	064
.5	918,157	11 114,362	14,569	38 587,165	70,064	14,014	114
		53,471	9,723	46 304,588	7 717,423	14,014	006
.6	971,628	11 114,355	14,571	46 304,588	84,078	14,015	143
		63,194	9,723	54 022,005	7 717,417	14,015	007
.7	118 034,822	11 114,345	14,573	54 022,005	98,093	14,016	165
		72,917	9,723	61 739,415	7 717,410	14,016	011
.8	107,739	11 114,334	14,574	61 739,415	112,108	14,016	188
		82,640	9,725	69 456,818	7 717,403	14,016	009
.9	190,379	11 114,322	14,575	69 456,818	126,123	14,016	213
		92,365	9,724	77 174,212	7 717,394	14,016	009
1.0	282,744	11 114,308	14,576	77 174,212	140,139	14,017	237
		102,089	9,725	84 891,597	7 717,385	14,017	011
.1	384,833	11 114,293	14,577	84 891,597	154,157	14,017	269
		112,814	9,725	92 608,971	7 717,374	14,018	012
.2	496,647	11 114,277	14,578	92 608,971	168,175	14,018	282
		121,559	9,728	100 326,333	7 717,362	14,018	012
.3	618,186	11 114,260	14,579	100 326,333	182,193	14,018	307
		131,287	9,726	108 043,683	7 717,350	14,018	015
.4	749,453	11 114,240	14,580	108 043,683	196,213	14,021	330
		140,999	9,729	115 761,020	7 717,337	14,021	014
.5	890,446	11 114,219	14,581	115 761,020	210,234	14,022	354
		150,722	9,728	123 478,343	7 717,323	14,022	016
.6	119 041,168	11 114,197	14,582	123 478,343	224,257	14,022	379
		160,450	9,730	131 195,650	7 717,307	14,022	016
.7	201,618	11 114,173	14,583	131 195,650	238,280	14,025	401
		170,180	9,731	138 912,941	7 717,291	14,025	017
.8	371,798	11 114,148	14,584	138 912,941	252,305	14,026	425
		179,911	9,732	146 630,215	7 717,274	14,026	019
.9	551,709	11 114,121	14,585	146 630,215	266,331	14,026	449
		189,643	9,733	154 347,470	7 717,255	14,026	020
2.0	741,352			154 347,470			

$\psi = 46.5^\circ$

$\lambda^\circ$	$X_m$	$\frac{\Delta X_y}{\Delta X_x}$	$\frac{\Delta X_y}{\Delta X_x}$	$Y_m$	$\frac{\Delta Y_y}{\Delta Y_x}$	$\frac{\Delta Y_y}{\Delta Y_x}$
0.0	151 140,358	11 114,964	4,899	0,000	195	0,000
			9,716		9,716	7 675,328
.1	145,217	11 114,963	184	7 675,328	184	14,083
			14,083		14,083	7 675,327
.2	159,792	11 114,961	193	15 350,655	193	28,167
			24,253		24,253	7 675,325
.3	184,085	11 114,956	194	23 025,980	194	42,251
			34,010		34,010	7 675,321
.4	218,095	11 114,950	184	30 701,301	184	56,335
			43,728		43,728	7 675,316
.5	261,823	11 114,942	193	38 376,617	193	70,419
			53,446		53,446	7 675,310
.6	315,269	11 114,922	192	46 051,927	192	84,503
			8,518		8,518	7 675,305
.7	378,432	11 114,921	191	53 727,230	191	98,588
			72,863		72,863	7 675,295
.8	451,315	11 114,906	192	61 402,525	192	112,673
			84,600		84,600	7 675,286
.9	533,915	11 114,892	190	69 077,811	190	126,759
			34,321		34,321	7 675,274
1.0	626,236	11 114,875	188	76 753,085	188	140,847
			102,040		102,040	7 675,263
.1	728,276	11 114,856	187	84 428,348	187	154,935
			111,761		111,761	7 675,250
.2	840,037	11 114,835	186	92 103,598	186	169,024
			121,881		121,881	7 675,235
.3	961,518	11 114,813	185	99 778,833	185	183,113
			131,203		131,203	7 675,219
.4	152 092,721	11 114,789	184	107 454,052	184	197,203
			140,928		140,928	7 675,205
.5	233,647	11 114,763	183	115 129,255	183	211,295
			150,630		150,630	7 675,185
.6	384,297	11 114,735	180	122 804,440	180	225,388
			160,373		160,373	7 675,166
.7	544,670	11 114,705	179	130 479,606	179	239,482
			170,098		170,098	7 675,148
.8	714,768	11 114,674	176	138 154,752	176	253,578
			179,824		179,824	7 675,124
.9	894,592	11 114,641	173	145 829,876	173	267,675
			189,552		189,552	7 675,101
2.0	153 084,144		9,729	153 504,977		14,024

$\psi = 46.4^\circ$

$\lambda^\circ$	$X_m$	$\frac{\Delta X_y}{\Delta X_x}$	$\frac{\Delta X_y}{\Delta X_x}$	$Y_m$	$\frac{\Delta Y_y}{\Delta Y_x}$	$\frac{\Delta Y_y}{\Delta Y_x}$
0.0	140 025,689	11 114,769	185	0,000	000	0,000
			4,899		4,899	7 689,388
.1	030,448	11 114,768	184	7 689,388	184	14,060
			14,060		14,060	7 689,387
.2	045,026	11 114,766	195	15 378,775	195	28,120
			24,257		24,257	7 689,385
.3	069,323	11 114,762	194	23 068,160	194	42,171
			34,016		34,016	7 689,381
.4	103,339	11 114,756	184	30 757,541	184	56,240
			43,736		43,736	7 689,377
.5	147,075	11 114,748	194	38 446,918	194	70,301
			53,454		53,454	7 689,371
.6	200,529	11 114,740	192	46 136,389	192	84,362
			63,175		63,175	7 689,365
.7	263,704	11 114,728	189	53 825,654	189	98,423
			72,884		72,884	7 689,357
.8	336,598	11 114,717	189	61 515,011	189	112,486
			82,615		82,615	7 689,347
.9	419,213	11 114,702	190	69 204,359	190	126,548
			92,351		92,351	7 689,338
1.0	511,550	11 114,686	189	76 893,697	189	140,612
			102,037		102,037	7 689,327
.1	613,607	11 114,669	187	84 583,024	187	154,676
			111,780		111,780	7 689,315
.2	725,387	11 114,650	185	92 272,339	185	168,744
			121,503		121,503	7 689,301
.3	846,890	11 114,628	185	99 961,640	185	182,807
			131,225		131,225	7 689,287
.4	978,115	11 114,606	183	107 650,927	183	196,875
			140,951		140,951	7 689,271
.5	141 119,066	11 114,581	182	115 340,198	182	210,943
			150,675		150,675	7 689,254
.6	269,741	11 114,556	179	123 029,452	179	225,012
			160,401		160,401	7 689,232
.7	430,142	11 114,528	177	130 718,689	177	239,083
			170,127		170,127	7 689,217
.8	600,269	11 114,500	176	138 407,906	176	253,154
			179,856		179,856	7 689,198
.9	780,125	11 114,467	174	146 097,104	174	267,228
			189,584		189,584	7 689,176
2.0	969,709		9,729	153 786,280		14,023

$\varphi = 46,7^\circ$

$\lambda^\circ$	$X_m$	$\frac{\Delta X_Y}{\Delta X_\lambda}$	$\frac{\Delta X_Y}{\Delta X_\lambda}$	$Y_m$	$\frac{\Delta Y_\varphi}{\Delta Y_\lambda}$	$\frac{\Delta Y_\varphi}{\Delta Y_\lambda}$
0,0	173 370,481	11 115,353	194 0,001 4,856 9,714	0,000	7 647,138	14,130 0,002
,1	375,337	11 115,352	195 14,570 9,703	7 647,138	14,130	14,002
,2	389,907	11 115,349	196 24,284 9,714	15 294,274	28,260	14,131
,3	414,191	11 115,344	194 33,988 9,713	22 941,408	42,391	14,131
,4	448,189	11 115,336	195 43,711 9,709	30 588,538	56,522	14,131
,5	491,900	11 115,327	195 53,425 9,715	38 235,662	70,653	14,132
,6	545,325	11 115,317	192 63,140 9,714	45 882,780	84,785	14,133
,7	608,465	11 115,303	193 72,854 9,716	53 529,890	98,918	14,133
,8	681,319	11 115,288	190 82,570 9,715	61 176,990	113,050	14,133
,9	763,889	11 115,271	190 92,285 9,716	68 824,079	127,183	14,134
1,0	856,174	11 115,252	189 102,001 9,718	76 471,196	141,317	14,135
,1	958,175	11 115,231	188 111,719 9,717	84 118,220	155,452	14,135
,2	174 069,894	11 115,207	187 121,435 9,719	91 765,263	169,587	14,136
,3	191,329	11 115,182	185 131,154 9,718	99 412,301	183,722	14,136
,4	322,483	11 115,154	184 140,872 9,720	107 059,316	197,861	14,140
,5	463,355	11 115,125	182 150,592 9,720	114 706,312	212,001	14,139
,6	613,947	11 115,093	181 160,312 9,721	122 353,288	226,140	14,141
,7	774,259	11 115,060	178 170,033 9,722	130 000,242	240,281	14,142
,8	944,292	11 115,025	175 179,755 9,724	137 647,173	254,423	14,142
,9	1124,047	11 114,988	172 189,479 9,726	145 294,079	268,567	14,145
2,0	313,526			152 940,960	282,711	14,145

$\varphi = 46,6^\circ$

$\lambda^\circ$	$X_m$	$\frac{\Delta X_Y}{\Delta X_\lambda}$	$\frac{\Delta X_Y}{\Delta X_\lambda}$	$Y_m$	$\frac{\Delta Y_\varphi}{\Delta Y_\lambda}$	$\frac{\Delta Y_\varphi}{\Delta Y_\lambda}$
0,0	162 255,322	11 115,159	194 0,002 4,858 9,715	0,000	7 661,245	14,107 0,002
,1	260,180	11 115,157	195 14,573 9,702	7 661,245	14,107	14,002
,2	274,753	11 115,154	195 24,288 9,716	15 322,488	28,214	14,106
,3	299,041	11 115,150	194 34,004 9,716	22 983,729	42,321	14,107
,4	333,045	11 115,144	192 43,720 9,716	30 644,966	56,428	14,106
,5	376,765	11 115,135	192 53,436 9,716	38 306,198	70,536	14,108
,6	430,201	11 115,124	193 63,152 9,716	45 967,424	84,644	14,110
,7	493,253	11 115,112	191 72,868 9,718	53 628,642	98,752	14,110
,8	566,221	11 115,098	191 82,586 9,718	61 289,852	112,860	14,111
,9	649,807	11 115,082	189 92,304 9,717	68 951,051	126,972	14,110
1,0	741,111	11 115,063	189 102,021 9,719	76 612,238	141,082	14,112
,1	843,132	11 115,043	188 111,740 9,719	84 273,413	155,193	14,112
,2	954,872	11 115,022	185 121,459 9,720	91 934,574	169,305	14,114
,3	163 076,331	11 114,998	184 131,179 9,721	99 595,720	183,419	14,118
,4	207,510	11 114,973	181 140,900 9,722	107 256,849	197,533	14,115
,5	348,410	11 114,945	180 150,622 9,721	114 917,960	211,648	14,116
,6	499,032	11 114,915	179 160,343 9,724	122 579,052	225,762	14,116
,7	659,375	11 114,884	176 170,067 9,724	130 240,124	239,882	14,119
,8	829,442	11 114,850	175 179,791 9,725	137 901,174	254,001	14,121
,9	164 009,233	11 114,814	172 189,516 9,726	145 562,201	268,122	14,123
2,0	198,1749			153 223,203	282,243	14,126

$\psi = 46.9^\circ$

$\lambda^\circ$	X m	$\frac{\Delta X}{\Delta \lambda}$	$\frac{\Delta X^2}{\Delta \lambda^2}$	Y m	$\frac{\Delta Y}{\Delta \lambda}$	$\frac{\Delta Y^2}{\Delta \lambda^2}$
0,0	195 601,261	11 115,742	14,855	0,000	0,000	0,000
		14,855	9,709	7 618,654	7 618,654	14,177
,1	606,236	11 115,741	14,564	7 618,654	14,178	0,022
		14,564	9,709	7 618,652	14,177	0,003
,2	620,800	11 115,737	14,173	15 237,706	7 618,649	0,046
		14,173	9,700	22 856,555	7 618,647	0,070
,3	645,073	11 115,732	13,983	22 856,555	7 618,645	0,094
		13,983	9,710	30 475,400	7 618,638	0,117
,4	679,056	11 115,724	13,793	30 475,400	7 618,631	0,140
		13,793	9,709	38 094,238	7 618,624	0,163
,5	722,749	11 115,714	13,603	38 094,238	7 618,617	0,186
		13,603	9,711	45 713,070	7 618,610	0,209
,6	776,151	11 115,702	13,413	45 713,070	7 618,603	0,232
		13,413	9,710	53 331,892	7 618,596	0,255
,7	839,264	11 115,687	13,223	53 331,892	7 618,589	0,278
		13,223	9,711	60 950,703	7 618,582	0,301
,8	912,087	11 115,670	13,033	60 950,703	7 618,575	0,324
		13,033	9,712	68 569,503	7 618,568	0,347
,9	994,621	11 115,651	12,843	68 569,503	7 618,561	0,370
		12,843	9,712	76 188,289	7 618,554	0,393
1,0	196 086,667	11 115,629	12,653	76 188,289	7 618,547	0,416
		12,653	9,712	83 807,099	7 618,540	0,439
,1	186,625	11 115,605	12,463	83 807,099	7 618,533	0,462
		12,463	9,713	91 425,814	7 618,526	0,485
,2	300,495	11 115,580	12,273	91 425,814	7 618,519	0,508
		12,273	9,714	99 044,550	7 618,512	0,531
,3	421,678	11 115,552	12,083	99 044,550	7 618,505	0,554
		12,083	9,715	106 663,266	7 618,498	0,577
,4	552,975	11 115,521	11,893	106 663,266	7 618,491	0,600
		11,893	9,715	114 281,960	7 618,484	0,623
,5	693,787	11 115,488	11,703	114 281,960	7 618,477	0,646
		11,703	9,716	121 900,634	7 618,470	0,669
,6	844,314	11 115,453	11,513	121 900,634	7 618,463	0,692
		11,513	9,717	129 519,283	7 618,456	0,715
,7	197 004,557	11 115,415	11,323	129 519,283	7 618,449	0,738
		11,323	9,718	137 137,905	7 618,442	0,761
,8	174,517	11 115,376	11,133	137 137,905	7 618,435	0,784
		11,133	9,719	144 756,501	7 618,428	0,807
,9	354,195	11 115,334	10,943	144 756,501	7 618,421	0,830
		10,943	9,720	152 375,067	7 618,414	0,853
2,0	543,592	11 115,289	10,753	152 375,067	7 618,407	0,876

$\psi = 46.8^\circ$

$\lambda^\circ$	X m	$\frac{\Delta X}{\Delta \lambda}$	$\frac{\Delta X^2}{\Delta \lambda^2}$	Y m	$\frac{\Delta Y}{\Delta \lambda}$	$\frac{\Delta Y^2}{\Delta \lambda^2}$
0,0	184 485,634	11 115,517	14,855	0,000	0,000	0,000
		14,855	9,712	7 633,008	7 633,008	14,154
,1	480,689	11 115,517	14,567	7 633,008	14,154	0,024
		14,567	9,712	7 633,006	14,154	0,003
,2	505,256	11 115,514	14,279	15 266,014	7 633,003	0,047
		14,279	9,714	22 899,017	7 633,000	0,070
,3	529,535	11 115,538	14,094	22 899,017	7 632,997	0,094
		14,094	9,712	30 532,016	7 632,994	0,117
,4	563,525	11 115,531	13,904	30 532,016	7 632,991	0,140
		13,904	9,713	38 165,009	7 632,988	0,163
,5	607,227	11 115,522	13,714	38 165,009	7 632,985	0,186
		13,714	9,711	45 797,995	7 632,982	0,209
,6	660,642	11 115,508	13,524	45 797,995	7 632,979	0,232
		13,524	9,714	53 430,972	7 632,976	0,255
,7	723,768	11 115,496	13,334	53 430,972	7 632,973	0,278
		13,334	9,712	61 063,940	7 632,970	0,301
,8	796,608	11 115,479	13,144	61 063,940	7 632,967	0,324
		13,144	9,714	68 696,896	7 632,964	0,347
,9	879,160	11 115,461	12,954	68 696,896	7 632,961	0,370
		12,954	9,714	76 329,839	7 632,958	0,393
1,0	974,426	11 115,441	12,764	76 329,839	7 632,955	0,416
		12,764	9,715	83 962,768	7 632,952	0,439
,1	185 073,406	11 115,419	12,574	83 962,768	7 632,949	0,462
		12,574	9,715	91 595,682	7 632,946	0,485
,2	185,101	11 115,394	12,384	91 595,682	7 632,943	0,508
		12,384	9,716	99 228,578	7 632,940	0,531
,3	306,511	11 115,367	12,194	99 228,578	7 632,937	0,554
		12,194	9,717	106 861,455	7 632,934	0,577
,4	437,637	11 115,338	12,004	106 861,455	7 632,931	0,600
		12,004	9,717	114 494,311	7 632,928	0,623
,5	579,480	11 115,307	11,814	114 494,311	7 632,925	0,646
		11,814	9,719	122 127,148	7 632,922	0,669
,6	729,040	11 115,274	11,624	122 127,148	7 632,919	0,692
		11,624	9,719	129 759,961	7 632,916	0,715
,7	889,319	11 115,238	11,434	129 759,961	7 632,913	0,738
		11,434	9,720	137 392,750	7 632,910	0,761
,8	186 059,317	11 115,200	11,244	137 392,750	7 632,907	0,784
		11,244	9,721	145 025,512	7 632,904	0,807
,9	239,035	11 115,160	11,054	145 025,512	7 632,901	0,830
		11,054	9,722	152 658,248	7 632,898	0,853
2,0	428,474	11 115,119	10,864	152 658,248	7 632,895	0,876

$\psi = 47.1^\circ$

$\lambda^\circ$	$X_m$	$\frac{\Delta X Y}{\Delta X \Delta \lambda}$	$\frac{\Delta X Y}{\Delta X \Delta \lambda}$	$\frac{\Delta X Y}{\Delta X \Delta \lambda}$	$\frac{\Delta X Y}{\Delta X \Delta \lambda}$	$Y_m$	$\frac{\Delta Y Y}{\Delta Y \Delta \lambda}$	$\frac{\Delta Y Y}{\Delta Y \Delta \lambda}$	$\frac{\Delta Y Y}{\Delta Y \Delta \lambda}$	$\frac{\Delta Y Y}{\Delta Y \Delta \lambda}$
0,0	217 833,060	11 116,131	4,852	195	0,000	0,000	195	0,000	7 590,476	000
,1	837,912	11 116,130	14,557	9,705	7 590,476	14,224	9,705	14,224	7 590,476	002
,2	852,469	11 116,130	24,262	19,410	15 180,950	28,447	19,410	28,447	7 590,476	003
,3	876,713	11 116,130	33,967	29,115	22 771,421	37,131	29,115	37,131	7 590,476	005
,4	910,698	11 116,111	43,672	38,820	30 361,887	46,815	38,820	46,815	7 590,466	006
,5	954,370	11 116,099	53,377	48,525	37 952,347	56,500	48,525	56,500	7 590,460	009
,6	218 007,747	11 116,086	63,082	58,230	45 542,798	66,185	58,230	66,185	7 590,441	010
,7	070,829	11 116,070	72,789	67,935	53 133,239	75,870	67,935	75,870	7 590,441	012
,8	143,518	11 116,051	82,495	77,640	60 723,668	85,555	77,640	85,555	7 590,429	015
,9	226,413	11 116,030	92,201	87,345	68 314,085	95,240	87,345	95,240	7 590,401	017
1,0	319,314	11 116,007	101,909	97,050	75 904,486	104,925	97,050	104,925	7 590,358	019
,1	420,223	11 115,980	111,617	106,755	83 494,870	114,610	106,755	114,610	7 590,367	021
,2	531,840	11 115,952	121,325	116,560	91 085,237	124,295	116,560	124,295	7 590,346	022
,3	653,165	11 115,931	131,039	126,365	98 675,583	133,980	126,365	133,980	7 590,324	022
,4	784,200	11 115,886	140,714	136,160	106 265,907	143,665	136,160	143,665	7 590,302	026
,5	924,944	11 115,850	150,455	145,955	113 856,209	153,350	145,955	153,350	7 590,276	026
,6	219 075,399	11 115,811	160,166	155,660	121 446,485	163,035	155,660	163,035	7 590,254	027
,7	235,965	11 115,770	169,879	165,365	129 036,734	172,720	165,365	172,720	7 590,222	031
,8	405,444	11 115,726	179,592	175,070	136 626,956	182,405	175,070	182,405	7 590,191	032
,9	565,036	11 115,679	189,306	184,775	144 217,147	192,090	184,775	192,090	7 590,159	034
2,0	774,242				151 807,306					

$\psi = 47.0^\circ$

$\lambda^\circ$	$X_m$	$\frac{\Delta X Y}{\Delta X \Delta \lambda}$	$\frac{\Delta X Y}{\Delta X \Delta \lambda}$	$\frac{\Delta X Y}{\Delta X \Delta \lambda}$	$\frac{\Delta X Y}{\Delta X \Delta \lambda}$	$Y_m$	$\frac{\Delta Y Y}{\Delta Y \Delta \lambda}$	$\frac{\Delta Y Y}{\Delta Y \Delta \lambda}$	$\frac{\Delta Y Y}{\Delta Y \Delta \lambda}$	$\frac{\Delta Y Y}{\Delta Y \Delta \lambda}$
0,0	206 717,123	11 115,937	4,854	184	0,000	0,000	184	0,000	7 604,676	000
,1	721,977	11 115,935	14,560	9,706	7 604,676	14,200	9,706	14,200	7 604,675	001
,2	736,537	11 115,932	24,266	19,410	15 209,351	28,401	19,410	28,401	7 604,675	003
,3	760,805	11 115,926	33,975	29,115	22 814,023	37,102	29,115	37,102	7 604,672	005
,4	794,780	11 115,911	43,683	38,820	30 418,690	46,803	38,820	46,803	7 604,667	006
,5	838,463	11 115,907	53,390	48,525	38 023,351	56,504	48,525	56,504	7 604,661	008
,6	891,853	11 115,894	63,098	58,230	45 628,004	66,205	58,230	66,205	7 604,653	010
,7	954,951	11 115,878	72,806	67,935	53 232,647	75,906	67,935	75,906	7 604,643	011
,8	207 027,757	11 115,861	82,515	77,640	60 837,279	85,607	77,640	85,607	7 604,632	012
,9	110,272	11 115,841	92,224	87,345	68 441,899	95,308	87,345	95,308	7 604,620	015
1,0	202,496	11 115,818	101,934	97,050	76 046,504	105,009	97,050	105,009	7 604,605	016
,1	304,430	11 115,793	111,642	106,755	83 651,093	114,710	106,755	114,710	7 604,589	019
,2	416,075	11 115,765	121,355	116,560	91 255,665	124,411	116,560	124,411	7 604,572	019
,3	537,430	11 115,735	131,066	126,365	98 860,218	134,112	126,365	134,112	7 604,553	021
,4	668,496	11 115,704	140,779	136,160	106 464,750	143,813	136,160	143,813	7 604,532	022
,5	809,275	11 115,669	150,492	145,965	114 069,259	153,514	145,965	153,514	7 604,509	022
,6	959,767	11 115,632	160,205	155,670	121 673,746	163,215	155,670	163,215	7 604,487	026
,7	208 119,972	11 115,592	169,919	165,375	129 278,207	172,916	165,375	172,916	7 604,461	026
,8	289,893	11 115,551	179,636	175,080	136 882,640	182,617	175,080	182,617	7 604,433	028
,9	469,529	11 115,507	189,352	184,785	144 487,045	192,318	184,785	192,318	7 604,405	030
2,0	658,881				152 091,420					

$\psi = 47,3^\circ$

$\lambda^\circ$	$\chi_m$	$\frac{\Delta\chi_y}{\Delta\chi_x}$	$\frac{\Delta\chi_y}{\Delta\chi_x}$	$\frac{\Delta\chi_y}{\Delta\chi_x}$	$\frac{\Delta\chi_y}{\Delta\chi_x}$	$\gamma_m$	$\frac{\Delta\gamma_y}{\Delta\gamma_x}$	$\frac{\Delta\gamma_y}{\Delta\gamma_x}$	$\frac{\Delta\gamma_y}{\Delta\gamma_x}$
0,0	240 065,517	11 116,520	4,845	193	0,000	0,000	7 562,005	14,270	0,00
,1	070,566	11 116,519	14,270	9,101	0,000	7 562,005	7 562,005	14,270	0,02
,2	084,916	11 116,514	14,250	9,933	0,024	15 124,008	7 562,005	14,270	0,04
,3	109,165	11 116,507	24,249	9,699	0,047	22 686,008	26,540	0,047	0,06
,4	143,113	11 116,499	33,948	9,101	0,070	30 248,002	7 562,000	42,811	0,070
,5	186,762	11 116,486	43,643	0,12	0,092	37 809,989	7 561,994	57,082	0,092
,6	240,111	11 116,471	53,345	9,700	0,116	45 371,967	7 561,987	71,353	0,116
,7	303,161	11 116,455	63,050	9,101	0,140	52 933,934	7 561,967	85,624	0,140
,8	375,911	11 116,432	72,750	0,21	0,169	60 495,888	7 561,954	99,886	0,169
,9	458,362	11 116,410	82,451	9,700	0,195	68 057,828	7 561,940	114,169	0,195
1,0	550,515	11 116,384	92,153	9,101	0,223	75 619,751	7 561,923	128,442	0,223
,1	652,371	11 116,354	101,856	0,29	0,255	83 181,656	7 561,905	142,715	0,255
,2	763,929	11 116,223	111,558	9,700	0,288	90 743,542	7 561,886	156,990	0,288
,3	885,190	11 116,289	121,261	9,101	0,324	98 305,405	7 561,865	171,266	0,324
,4	241 016,156	11 116,252	130,966	0,37	0,361	105 867,244	7 561,835	185,542	0,361
,5	156,826	11 116,212	140,670	9,700	0,400	113 429,059	7 561,815	199,819	0,400
,6	307,201	11 116,170	150,375	9,101	0,441	120 990,845	7 561,788	214,098	0,441
,7	467,283	11 116,124	160,082	0,46	0,486	128 552,603	7 561,758	228,377	0,486
,8	637,071	11 116,077	169,788	9,700	0,535	136 114,350	7 561,727	242,658	0,535
,9	816,568	11 116,026	179,493	0,54	0,590	143 676,023	7 561,693	256,940	0,590
2,0	242 005,774	11 116,006	189,206	9,710	0,655	151 237,682	7 561,655	271,223	0,655

$\psi = 47,2^\circ$

$\lambda^\circ$	$\chi_m$	$\frac{\Delta\chi_y}{\Delta\chi_x}$	$\frac{\Delta\chi_y}{\Delta\chi_x}$	$\frac{\Delta\chi_y}{\Delta\chi_x}$	$\frac{\Delta\chi_y}{\Delta\chi_x}$	$\gamma_m$	$\frac{\Delta\gamma_y}{\Delta\gamma_x}$	$\frac{\Delta\gamma_y}{\Delta\gamma_x}$	$\frac{\Delta\gamma_y}{\Delta\gamma_x}$
0,0	228 949,191	11 116,226	4,851	194	0,000	0,000	7 576,252	14,247	0,00
,1	954,042	11 116,224	14,247	9,102	0,023	7 576,252	7 576,252	14,247	0,023
,2	968,595	11 116,221	14,253	9,700	0,045	15 152,503	7 576,251	14,247	0,045
,3	992,851	11 116,214	24,256	9,102	0,069	22 728,750	7 576,247	14,247	0,069
,4	228 026,609	11 116,204	33,958	0,10	0,093	30 304,991	7 576,241	14,247	0,093
,5	070,409	11 116,203	43,660	9,704	0,116	37 884,226	7 576,235	14,248	0,116
,6	123,833	11 116,208	53,364	9,102	0,140	45 457,452	7 576,226	14,248	0,140
,7	186,899	11 116,202	63,066	9,704	0,169	53 033,668	7 576,216	14,249	0,169
,8	259,669	11 116,242	72,770	0,21	0,195	60 609,871	7 576,203	14,251	0,195
,9	342,143	11 116,219	82,474	9,704	0,223	68 186,061	7 576,188	14,253	0,223
1,0	434,321	11 116,194	92,178	9,104	0,255	75 762,255	7 576,174	14,255	0,255
,1	536,203	11 116,168	101,882	0,29	0,288	83 338,391	7 576,156	14,257	0,288
,2	647,792	11 116,137	111,589	9,707	0,324	90 914,528	7 576,137	14,251	0,324
,3	769,086	11 116,104	121,294	9,104	0,361	98 490,645	7 576,117	14,253	0,361
,4	900,086	11 116,070	131,000	0,39	0,400	106 066,739	7 576,094	14,255	0,400
,5	230 040,794	11 116,032	140,708	9,708	0,441	113 642,808	7 576,065	14,254	0,441
,6	191,210	11 116,001	150,416	9,104	0,486	121 218,951	7 576,043	14,258	0,486
,7	351,335	11 115,948	160,125	0,43	0,535	128 794,866	7 576,015	14,257	0,535
,8	521,170	11 115,901	169,835	9,710	0,590	136 370,852	7 575,986	14,259	0,590
,9	700,715	11 115,855	179,545	9,112	0,655	143 946,806	7 575,952	14,261	0,655
2,0	889,972	11 115,825	189,257	9,715	0,730	151 522,726	7 575,920	14,263	0,730

$\psi = 47.5^\circ$

$\lambda^\circ$	$X_m$	$\frac{\Delta X_m}{\Delta X_A}$	$\frac{\Delta X_m}{\Delta X_A}$	$Y_m$	$\frac{\Delta Y_m}{\Delta Y_A}$	$\frac{\Delta Y_m}{\Delta Y_A}$
0.0	262 299,750	11	116,939	0,000	0,000	896
			4,184		7 533,441	14,317
			9,694			001
.1	303,597	11	116,907	7 533,441	14,316	024
			14,541		7 533,440	14,317
			9,694			005
.2	318,138	11	116,903	15 066,881	28,632	047
			24,255		7 533,435	14,305
			9,695			066
.3	342,373	11	116,895	22 600,316	43,860	086
			33,930		7 533,430	14,317
			9,693			009
.4	376,303	11	116,884	30 133,746	57,267	093
			43,623		7 533,421	14,317
			9,696			009
.5	419,926	11	116,871	37 667,167	71,584	116
			55,519		7 533,412	14,312
			9,691			012
.6	473,245	11	116,854	45 200,579	85,902	139
			63,013		7 533,400	14,318
			9,695			014
.7	536,288	11	116,835	52 733,979	100,220	162
			72,708		7 533,386	14,319
			9,696			015
.8	609,966	11	116,813	60 267,365	114,539	185
			82,404		7 533,371	14,319
			9,692			019
.9	691,370	11	116,788	67 800,736	128,859	207
			92,100		7 533,352	14,319
			9,697			019
1.0	783,470	11	116,760	75 334,088	143,178	231
			101,797		7 533,333	14,321
			9,691			021
.1	885,267	11	116,729	82 867,421	157,499	254
			111,494		7 533,316	14,325
			9,687			025
.2	996,761	11	116,694	90 400,733	171,821	277
			121,191		7 533,287	14,322
			9,699			025
.3	263 117,952	11	116,658	97 934,020	186,143	301
			130,690		7 533,262	14,324
			9,699			028
.4	248,942	11	116,617	105 467,282	200,467	322
			140,269		7 533,234	14,326
			9,700			029
.5	389,931	11	116,574	113 000,516	214,791	347
			150,289		7 533,203	14,326
			9,700			032
.6	539,720	11	116,528	120 533,721	229,117	370
			159,989		7 533,173	14,327
			9,702			032
.7	699,709	11	116,479	128 066,894	243,441	393
			163,691		7 533,140	14,326
			9,702			037
.8	869,400	11	116,426	135 600,034	257,773	414
			179,393		7 533,103	14,329
			9,703			055
.9	264 048,793	11	116,371	143 133,137	272,102	438
			189,096		7 533,066	14,330
			9,703			039
2.0	237,889			150 666,203		

$\psi = 47.4^\circ$

$\lambda^\circ$	$X_m$	$\frac{\Delta X_m}{\Delta X_A}$	$\frac{\Delta X_m}{\Delta X_A}$	$Y_m$	$\frac{\Delta Y_m}{\Delta Y_A}$	$\frac{\Delta Y_m}{\Delta Y_A}$
0.0	251 182,037	11	116,713	0,000	0,000	890
			4,184		7 547,735	14,302
			9,697			002
.1	186,885	11	116,712	7 547,735	14,294	022
			14,545		7 547,733	14,293
			9,697			004
.2	201,430	11	116,708	15 095,648	28,587	046
			24,242		7 547,729	14,294
			9,698			066
.3	225,672	11	116,701	22 643,197	42,981	086
			33,340		7 547,723	14,293
			9,696			007
.4	259,612	11	116,691	30 190,920	57,174	093
			43,636		7 547,716	14,295
			9,698			009
.5	303,248	11	116,679	37 739,636	71,469	115
			53,534		7 547,707	14,292
			9,695			012
.6	356,582	11	116,663	45 286,343	85,764	138
			63,032		7 547,695	14,295
			9,697			014
.7	419,614	11	116,644	52 834,038	100,059	161
			72,729		7 547,681	14,295
			9,700			014
.8	492,343	11	116,623	60 381,719	114,254	185
			82,423		7 547,667	14,297
			9,698			017
.9	574,772	11	116,598	67 929,386	128,550	209
			92,127		7 547,650	14,298
			9,699			020
1.0	666,899	11	116,571	75 477,036	142,948	230
			101,826		7 547,630	14,297
			9,701			020
.1	769,725	11	116,542	83 024,666	157,245	254
			111,521		7 547,610	14,293
			9,700			020
.2	880,252	11	116,509	90 572,276	171,543	278
			121,227		7 547,587	14,300
			9,702			025
.3	252 001,479	11	116,473	98 119,863	185,843	300
			130,929		7 547,562	14,300
			9,701			028
.4	132,408	11	116,434	105 667,425	200,143	324
			140,630		7 547,536	14,302
			9,703			029
.5	273,038	11	116,393	113 214,961	214,445	346
			150,333		7 547,507	14,302
			9,703			030
.6	423,371	11	116,349	120 762,468	228,747	370
			160,036		7 547,477	14,304
			9,705			032
.7	583,407	11	116,302	128 309,945	243,051	393
			163,141		7 547,445	14,302
			9,705			035
.8	753,148	11	116,252	135 857,390	257,356	417
			173,446		7 547,410	14,307
			9,706			036
.9	932,594	11	116,199	143 404,800	271,653	439
			183,132		7 547,374	14,309
			9,707			038
2.0	253 121,746			150 952,174		

$\psi = 47.7^\circ$

$\lambda^\circ$	X m	$\frac{\Delta X Y}{\Delta X \Delta \lambda}$	$\frac{\Delta X X Y}{\Delta X \Delta \lambda}$	$\frac{\Delta X Y X}{\Delta X \Delta \lambda}$	$\frac{\Delta X X X}{\Delta X \Delta \lambda}$	Y m	$\frac{\Delta Y X}{\Delta Y \Delta \lambda}$	$\frac{\Delta Y Y}{\Delta Y \Delta \lambda}$	$\frac{\Delta Y X X}{\Delta Y \Delta \lambda}$	$\frac{\Delta Y X Y}{\Delta Y \Delta \lambda}$
0,0	284 532,761	11 117,286	14,684	185	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
,1	537,605	11 117,295	14,532	194	7 504,785	7 504,785	14,365	14,365	14,365	14,365
,2	552,137	11 117,290	14,320	194	7 504,779	7 504,779	14,363	14,363	14,363	14,363
,3	570,357	11 117,282	14,122	194	7 504,772	7 504,772	14,363	14,363	14,363	14,363
,4	610,265	11 117,271	13,936	193	7 504,764	7 504,764	14,363	14,363	14,363	14,363
,5	652,861	11 117,257	13,765	192	7 504,753	7 504,753	14,363	14,363	14,363	14,363
,6	707,146	11 117,239	13,612	192	7 504,741	7 504,741	14,363	14,363	14,363	14,363
,7	770,120	11 117,218	13,474	191	7 504,725	7 504,725	14,363	14,363	14,363	14,363
,8	842,783	11 117,194	13,350	191	7 504,709	7 504,709	14,363	14,363	14,363	14,363
,9	925,136	11 117,167	13,240	189	7 504,650	7 504,650	14,363	14,363	14,363	14,363
1,0	285 017,179	11 117,136	13,143	188	7 504,501	7 504,501	14,364	14,364	14,364	14,364
,1	119,912	11 117,102	13,054	188	7 504,668	7 504,668	14,366	14,366	14,366	14,366
,2	230,336	11 117,065	12,974	187	7 504,619	7 504,619	14,368	14,368	14,368	14,368
,3	351,451	11 117,026	12,902	184	7 504,530	7 504,530	14,371	14,371	14,371	14,371
,4	482,259	11 116,983	12,837	183	7 504,592	7 504,592	14,370	14,370	14,370	14,370
,5	622,760	11 116,936	12,778	181	7 504,567	7 504,567	14,371	14,371	14,371	14,371
,6	772,955	11 116,886	12,724	179	7 504,517	7 504,517	14,374	14,374	14,374	14,374
,7	932,844	11 116,833	12,674	177	7 504,460	7 504,460	14,376	14,376	14,376	14,376
,8	286 102,428	11 116,777	12,627	175	7 504,421	7 504,421	14,376	14,376	14,376	14,376
,9	281,709	11 116,717	12,584	173	7 504,351	7 504,351	14,377	14,377	14,377	14,377
2,0	470,686	116,717	12,544	172	150 032,876	150 032,876	14,377	14,377	14,377	14,377

$\psi = 47.6^\circ$

$\lambda^\circ$	X m	$\frac{\Delta X Y}{\Delta X \Delta \lambda}$	$\frac{\Delta X X Y}{\Delta X \Delta \lambda}$	$\frac{\Delta X Y X}{\Delta X \Delta \lambda}$	$\frac{\Delta X X X}{\Delta X \Delta \lambda}$	Y m	$\frac{\Delta Y X}{\Delta Y \Delta \lambda}$	$\frac{\Delta Y Y}{\Delta Y \Delta \lambda}$	$\frac{\Delta Y X X}{\Delta Y \Delta \lambda}$	$\frac{\Delta Y X Y}{\Delta Y \Delta \lambda}$
0,0	273 415,659	11 117,000	14,685	184	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
,1	420,504	11 117,011	14,537	194	7 519,125	7 519,125	14,340	14,340	14,340	14,340
,2	435,041	11 117,006	14,327	194	7 519,123	7 519,123	14,340	14,340	14,340	14,340
,3	459,268	11 117,000	14,130	194	7 519,118	7 519,118	14,340	14,340	14,340	14,340
,4	493,187	11 117,008	13,939	193	7 519,113	7 519,113	14,341	14,341	14,341	14,341
,5	536,797	11 117,064	13,762	193	7 519,104	7 519,104	14,340	14,340	14,340	14,340
,6	590,039	11 117,047	13,601	192	7 519,094	7 519,094	14,341	14,341	14,341	14,341
,7	653,093	11 117,027	13,454	191	7 519,082	7 519,082	14,341	14,341	14,341	14,341
,8	725,779	11 117,004	13,322	190	7 519,067	7 519,067	14,342	14,342	14,342	14,342
,9	808,158	11 116,978	13,203	189	7 519,051	7 519,051	14,342	14,342	14,342	14,342
1,0	900,230	11 116,949	13,095	187	7 519,033	7 519,033	14,343	14,343	14,343	14,343
,1	274 001,996	11 116,916	13,000	186	7 519,012	7 519,012	14,344	14,344	14,344	14,344
,2	113,455	11 116,881	12,919	184	7 518,998	7 518,998	14,346	14,346	14,346	14,346
,3	234,610	11 116,841	12,844	184	7 518,982	7 518,982	14,346	14,346	14,346	14,346
,4	365,459	11 116,800	12,774	183	7 518,965	7 518,965	14,346	14,346	14,346	14,346
,5	504,005	11 116,755	12,716	181	7 518,949	7 518,949	14,349	14,349	14,349	14,349
,6	656,248	11 116,707	12,662	179	7 518,938	7 518,938	14,348	14,348	14,348	14,348
,7	816,188	11 116,656	12,611	177	7 518,922	7 518,922	14,349	14,349	14,349	14,349
,8	984,826	11 116,602	12,562	175	7 518,907	7 518,907	14,353	14,353	14,353	14,353
,9	275 165,164	11 116,545	12,515	172	7 518,891	7 518,891	14,355	14,355	14,355	14,355
2,0	354,203	116,545	12,471	172	7 518,755	7 518,755	14,355	14,355	14,355	14,355



$\psi = 47.9^\circ$

$\lambda^\circ$	$X_m$	$\frac{\Delta X}{\Delta \lambda}$	$\frac{\Delta X}{\Delta \lambda}$	$Y_m$	$\frac{\Delta Y}{\Delta \lambda}$	$\frac{\Delta Y}{\Delta \lambda}$	$\lambda^\circ$
0,0	306 767,548	11 117,684	0,000	0,000	7 476,057	0,000	2,0
		4,684	14,385			14,005	
,1	772,389	11 117,682	7 490,422	7 490,422	7 476,037	14,003	
		11,222	14,395			14,408	
,2	786,911	11 117,677	7 490,420	14 980,842	7 476,031	14,404	
		24,203	14,386			14,959	
,3	811,114	11 117,669	7 490,416	22 471,258	7 476,030	14,410	
		35,686	14,387			14,008	
,4	845,000	11 117,657	7 490,409	29 961,667	7 476,023	14,009	
		43,267	14,387			14,409	
,5	888,567	11 117,641	7 490,401	37 452,068	7 476,014	14,411	
		53,249	14,389			14,409	
,6	941,816	11 117,623	7 490,389	44 942,457	7 476,002	14,409	
		62,531	14,389			14,412	
,7	307 004,747	11 117,601	7 490,377	52 432,834	7 475,995	14,411	
		72,615	14,387			14,410	
,8	077,362	11 117,574	7 490,360	59 923,194	7 475,974	14,410	
		82,297	14,389			14,019	
,9	159,659	11 117,545	7 490,344	67 413,538	7 475,955	14,412	
		91,380	14,389			14,412	
1,0	251,639	11 117,513	7 490,323	74 903,861	7 475,932	14,412	
		101,665	14,391			14,024	
,1	353,304	11 117,476	7 490,302	82 394,163	7 475,911	14,412	
		111,349	14,390			14,416	
,2	464,653	11 117,437	7 490,277	89 884,440	7 475,887	14,416	
		121,024	14,390			14,029	
,3	585,687	11 117,394	7 490,251	97 374,691	7 475,865	14,414	
		130,720	14,389			14,416	
,4	716,407	11 117,347	7 490,222	104 864,913	7 475,830	14,416	
		140,406	14,390			14,032	
,5	856,813	11 117,298	7 490,191	112 355,104	7 475,798	14,416	
		150,093	14,390			14,035	
,6	308 006,906	11 117,244	7 490,159	119 845,263	7 475,765	14,417	
		159,781	14,390			14,035	
,7	166,687	11 117,187	7 490,133	127 335,386	7 475,728	14,420	
		169,470	14,389			14,040	
,8	336,157	11 117,125	7 490,106	134 825,472	7 475,688	14,421	
		177,155	14,390			14,421	
,9	515,316	11 117,062	7 490,084	142 315,517	7 475,647	14,421	
		186,850	14,400			14,423	
2,0	704,166	11 117,000	7 490,062	149 805,521	7 475,604	14,423	

$\psi = 47.8^\circ$

$\lambda^\circ$	$X_m$	$\frac{\Delta X}{\Delta \lambda}$	$\frac{\Delta X}{\Delta \lambda}$	$Y_m$	$\frac{\Delta Y}{\Delta \lambda}$	$\frac{\Delta Y}{\Delta \lambda}$	$\lambda^\circ$
0,0	295 650,057	11 117,491	0,000	0,000	7 490,422	0,000	2,0
		4,843	14,385			14,005	
,1	654,900	11 117,487	7 490,422	7 490,422	7 490,422	14,005	
		14,327	14,395			14,356	
,2	669,427	11 117,484	7 490,416	14 980,842	7 490,416	14,356	
		24,212	14,386			14,007	
,3	693,639	11 117,475	7 490,409	22 471,258	7 490,409	14,008	
		33,897	14,387			14,008	
,4	727,336	11 117,464	7 490,401	29 961,667	7 490,401	14,009	
		43,582	14,387			14,012	
,5	771,118	11 117,449	7 490,389	37 452,068	7 490,389	14,012	
		53,267	14,389			14,012	
,6	824,285	11 117,431	7 490,377	44 942,457	7 490,377	14,012	
		62,955	14,389			14,017	
,7	887,338	11 117,409	7 490,360	52 432,834	7 490,360	14,016	
		72,639	14,389			14,016	
,8	959,977	11 117,385	7 490,344	59 923,194	7 490,344	14,016	
		82,326	14,389			14,021	
,9	296 042,203	11 117,356	7 490,323	67 413,538	7 490,323	14,021	
		92,012	14,391			14,021	
1,0	134,315	11 117,324	7 490,302	74 903,861	7 490,302	14,021	
		101,699	14,391			14,025	
,1	236,014	11 117,290	7 490,277	82 394,163	7 490,277	14,025	
		111,387	14,390			14,028	
,2	347,401	11 117,252	7 490,251	89 884,440	7 490,251	14,028	
		121,016	14,390			14,029	
,3	468,477	11 117,210	7 490,222	97 374,691	7 490,222	14,029	
		130,765	14,389			14,031	
,4	599,242	11 117,165	7 490,191	104 864,913	7 490,191	14,031	
		140,454	14,390			14,032	
,5	739,696	11 117,117	7 490,159	112 355,104	7 490,159	14,032	
		150,145	14,390			14,036	
,6	889,841	11 117,065	7 490,133	119 845,263	7 490,133	14,036	
		159,836	14,390			14,037	
,7	297 049,677	11 117,010	7 490,106	127 335,386	7 490,106	14,037	
		169,528	14,389			14,041	
,8	219,205	11 116,922	7 490,084	134 825,472	7 490,084	14,041	
		179,221	14,390			14,041	
,9	398,426	11 116,880	7 490,062	142 315,517	7 490,062	14,041	
		188,915	14,400			14,043	
2,0	587,341	11 116,800	7 490,040	149 805,521	7 490,040	14,043	

$\psi = 48,1^\circ$

$\lambda^\circ$	$X_m$	$\frac{\Delta X_m}{\Delta X_\lambda}$	$\frac{\Delta X_m}{\Delta X_\lambda}$	$Y_m$	$\frac{\Delta Y_m}{\Delta Y_\lambda}$	$\frac{\Delta Y_m}{\Delta Y_\lambda}$	$\Delta Y_\psi$	$\Delta Y_\lambda$
0,0	329 003,111	11 118,072	134	0,000	184	0,000	7 447,196	0,00
		4,857	9,678		9,678	14,403		14,403
,1	007,948	11 118,070	135	7 447,196	185	14,454	7 447,196	0,23
		14,512	9,674		9,674	14,855		14,855
,2	022,460	11 118,065	193	14 894,390	193	28,909	7 447,189	0,45
		24,186	9,675		9,675	14,454		14,454
,3	046,646	11 118,060	193	22 341,579	193	43,363	7 447,182	0,69
		35,861	9,674		9,674	14,805		14,805
,4	080,507	11 118,042	194	29 788,761	194	57,818	7 447,173	0,92
		43,525	9,676		9,676	14,456		14,456
,5	124,042	11 118,027	191	37 235,934	191	72,274	7 447,160	1,14
		53,211	9,675		9,675	14,456		14,456
,6	177,253	11 118,006	192	44 683,094	192	86,730	7 447,145	1,36
		62,886	9,676		9,676	14,016		14,016
,7	240,139	11 117,982	182	52 130,239	182	101,185	7 447,129	1,60
		72,562	9,675		9,675	14,457		14,457
,8	312,701	11 117,954	191	59 577,368	191	115,642	7 447,109	1,83
		82,237	9,678		9,678	14,457		14,457
,9	394,938	11 117,924	198	67 024,477	198	130,099	7 447,087	2,05
		91,515	9,675		9,675	14,024		14,024
1,0	486,953	11 117,888	188	74 471,564	188	144,556	7 447,063	2,29
		101,590	9,679		9,679	14,459		14,459
,1	588,443	11 117,850	187	81 918,627	187	159,015	7 447,037	2,51
		111,269	9,678		9,678	14,460		14,460
,2	699,712	11 117,809	197	89 365,664	197	173,475	7 447,007	2,73
		120,547	9,678		9,678	14,031		14,031
,3	820,659	11 117,761	195	96 812,671	195	187,935	7 446,976	2,96
		130,625	9,679		9,679	14,461		14,461
,4	951,284	11 117,711	184	104 259,647	184	202,396	7 446,942	3,19
		140,304	9,682		9,682	14,462		14,462
,5	330 091,588	11 117,659	180	111 706,589	180	216,858	7 446,906	3,42
		149,995	9,680		9,680	14,462		14,462
,6	241,573	11 117,605	179	119 153,495	179	231,322	7 446,866	3,65
		159,665	9,682		9,682	14,464		14,464
,7	401,238	11 117,540	178	126 600,361	178	245,786	7 446,828	3,88
		169,547	9,682		9,682	14,465		14,465
,8	570,985	11 117,476	174	134 047,187	174	260,252	7 446,781	4,11
		179,029	9,684		9,684	14,467		14,467
,9	749,614	11 117,407	174	141 493,968	174	274,719	7 446,735	4,33
		188,713	9,686		9,686	14,468		14,468
2,0	938,327			148 940,703				4,48

$\psi = 48,0^\circ$

$\lambda^\circ$	$X_m$	$\frac{\Delta X_m}{\Delta X_\lambda}$	$\frac{\Delta X_m}{\Delta X_\lambda}$	$Y_m$	$\frac{\Delta Y_m}{\Delta Y_\lambda}$	$\frac{\Delta Y_m}{\Delta Y_\lambda}$	$\Delta Y_\psi$	$\Delta Y_\lambda$
0,0	317 892,232	11 117,879	193	0,000	193	0,000	7 461,628	0,00
		4,859	9,678		9,678	14,402		14,402
,1	890,071	11 117,877	193	7 461,628	193	14,432	7 461,628	0,22
		14,517	9,678		9,678	14,432		14,432
,2	904,588	11 117,872	193	14 923,254	193	28,864	7 461,620	0,45
		24,195	9,679		9,679	14,431		14,431
,3	928,783	11 117,863	193	22 384,874	193	43,295	7 461,614	0,68
		35,874	9,677		9,677	14,006		14,006
,4	963,657	11 117,850	192	29 846,488	192	57,727	7 461,605	0,91
		43,551	9,680		9,680	14,432		14,432
,5	318 006,206	11 117,834	193	37 308,093	193	72,159	7 461,593	1,15
		53,231	9,678		9,678	14,433		14,433
,6	059,439	11 117,814	192	44 769,686	192	86,592	7 461,578	1,39
		62,909	9,679		9,679	14,016		14,016
,7	123,348	11 117,791	191	52 231,264	191	101,025	7 461,563	1,60
		72,588	9,680		9,680	14,434		14,434
,8	194,936	11 117,765	189	59 692,827	189	115,459	7 461,543	1,83
		82,268	9,680		9,680	14,434		14,434
,9	277,204	11 117,734	190	67 154,370	190	129,893	7 461,522	2,05
		91,948	9,680		9,680	14,023		14,023
1,0	369,152	11 117,701	187	74 615,892	187	144,328	7 461,499	2,28
		101,628	9,682		9,682	14,436		14,436
,1	470,780	11 117,663	187	82 077,391	187	158,764	7 461,473	2,51
		111,310	9,681		9,681	14,436		14,436
,2	586,090	11 117,622	186	89 538,864	186	173,200	7 461,445	2,73
		120,991	9,682		9,682	14,031		14,031
,3	703,081	11 117,578	183	97 000,309	183	187,638	7 461,414	2,97
		130,673	9,683		9,683	14,438		14,438
,4	833,754	11 117,530	181	104 461,723	181	202,076	7 461,382	3,20
		140,356	9,682		9,682	14,036		14,036
,5	974,110	11 117,478	181	111 923,105	181	216,516	7 461,346	3,42
		150,040	9,684		9,684	14,440		14,440
,6	319 124,150	11 117,424	178	119 384,451	178	230,956	7 461,308	3,66
		159,724	9,685		9,685	14,442		14,442
,7	283,874	11 117,364	176	126 845,759	176	245,398	7 461,268	3,89
		169,409	9,686		9,686	14,042		14,042
,8	453,283	11 117,302	174	134 307,027	174	259,840	7 461,226	4,12
		179,095	9,688		9,688	14,445		14,445
,9	632,378	11 117,236	171	141 768,253	171	274,285	7 461,181	4,34
		188,783	9,690		9,690	14,446		14,446
2,0	821,161			149 229,434				4,46

$\psi = 48,2^\circ$

$\lambda^\circ$	$X_m$	$\frac{\Delta X_m}{\Delta \lambda}$	$\frac{\Delta X_m}{\Delta \lambda}$	$Y_m$	$\frac{\Delta Y_m}{\Delta \lambda}$	$\frac{\Delta Y_m}{\Delta \lambda}$
0,0	340 121,183	11 118,266	194	0,000	0,000	000
		4,935	9,672	7 432,742	14,477	14,477
1	126,018	11 118,265	192	7 432,742	14,477	14,477
		14,504	9,670	14 865,481	28,954	28,954
2	140,525	11 118,259	194	7 432,752	14,476	14,476
		24,177	9,670	22 298,216	28,952	28,952
3	164,702	11 118,249	193	43,432	14,478	14,478
		33,847	9,673	29 730,943	28,951	28,951
4	198,549	11 118,236	193	57,910	14,479	14,479
		43,550	9,670	37 163,660	28,950	28,950
5	242,069	11 118,218	192	72,388	14,481	14,481
		53,198	9,672	44 596,364	28,948	28,948
6	295,259	11 118,198	191	86,865	14,479	14,479
		62,862	9,672	52 029,054	28,947	28,947
7	358,121	11 118,174	190	101,354	14,480	14,480
		72,554	9,673	59 461,729	28,946	28,946
8	430,655	11 118,145	189	115,825	14,481	14,481
		82,207	9,672	66 894,378	28,945	28,945
9	512,862	11 118,112	190	130,304	14,481	14,481
		91,875	9,673	74 327,008	28,944	28,944
1,0	604,741	11 118,076	189	144,785	14,483	14,483
		101,552	9,673	81 759,612	28,943	28,943
1	706,293	11 118,037	186	159,265	14,482	14,482
		111,227	9,673	89 192,189	28,942	28,942
2	817,520	11 117,993	185	173,748	14,483	14,483
		120,900	9,675	96 624,736	28,941	28,941
3	938,450	11 117,946	183	188,231	14,483	14,483
		130,575	9,677	104 057,251	28,940	28,940
4	341 068,995	11 117,895	181	202,710	14,486	14,486
		140,252	9,675	111 489,731	28,939	28,939
5	209,247	11 117,839	180	217,201	14,486	14,486
		149,927	9,677	118 922,173	28,938	28,938
6	369,174	11 117,780	179	231,687	14,487	14,487
		159,604	9,679	126 354,575	28,937	28,937
7	518,778	11 117,718	176	246,174	14,489	14,489
		169,283	9,677	133 786,935	28,936	28,936
8	688,051	11 117,650	176	260,663	14,489	14,489
		178,960	9,681	141 219,249	28,935	28,935
9	867,021	11 117,581	172	275,152	14,492	14,492
		188,641	9,682	148 651,516	28,934	28,934
2,0	342 055,662					

$\psi = 48,3^\circ$

$\lambda^\circ$	$X_m$	$\frac{\Delta X_m}{\Delta \lambda}$	$\frac{\Delta X_m}{\Delta \lambda}$	$Y_m$	$\frac{\Delta Y_m}{\Delta \lambda}$	$\frac{\Delta Y_m}{\Delta \lambda}$
0,0	351 239,449	11 118,460	193	0,000	0,000	000
		4,934	9,666	7 418,265	14,500	14,500
1	244,283	11 118,457	195	7 418,265	14,500	14,500
		14,500	9,668	14 836,527	28,999	28,999
2	258,783	11 118,452	193	14 836,527	14,501	14,501
		24,168	9,666	22 254,784	28,998	28,998
3	282,951	11 118,442	193	22 254,784	14,500	14,500
		33,834	9,668	29 673,033	28,997	28,997
4	316,785	11 118,429	192	29 673,033	14,501	14,501
		43,502	9,668	37 091,272	28,996	28,996
5	360,287	11 118,411	192	37 091,272	14,501	14,501
		53,170	9,668	44 509,498	28,995	28,995
6	413,457	11 118,389	192	44 509,498	14,502	14,502
		62,838	9,667	51 927,709	28,994	28,994
7	476,295	11 118,364	190	51 927,709	14,502	14,502
		72,505	9,669	59 345,901	28,993	28,993
8	548,800	11 118,335	189	59 345,901	14,503	14,503
		82,174	9,669	66 764,074	28,992	28,992
9	630,974	11 118,302	188	66 764,074	14,503	14,503
		91,843	9,670	74 182,223	28,991	28,991
1,0	722,817	11 118,265	187	74 182,223	14,503	14,503
		101,515	9,670	81 600,346	28,990	28,990
1	824,330	11 118,223	187	81 600,346	14,504	14,504
		111,183	9,670	89 018,441	28,989	28,989
2	935,513	11 118,178	185	89 018,441	14,506	14,506
		120,853	9,671	96 436,505	28,988	28,988
3	352 056,366	11 118,129	184	96 436,505	14,507	14,507
		130,524	9,672	103 854,536	28,987	28,987
4	186,890	11 118,076	183	103 854,536	14,507	14,507
		140,196	9,672	111 272,630	28,986	28,986
5	327,086	11 118,019	181	111 272,630	14,509	14,509
		149,868	9,674	118 690,466	28,985	28,985
6	476,954	11 117,959	179	118 690,466	14,511	14,511
		159,542	9,673	126 108,401	28,984	28,984
7	636,496	11 117,894	176	126 108,401	14,511	14,511
		169,215	9,676	133 526,272	28,983	28,983
8	805,711	11 117,826	174	133 526,272	14,512	14,512
		178,891	9,675	140 944,097	28,982	28,982
9	984,602	11 117,753	172	140 944,097	14,514	14,514
		188,562	9,676	148 361,872	28,981	28,981
2,0	353 173,168					

$\varphi = 48,5^\circ$

$\lambda^\circ$	$\chi_m$	$\frac{\Delta \chi_m}{\Delta \lambda^\circ}$	$\frac{\Delta \chi_m}{\Delta \lambda^\circ}$	$\gamma_m$	$\frac{\Delta \gamma_m}{\Delta \lambda^\circ}$	$\frac{\Delta \gamma_m}{\Delta \lambda^\circ}$	$\frac{\Delta \gamma_m}{\Delta \lambda^\circ}$
0,0	373 476,562	11 119,847	194	0,000	0,000	0,000	0,000
		4,950	9,656		7 389,242	14,005	14,005
,1	481,392	11 119,845	193	7 389,242	14,546	0,022	0,022
		14,488	9,660		7 389,239	14,545	14,545
,2	495,880	11 119,839	193	14 778,481	29,091	0,046	0,046
		24,148	9,659		7 389,233	14,545	14,545
,3	520,028	11 119,829	192	22 167,714	43,636	0,069	0,069
		35,807	9,659		7 389,226	14,011	14,011
,4	553,835	11 119,814	192	29 556,940	58,183	0,090	0,090
		43,466	9,660		7 389,215	14,546	14,546
,5	597,301	11 118,796	191	36 946,155	72,729	0,114	0,114
		53,126	9,660		7 389,201	14,547	14,547
,6	650,427	11 118,772	190	44 335,356	87,276	0,137	0,137
		82,786	9,660		7 389,185	14,020	14,020
,7	713,213	11 118,746	190	51 724,541	101,823	0,158	0,158
		72,446	9,661		7 389,165	14,547	14,547
,8	785,659	11 118,715	189	59 113,706	116,370	0,181	0,181
		82,107	9,661		7 389,144	14,548	14,548
,9	867,766	11 118,679	189	66 502,850	130,918	0,204	0,204
		91,768	9,661		7 389,128	14,028	14,028
1,0	959,534	11 118,639	189	73 891,970	145,467	0,227	0,227
		101,429	9,662		7 389,092	14,549	14,549
,1	374 060,963	11 118,596	187	81 281,062	160,016	0,250	0,250
		111,091	9,662		7 389,065	14,034	14,034
,2	172,034	11 118,549	187	88 670,125	174,567	0,271	0,271
		120,754	9,663		7 389,029	14,550	14,550
,3	292,808	11 118,496	184	96 059,154	189,117	0,296	0,296
		130,417	9,663		7 388,995	14,553	14,553
,4	423,225	11 118,440	182	103 448,419	203,670	0,317	0,317
		140,080	9,663		7 388,956	14,040	14,040
,5	563,305	11 118,375	182	110 837,105	218,223	0,340	0,340
		149,745	9,665		7 388,916	14,554	14,554
,6	713,050	11 118,316	178	118 226,021	232,777	0,363	0,363
		159,410	9,667		7 388,872	14,556	14,556
,7	842,460	11 118,249	175	125 614,893	247,332	0,384	0,384
		169,077	9,666		7 388,826	14,050	14,050
,8	375 041,537	11 118,174	175	133 003,719	261,890	0,406	0,406
		178,743	9,668		7 388,776	14,557	14,557
,9	220,280	11 118,097	173	140 392,495	276,447	0,430	0,430
		188,411	9,668		7 388,725	14,560	14,560
2,0	408,691			147 781,220		0,94	0,94

$\varphi = 48,4^\circ$

$\lambda^\circ$	$\chi_m$	$\frac{\Delta \chi_m}{\Delta \lambda^\circ}$	$\frac{\Delta \chi_m}{\Delta \lambda^\circ}$	$\gamma_m$	$\frac{\Delta \gamma_m}{\Delta \lambda^\circ}$	$\frac{\Delta \gamma_m}{\Delta \lambda^\circ}$	$\frac{\Delta \gamma_m}{\Delta \lambda^\circ}$
0,0	362 357,909	11 119,653	194	0,000	0,000	0,000	0,000
		4,831	9,664		7 403,765	14,563	14,563
,1	362,740	11 119,650	193	7 403,765	14,523	0,022	0,022
		14,195	9,663		7 403,752	14,523	14,523
,2	377,225	11 119,645	194	14 807,527	29,046	0,045	0,045
		24,158	9,663		7 403,756	14,523	14,523
,3	401,393	11 119,635	194	22 211,283	43,569	0,067	0,067
		35,021	9,664		7 403,749	14,032	14,032
,4	435,214	11 119,621	193	29 615,032	58,092	0,091	0,091
		43,484	9,664		7 403,738	14,523	14,523
,5	478,698	11 119,603	193	37 018,770	72,615	0,114	0,114
		53,148	9,665		7 403,725	14,524	14,524
,6	531,846	11 119,581	192	44 422,495	87,139	0,137	0,137
		62,813	9,663		7 403,709	14,038	14,038
,7	594,659	11 119,554	192	51 826,204	101,663	0,160	0,160
		72,476	9,665		7 403,691	14,526	14,526
,8	667,135	11 119,524	191	59 229,895	116,189	0,181	0,181
		82,141	9,665		7 403,669	14,525	14,525
,9	749,276	11 119,490	189	66 633,564	130,714	0,202	0,202
		91,806	9,665		7 403,648	14,027	14,027
1,0	841,082	11 119,452	187	74 037,210	145,240	0,227	0,227
		101,471	9,667		7 403,619	14,527	14,527
,1	942,553	11 119,410	186	81 440,829	159,767	0,249	0,249
		111,138	9,682		7 403,590	14,527	14,527
,2	363 053,691	11 119,363	186	88 844,419	174,284	0,272	0,272
		120,804	9,667		7 403,558	14,526	14,526
,3	174,495	11 119,313	183	96 247,977	188,823	0,294	0,294
		130,471	9,668		7 403,524	14,529	14,529
,4	304,966	11 119,259	181	103 651,501	203,352	0,318	0,318
		140,139	9,629		7 403,487	14,030	14,030
,5	445,103	11 119,200	180	111 054,988	217,883	0,340	0,340
		149,808	9,669		7 403,447	14,531	14,531
,6	594,913	11 119,137	179	118 459,435	232,414	0,363	0,363
		159,477	9,670		7 403,405	14,533	14,533
,7	754,390	11 119,070	178	125 864,840	246,947	0,386	0,386
		169,147	9,670		7 403,360	14,034	14,034
,8	923,537	11 119,000	174	133 265,200	261,481	0,409	0,409
		178,818	9,672		7 403,312	14,536	14,536
,9	364 102,355	11 117,925	172	140 666,512	276,017	0,430	0,430
		188,490	9,673		7 403,261	14,536	14,536
2,0	290,845			148 071,773		0,92	0,92

$\psi = 48,7^\circ$

$\lambda^\circ$	$X_m$	$\frac{\Delta X \psi}{\Delta X \lambda}$	$\frac{\Delta X \psi}{\Delta X \lambda}$	$Y_m$	$\frac{\Delta Y \psi}{\Delta Y \lambda}$	$\frac{\Delta Y \psi}{\Delta Y \lambda}$	$\frac{\Delta Y \psi}{\Delta Y \lambda}$
0,0	395 714,450	11 119,234	193 002	0,000	0,000	7 360,128	14,591
		4,825	9,651				14,003
,1	719,275	11 119,232	193 022	7 360,128	14,591	7 360,128	14,003
		4,825	9,651				14,003
,2	733,751	11 119,225	193 044	14 720,253	29,181	7 360,120	14,592
		24,127	9,650				14,005
,3	757,878	11 119,214	193 015	22 080,373	43,773	7 360,111	14,591
		33,777	9,652				14,012
,4	791,655	11 119,199	192 091	29 440,484	58,364	7 360,099	14,583
		43,423	9,650				14,013
,5	835,084	11 119,179	192 092	36 800,583	72,955	7 360,086	14,592
		53,079	9,653				14,018
,6	888,163	11 119,156	190 030	44 160,669	87,547	7 360,068	14,593
		62,732	9,651				14,020
,7	950,895	11 119,126	191 031	51 520,737	102,140	7 360,049	14,587
		72,385	9,652				14,023
,8	396 023,278	11 119,094	189 037	58 880,785	116,732	7 360,025	14,593
		82,035	9,653				14,026
,9	105,313	11 119,057	188 042	66 240,810	131,325	7 355,999	14,594
		91,688	9,652				14,028
1,0	197,001	11 118,045	193 047	73 600,809	145,919	7 355,971	14,595
		101,341	9,653				14,031
,1	298,342	11 118,968	187 050	80 960,780	160,514	7 359,940	14,596
		110,934	9,654				14,036
,2	409,336	11 118,918	186 054	88 320,720	175,110	7 359,904	14,596
		120,648	9,654				14,036
,3	529,984	11 118,864	185 053	95 680,624	189,706	7 359,868	14,597
		130,303	9,656				14,041
,4	660,287	11 118,805	181 055	103 040,492	204,303	7 359,827	14,598
		139,959	9,655				14,042
,5	800,246	11 118,740	181 057	110 400,319	218,901	7 359,785	14,600
		148,614	9,657				14,046
,6	949,860	11 118,673	178 057	117 760,104	233,501	7 359,739	14,601
		158,271	9,658				14,049
,7	397 109,431	11 118,600	177 055	125 119,843	248,102	7 359,690	14,602
		168,929	9,658				14,052
,8	278,060	11 118,523	175 055	132 479,533	262,704	7 359,636	14,605
		178,587	9,659				14,055
,9	456,647	11 118,442	172 086	139 839,171	277,307	7 359,583	14,604
		188,246	9,661				14,057
2,0	644,893			147 998,754			

$\psi = 48,6^\circ$

$\lambda^\circ$	$X_m$	$\frac{\Delta X \psi}{\Delta X \lambda}$	$\frac{\Delta X \psi}{\Delta X \lambda}$	$Y_m$	$\frac{\Delta Y \psi}{\Delta Y \lambda}$	$\frac{\Delta Y \psi}{\Delta Y \lambda}$	$\frac{\Delta Y \psi}{\Delta Y \lambda}$
0,0	384 595,409	11 119,041	193 003	0,000	0,000	7 374,636	14,568
		4,828	9,654				14,002
,1	600,237	11 119,038	194 023	7 374,636	14,568	7 374,636	14,003
		14,482	9,652				14,003
,2	614,719	11 119,032	193 044	14 749,390	29,137	7 374,628	14,568
		24,136	9,654				14,009
,3	638,857	11 119,021	193 015	22 124,078	43,705	7 374,619	14,568
		33,732	9,656				14,010
,4	672,649	11 119,006	192 091	29 498,757	58,273	7 374,609	14,568
		43,448	9,653				14,015
,5	716,097	11 118,987	192 092	36 873,426	72,843	7 374,604	14,568
		53,103	9,656				14,016
,6	769,200	11 118,963	193 030	44 248,080	87,411	7 374,638	14,570
		62,759	9,656				14,020
,7	831,959	11 119,936	190 031	51 622,718	101,984	7 374,618	14,579
		72,415	9,656				14,022
,8	904,374	11 118,904	190 036	58 997,336	116,551	7 374,596	14,571
		82,071	9,657				14,025
,9	986,445	11 118,868	189 040	66 371,932	131,122	7 374,571	14,572
		91,728	9,658				14,027
1,0	385 078,173	11 118,828	187 047	73 746,503	145,694	7 374,543	14,572
		101,388	9,658				14,031
,1	179,559	11 118,783	185 050	81 121,046	160,266	7 374,512	14,572
		111,044	9,657				14,032
,2	290,603	11 118,733	185 052	88 495,558	174,838	7 374,479	14,572
		120,701	9,659				14,037
,3	411,304	11 118,680	184 058	95 870,037	189,413	7 374,442	14,574
		130,381	9,659				14,039
,4	541,665	11 118,622	183 061	103 244,479	203,987	7 374,403	14,576
		140,020	9,661				14,041
,5	681,685	11 118,561	179 061	110 618,882	218,563	7 374,362	14,579
		149,681	9,661				14,046
,6	831,366	11 118,494	179 071	117 993,244	233,140	7 374,316	14,577
		159,342	9,661				14,047
,7	990,708	11 118,423	177 074	125 367,560	247,717	7 374,269	14,579
		169,003	9,663				14,050
,8	386 159,711	11 118,349	174 084	132 741,829	262,296	7 374,219	14,582
		178,666	9,663				14,054
,9	398,377	11 118,270	172 084	140 116,048	276,877	7 374,165	14,582
		188,330	9,665				14,056
2,0	596,707			147 490,213			

$\varphi = 48,9^\circ$

$\lambda^\circ$	$\chi_m$	$\frac{\Delta\chi_m}{\Delta\lambda}$	$\chi_m$	$\frac{\Delta\chi_m}{\Delta\lambda}$	$\gamma_m$	$\frac{\Delta\gamma}{\Delta\lambda}$	$\frac{\Delta^2\chi_m}{\Delta\lambda^2}$	$\frac{\Delta^2\gamma}{\Delta\lambda^2}$
0,0	417 953,111	11 119,620	194	0,000	0,000	7 330,924	000	000
		4,821	002	14,613			002	14,613
,1	957,952	11 119,519	193	14,613	7 330,924	14,613	002	002
		14,662	002	14,613			002	14,613
,2	972,394	11 119,611	193	29,227	14 661,845	29,227	044	044
		24,105	012	14,613			009	14,613
,3	986,499	11 119,599	194	43,840	21 892,760	43,840	067	067
		33,746	015	14,613			012	14,613
,4	418 030,245	11 119,583	191	58,454	29 223,666	58,454	090	090
		43,288	021	14,613			015	14,613
,5	073,634	11 119,563	191	73,068	36 654,560	73,068	113	113
		53,031	026	14,613			018	14,613
,6	12,665	11 119,537	191	87,683	43 985,439	87,683	136	136
		62,673	043	14,613			021	14,613
,7	189,338	11 119,508	189	102,297	51 316,300	102,297	157	157
		72,511	056	14,613			024	14,613
,8	261,655	11 119,472	190	116,913	58 647,140	116,913	179	179
		81,560	039	14,613			027	14,613
,9	343,615	11 119,433	189	131,529	65 977,956	131,529	202	202
		91,603	044	14,613			030	14,613
1,0	435,218	11 119,389	188	146,145	73 308,745	146,145	225	225
		101,247	048	14,613			034	14,613
,1	536,465	11 119,341	186	160,762	80 639,504	160,762	248	248
		110,893	054	14,613			034	14,613
,2	647,358	11 119,287	185	175,381	87 970,229	175,381	271	271
		120,257	066	14,613			041	14,613
,3	767,895	11 119,230	183	189,998	95 300,920	189,998	293	293
		130,183	063	14,613			042	14,613
,4	898,078	11 119,167	183	204,619	102 631,570	204,619	314	314
		139,829	066	14,613			043	14,613
,5	419 037,987	11 119,103	182	219,240	109 962,178	219,240	336	336
		143,777	073	14,613			048	14,613
,6	187,384	11 119,028	180	233,862	117 292,741	233,862	359	359
		153,424	076	14,613			051	14,613
,7	346,508	11 118,952	177	248,485	124 623,256	248,485	382	382
		168,773	077	14,613			055	14,613
,8	515,281	11 118,871	175	263,109	131 953,720	263,109	405	405
		178,422	086	14,613			056	14,613
,9	693,703	11 118,785	173	277,735	139 284,129	277,735	427	427
		188,072	090	14,613			058	14,613
2,0	881,775		146 614,482					

$\varphi = 48,8^\circ$

$\lambda^\circ$	$\chi_m$	$\frac{\Delta\chi_m}{\Delta\lambda}$	$\chi_m$	$\frac{\Delta\chi_m}{\Delta\lambda}$	$\gamma_m$	$\frac{\Delta\gamma}{\Delta\lambda}$	$\frac{\Delta^2\chi_m}{\Delta\lambda^2}$	$\frac{\Delta^2\gamma}{\Delta\lambda^2}$
0,0	406 833,684	11 119,427	193	0,000	0,000	7 345,537	000	000
		4,823	002	14,613			002	14,613
,1	838,507	11 119,425	193	14,613	7 345,537	14,613	002	002
		14,469	9,647	14,613			007	14,613
,2	852,976	11 119,418	193	29,227	14 691,072	29,227	045	045
		24,116	9,647	14,613			008	14,613
,3	877,092	11 119,407	192	43,840	22 036,600	43,840	068	068
		33,763	9,646	14,613			012	14,613
,4	910,854	11 119,351	193	58,454	29 382,120	58,454	090	090
		43,403	9,647	14,613			014	14,613
,5	954,263	11 119,371	192	73,068	36 727,628	73,068	112	112
		53,055	9,646	14,613			019	14,613
,6	407 007,319	11 119,346	191	87,683	44 073,122	87,683	134	134
		62,702	9,645	14,613			019	14,613
,7	070,021	11 119,317	191	102,297	51 418,597	102,297	156	156
		72,251	9,647	14,613			024	14,613
,8	142,372	11 119,283	189	116,913	58 764,053	116,913	180	180
		81,998	9,648	14,613			027	14,613
,9	224,370	11 119,245	188	131,529	66 109,485	131,529	202	202
		91,646	9,648	14,613			030	14,613
1,0	316,016	11 119,202	187	146,145	73 454,890	146,145	225	225
		104,294	9,650	14,613			032	14,613
,1	417,310	11 119,155	186	160,762	80 800,266	160,762	248	248
		110,344	9,650	14,613			036	14,613
,2	528,254	11 119,104	183	175,381	88 145,610	175,381	269	269
		120,594	9,657	14,613			037	14,613
,3	648,848	11 119,047	183	189,998	95 490,918	189,998	295	295
		130,244	9,650	14,613			042	14,613
,4	779,092	11 119,986	181	204,619	102 836,189	204,619	316	316
		139,894	9,653	14,613			044	14,613
,5	918,986	11 119,221	180	219,240	110 181,418	219,240	338	338
		149,241	9,651	14,613			047	14,613
,6	068,533	11 119,851	177	233,862	117 526,603	233,862	360	360
		159,199	9,654	14,613			050	14,613
,7	227,721	11 119,777	175	248,485	124 871,741	248,485	382	382
		169,852	9,654	14,613			052	14,613
,8	396,583	11 118,698	173	263,109	132 216,829	263,109	405	405
		178,203	9,654	14,613			056	14,613
,9	575,089	11 118,614	171	277,735	139 561,864	277,735	427	427
		188,160	9,656	14,613			058	14,613
2,0	763,249		146 306,843					

$\psi = 49,0^\circ$

$\lambda^\circ$	$X_m$	$\frac{\Delta X_m}{\Delta \lambda}$	$\frac{\Delta X_m}{\Delta \lambda}$	$Y_m$	$\frac{\Delta Y_m}{\Delta \lambda}$	$\frac{\Delta Y_m}{\Delta \lambda}$
0,0	429 072,731	11 119,814	0,000	0,000	7 316,288	14,595
,1	077,550	11 119,814	0,000	7 316,288	14,595	0,000
,2	092,005	11 119,804	0,000	7 316,288	14,595	0,000
,3	116,098	11 119,793	0,000	7 316,279	14,595	0,000
,4	149,829	11 119,775	0,000	7 316,270	14,595	0,000
,5	193,197	11 119,754	0,000	7 316,268	14,595	0,000
,6	246,202	11 119,728	0,000	7 316,242	14,595	0,000
,7	308,846	11 119,697	0,000	7 316,223	14,595	0,000
,8	381,127	11 119,662	0,000	7 316,202	14,595	0,000
,9	463,048	11 119,622	0,000	7 316,178	14,595	0,000
1,0	554,607	11 119,577	0,000	7 316,151	14,595	0,000
,1	655,806	11 119,527	0,000	7 316,121	14,595	0,000
,2	766,645	11 119,473	0,000	7 316,088	14,595	0,000
,3	887,125	11 119,413	0,000	7 316,052	14,595	0,000
,4	1017,245	11 119,350	0,000	7 316,013	14,595	0,000
,5	1157,008	11 119,280	0,000	7 315,971	14,595	0,000
,6	1306,412	11 119,208	0,000	7 315,926	14,595	0,000
,7	1465,460	11 119,129	0,000	7 315,878	14,595	0,000
,8	1634,152	11 119,046	0,000	7 315,827	14,595	0,000
,9	1812,488	11 118,958	0,000	7 315,773	14,595	0,000
2,0	431 000,470	146 321,670	146 321,670	146 321,670	14,595	0,000

$\psi = 49,1^\circ$

$\lambda^\circ$	$X_m$	$\frac{\Delta X_m}{\Delta \lambda}$	$\frac{\Delta X_m}{\Delta \lambda}$	$Y_m$	$\frac{\Delta Y_m}{\Delta \lambda}$	$\frac{\Delta Y_m}{\Delta \lambda}$
0,0	440 192,245	11 120,006	0,000	0,000	7 301,630	14,681
,1	197,261	11 120,004	0,000	7 301,630	14,681	0,000
,2	211,809	11 119,997	0,000	7 301,627	14,681	0,000
,3	235,891	11 119,984	0,000	7 301,620	14,681	0,000
,4	269,604	11 119,968	0,000	7 301,611	14,681	0,000
,5	312,951	11 119,946	0,000	7 301,599	14,682	0,000
,6	365,930	11 119,913	0,000	7 301,582	14,681	0,000
,7	428,543	11 119,888	0,000	7 301,564	14,682	0,000
,8	500,789	11 119,852	0,000	7 301,542	14,683	0,000
,9	582,670	11 119,810	0,000	7 301,517	14,684	0,000
1,0	674,184	11 119,764	0,000	7 301,488	14,685	0,000
,1	775,233	11 119,713	0,000	7 301,452	14,686	0,000
,2	886,118	11 119,657	0,000	7 301,413	14,687	0,000
,3	1006,538	11 119,597	0,000	7 301,371	14,688	0,000
,4	1136,595	11 119,530	0,000	7 301,326	14,689	0,000
,5	1276,288	11 119,451	0,000	7 301,278	14,690	0,000
,6	1425,620	11 119,365	0,000	7 301,227	14,691	0,000
,7	1584,589	11 119,275	0,000	7 301,173	14,692	0,000
,8	1753,198	11 119,179	0,000	7 301,116	14,693	0,000
,9	1931,446	11 119,078	0,000	7 301,057	14,694	0,000
2,0	442 119,236	146 028,409	146 028,409	146 028,409	14,695	0,000

$\varphi = 49,3^\circ$

$\lambda^\circ$	X <sub>m</sub>	$\frac{\Delta X Y}{\Delta X \lambda}$	$\frac{\Delta X X Y}{\Delta X \lambda \lambda}$	$\frac{\Delta Y Y}{\Delta Y \lambda}$	$\frac{\Delta Y X Y}{\Delta Y \lambda \lambda}$	Y <sub>m</sub>	$\frac{\Delta Y Y}{\Delta Y \lambda}$	$\frac{\Delta Y X Y}{\Delta Y \lambda \lambda}$
0,0	462 432,751	11 120,392	193	0,000	0,000	0,000	7 272,246	0,000
		4,1811	9,623	7 286,949	14,703	14,726		14,726
,1	437,562	11 120,390	192	14,703	0,000	7 272,246	7 272,246	14,725
		14,454	9,622	7 286,946	14,703			14,726
,2	424,996	11 120,382	192	29,406	0,045	14 544,489	29,451	0,045
		24,056	9,624	7 286,959	14,705		7 272,236	14,716
,3	476,052	11 120,370	191	44,108	0,068	21 816,725	44,177	0,068
		33,680	9,622	7 286,930	14,704		7 272,226	14,726
,4	509,732	11 120,352	191	58,813	0,090	29 088,951	58,903	0,088
		43,302	9,624	7 286,917	14,704		7 272,213	14,726
,5	553,034	11 120,329	191	73,517	0,112	36 361,164	73,629	0,111
		32,956	9,623	7 286,901	14,704		7 272,197	14,726
,6	605,960	11 120,300	192	88,221	0,134	43 633,361	88,355	0,135
		62,549	9,623	7 286,882	14,705		7 272,177	14,727
,7	668,509	11 120,267	191	102,926	0,155	50 905,538	103,082	0,157
		72,172	9,625	7 286,859	14,705		7 272,154	14,728
,8	740,681	11 120,230	189	117,631	0,177	58 177,692	117,810	0,178
		81,917	9,624	7 286,835	14,705		7 272,128	14,730
,9	822,478	11 120,187	187	132,336	0,202	65 449,820	132,538	0,201
		91,421	9,625	7 286,805	14,707		7 272,098	14,729
1,0	913,899	11 120,138	187	147,043	0,224	72 721,918	147,257	0,222
		101,046	9,628	7 286,772	14,707		7 272,065	14,729
,1	463 014,945	11 120,092	193	161,750	0,246	79 993,983	161,936	0,245
		110,872	9,625	7 286,757	14,709		7 272,025	14,740
,2	125,617	11 120,297	184	176,458	0,268	87 266,012	176,726	0,267
		120,297	9,627	7 286,698	14,709		7 271,989	14,731
,3	245,914	11 119,953	182	191,157	0,290	94 538,001	191,457	0,289
		129,954	9,627	7 286,656	14,709		7 271,947	14,732
,4	375,938	11 119,894	181	205,876	0,313	101 809,948	206,189	0,311
		139,951	9,627	7 286,611	14,713		7 271,900	14,733
,5	515,389	11 119,820	179	220,587	0,334	109 081,848	220,921	0,335
		149,178	9,631	7 286,553	14,711		7 271,852	14,735
,6	664,567	11 119,741	178	235,298	0,358	116 353,700	235,656	0,354
		158,809	9,627	7 286,511	14,712		7 271,798	14,735
,7	823,375	11 119,556	177	250,011	0,381	123 625,498	250,380	0,379
		168,436	9,630	7 286,456	14,713		7 271,743	14,737
,8	991,611	11 119,567	174	264,724	0,405	130 897,241	265,127	0,400
		178,066	9,632	7 286,399	14,716		7 271,683	14,737
,9	464 169,877	11 119,473	172	279,440	0,424	138 168,924	279,864	0,423
		187,698	9,633	7 286,336	14,716		7 271,620	14,739
2,0	357,575					145 440,544		

$\varphi = 49,2^\circ$

$\lambda^\circ$	X <sub>m</sub>	$\frac{\Delta X Y}{\Delta X \lambda}$	$\frac{\Delta X X Y}{\Delta X \lambda \lambda}$	$\frac{\Delta Y Y}{\Delta Y \lambda}$	$\frac{\Delta Y X Y}{\Delta Y \lambda \lambda}$	Y <sub>m</sub>	$\frac{\Delta Y Y}{\Delta Y \lambda}$	$\frac{\Delta Y X Y}{\Delta Y \lambda \lambda}$
0,0	451 314,551	11 120,200	192	0,000	0,000	0,000	7 286,949	0,000
		4,1814	9,627	7 286,949	14,703	14,703		14,703
,1	317,365	11 120,197	193	14,703	0,022	7 286,949	7 286,946	14,703
		14,441	9,628	7 286,946	14,703			0,007
,2	331,806	11 120,190	192	29,406	0,045	14 573,895	29,406	0,045
		24,069	9,628	7 286,959	14,705		7 286,959	14,705
,3	355,875	11 120,177	191	44,108	0,068	21 860,834	44,108	0,068
		33,697	9,628	7 286,930	14,704		7 286,930	14,704
,4	389,572	11 120,160	192	58,813	0,090	29 147,764	58,813	0,090
		43,325	9,627	7 286,917	14,704		7 286,917	14,704
,5	432,897	11 120,137	192	73,517	0,112	36 434,681	73,517	0,112
		52,952	9,626	7 286,901	14,704		7 286,901	14,704
,6	485,849	11 120,111	189	88,221	0,134	43 721,582	88,221	0,134
		62,582	9,628	7 286,882	14,705		7 286,882	0,223
,7	548,431	11 120,078	189	102,926	0,155	51 008,464	102,926	0,155
		72,210	9,629	7 286,859	14,705		7 286,859	0,226
,8	620,641	11 120,040	190	117,631	0,177	58 295,323	117,631	0,177
		81,859	9,626	7 286,835	14,705		7 286,835	0,228
,9	702,460	11 119,998	189	132,336	0,202	65 582,156	132,336	0,202
		91,468	9,630	7 286,805	14,707		7 286,805	0,233
1,0	793,948	11 119,951	187	147,043	0,224	72 868,961	147,043	0,224
		101,058	9,631	7 286,772	14,707		7 286,772	0,235
,1	895,046	11 119,899	186	161,750	0,246	80 155,733	161,750	0,246
		110,729	9,631	7 286,757	14,709		7 286,757	0,239
,2	452 005,775	11 119,842	184	176,458	0,268	87 442,470	176,458	0,268
		120,360	9,630	7 286,698	14,709		7 286,698	0,242
,3	126,135	11 119,779	184	191,157	0,290	94 729,168	191,157	0,290
		129,990	9,634	7 286,656	14,709		7 286,656	0,245
,4	256,125	11 119,713	181	205,876	0,313	102 015,884	205,876	0,313
		139,624	9,632	7 286,611	14,713		7 286,611	0,248
,5	395,749	11 119,640	180	220,587	0,334	109 302,435	220,587	0,334
		149,256	9,633	7 286,553	14,711		7 286,553	0,252
,6	545,005	11 119,562	179	235,298	0,358	116 588,998	235,298	0,358
		158,889	9,634	7 286,511	14,712		7 286,511	0,255
,7	703,894	11 119,481	177	250,011	0,381	123 875,509	250,011	0,381
		168,523	9,636	7 286,456	14,713		7 286,456	0,257
,8	872,417	11 119,394	173	264,724	0,405	131 161,965	264,724	0,405
		178,159	9,635	7 286,399	14,716		7 286,399	0,263
,9	453 050,576	11 119,301	172	279,440	0,424	138 448,364	279,440	0,424
		187,794	9,635	7 286,336	14,716		7 286,336	0,266
2,0	238,370					145 734,700		



- b. Interpolationstabeln zur Berechnung der geographischen aus den Gauß-Krügerschen Koordinaten (Beaselsches Ellipsoid, 3°-Streifen,  $x = 5\ 100$  bis  $x = 5\ 480$  km)

Anordnung der Zahlenwerte.

In der Tafel sind für runde, mit Intervallen von 10 km fortschreitende Werte der Gauß-Krügerschen Koordinaten die geographischen Koordinaten, nämlich die geographische Breite und der Längenunterschied zum Grundmeridian, in Graden alter Teilung mit dezimaler Unterteilung des Grades angegeben. Die einem Tafelwert  $\varphi_0$  oder  $\lambda_0$  zugeordneten ersten und zweiten Differenzen sind rechts von diesem angeschrieben und zwar in Einheiten der achten Dezimalstelle des Grades.

Berechnung der geographischen aus den Gauß-Krügerschen Koordinaten.

Es sind die Gauß-Krügerschen Koordinaten  $x_p, y_p$  eines Punktes P in einem Meridianstreifen mit der Länge  $\lambda_m$  seines Grundmeridians gegeben; gesucht sind die geographischen Koordinaten dieses Punktes.

Sind  $x_0, y_0$  die gegenüber  $x_p, y_p$  nächstniedrigeren Eingangswerte in die Tafeln, denen die Werte  $\varphi_0$  der geographischen Breite und  $\lambda_0$  des Absolutwertes des Längenunterschiedes in der Tafel zugeordnet sind, so gilt nach der Newtonschen Interpolationsformel

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi_x n_x + \Delta\varphi_y n_y + \Delta\varphi_{xx} \binom{n_x}{2} + \Delta\varphi_{yy} n_x n_y + \Delta\varphi_{yy} \binom{n_y}{2} + \dots$$

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda_x n_x + \Delta\lambda_y n_y + \Delta\lambda_{xx} \binom{n_x}{2} + \Delta\lambda_{xy} n_x n_y + \Delta\lambda_{yy} \binom{n_y}{2} + \dots$$

Hierin bedeutet

$$n_x = x_p - x_0 \text{ in Einheiten des Tafelintervalls (10 km)}$$

$$n_y = y_p - y_0 \text{ in Einheiten des Tafelintervalls}$$

$\Delta\varphi_x, \Delta\varphi_y, \Delta\varphi_{xx}$  u.s.w. sind die aus den Tafelwerten  $\varphi, \lambda$  gebildeten ersten und zweiten Differenzen in den beiden Argumentrichtungen; sie sind, wie erwähnt, neben den zugehörigen Werten  $\varphi_0, \lambda_0$  in die Tafeln aufgenommen.

Da die Werte  $n_x$  und  $n_y$  sowie das Produkt  $n_x n_y$  stets kleiner als eins und positiv sein müssen, ist  $\binom{n_x}{2}$  und  $\binom{n_y}{2}$  stets negativ; die Vorzeichen der ersten und zweiten Tafeldifferenzen bleiben für den Bereich der Tafeln gleich. Daher können - unter Einführung der Absolutbeträge aller Werte - die angegebenen Interpolationsformeln in der Gebrauchsform

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi_x n_x - \Delta\varphi_y n_y + \Delta\varphi_{xx} \binom{n_x}{2} - \Delta\varphi_{xy} n_x n_y + \Delta\varphi_{yy} \binom{n_y}{2}$$

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda_x n_x + \Delta\lambda_y n_y - \Delta\lambda_{xx} \binom{n_x}{2} + \Delta\lambda_{xy} n_x n_y + \Delta\lambda_{yy} \binom{n_y}{2}$$

angeschrieben werden.

Bei dieser Interpolation werden - ebenso wie beim umgekehrten Interpolationsvorgang - die Glieder höherer als zweiter Ordnung in den Interpolationsformeln vernachlässigt. Die Größenordnung derselben erreicht hier immerhin den Betrag von rund  $10 \cdot 10^{-4}$  (= 0",0004, linear rd. 0,01 m), so daß unter Umständen die vernachlässigten Glieder in Rechnung gestellt werden müssen. Dies geschieht in einfachster Weise durch Zuschläge  $r_\varphi$  in der geographischen Breite und  $r_\lambda = a + b y_m \cdot 10^{-5}$  im Längenunterschied; sowohl  $r_\varphi$  als auch die zur Berechnung von  $r_\lambda$  nötigen Größen  $a$  und  $b$  sind in einer Hilfstafel angegeben.

Beispiel.

Wir benützen das schon mitgeteilte Beispiel (Gauß-Krügersche aus geographischen Koordinaten) und gehen von den Gauß-Krügerschen Koordinaten  $x_p = 5\ 243\ 506,392, y_p = +102\ 806,961$  im Meridianstreifen mit dem Mittelmeridian  $\lambda_m = 15^\circ$  sowie von den Gauß-Krügerschen Koordinaten  $x_p = 5\ 243\ 913,490, y_p = -123\ 953,181$  desselben Punktes im Meridianstreifen  $\lambda_m = 18^\circ$  aus und berechnen dessen geographische Koordinaten.

Für die erste Transformation entnehmen wir aus der Tafel für die nächstniedrigeren Eingangswerte  $x_0 = 5\ 240$  km,  $y_0 = 100$  km

$$\varphi_0 = 47^\circ, 291\ 78286 \qquad \lambda_0 = 1,322\ 20491$$

und bilden

$$n_x = (x_p - x_0) \cdot 10^{-4} \text{ (Einleiten des Tafelinterwalls, 10 km)} \quad n_y = (y_p - y_0) \cdot 10^{-4}$$

Es ist daher

$$n_x = 0,350\ 6392 \qquad n_y = 0,280\ 6961$$

und

$$|\binom{n_x}{2}| = 0,113\ 84 \qquad n_x n_y = 0,098\ 423 \qquad |\binom{n_y}{2}| = 0,100\ 95$$

Die Interpolation ergibt

$\begin{array}{r} \varphi_0 = 47^\circ, 291\ 78286 \\ + \quad 31\ 53382\ 1 \\ - \quad 44953\ 8 \\ + \quad 17\ 0 \\ - \quad 49\ 3 \\ + \quad 1538\ 2 \\ \hline 47^\circ, 322\ 88220\ 2 \\ + r_\varphi \quad \quad \quad 2 \\ \hline \varphi = 47^\circ\ 322\ 88222\ 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} \lambda_0 = 1^\circ, 322\ 20491 \\ + \quad 78799\ 8 \\ + \quad 37\ 10205\ 1 \\ - \quad 124\ 3 \\ + \quad 2209\ 3 \\ + \quad 120\ 6 \\ \hline 1^\circ\ 360\ 11701\ 5 \\ - 10 \\ + 1 \\ \hline  \lambda  = 1^\circ\ 360\ 11692\ 5 \end{array}$
---	--

Auf die achte Dezimalstelle des Grades abgerundet ist dies

$$\varphi = 47^\circ 322\ 88222 \qquad \lambda = 10, 360\ 11693$$

und, umgerechnet in Minuten und Sekunden,

$$\varphi = 47^\circ 19' 22",375\ 992 \qquad \lambda = 1^\circ 21' 36",420\ 948$$

Als endgültige Werte der geographischen Koordinaten erhalten wir, abgerundet auf die vierte Dezimalstelle der Sekunde, mit  $\lambda_p = \lambda_m + \lambda$  ( $\lambda$  erhält das Vorzeichen von  $y$ )

$$p = 47^\circ 19' 22",3760 \qquad p = 16^\circ 21' 36",4209$$

Gegenüber den für die umgekehrte Rechnung angenommenen Sollwerten

$$p = 47^\circ 19' 22",376 \qquad p = 16^\circ 21' 36",421$$

bestehen die auf die vierte Dezimale der Sekunde bezogenen Differenzen  $\Delta\varphi = 0$ ,  $\Delta\lambda = 1$ . Die lineare Abweichung in  $\lambda$  beträgt demnach für dieses Beispiel (Hin- und Rückrechnung) rund 2mm, wovon etwa der halbe Betrag durch die Abrundungen in beiden Rechengängen entstanden sein kann.

Für die Durchführung der zweiten Transformation im Meridianstreifen  $\lambda_m = 18^\circ$  entnehmen wir aus der gleichen Seite der Tafel die nächstniedrigeren runden Eingangswerte  $x_0, y_0$  mit

$$x_0 = 5\ 240\ \text{km} \qquad |y_0| = 120\ \text{km}$$

und bilden

$$\eta_x = 0,391\ 3490 \qquad \eta_y = 0,395\ 3181$$

sowie

$$|(\frac{\eta_x}{\eta_y})| = 0,119\ 10 \qquad \eta_x \eta_y = 0,154\ 707 \qquad |(\frac{\eta_y}{\eta_x})| = 0,119\ 52$$

Die Interpolationsrechnung mit den den Werten  $x_0, y_0$  zugeordneten ersten und zweiten Differenzen ergibt

$\begin{array}{r} \varphi_0 = 47^\circ 288\ 42747 \\ + \quad 35\ 19083\ 8 \\ - \quad 75357\ 1 \\ + \quad 18\ 1 \\ - \quad 92\ 4 \\ + \quad 1820\ 4 \\ \hline \varphi_p = 47^\circ 322\ 88219\ 8 \\ + r_\varphi \quad + 2 \\ \hline \varphi_p = 47^\circ 322\ 88221\ 8 \end{array}$	$\begin{array}{r} \lambda_0 = 1^\circ 586\ 55040 \\ + \quad 1\ 05515\ 5 \\ + \quad 52\ 24277\ 7 \\ - \quad 155\ 9 \\ + \quad 3470\ 4 \\ + \quad 168\ 6 \\ \hline  \lambda  = 1^\circ 639\ 88316\ 3 \\ + a \\ + b \cdot y_m \cdot 10^{-5} \quad + 1 \\ \hline  \lambda  = 1^\circ 639\ 88305\ 3 \end{array}$
--	---

Daraus folgen - abgerundet auf die achte Dezimale - die endgültigen Werte der gesuchten geographischen Koordinaten mit (dem Längenunterschied ist das Vorzeichen der Ordinate zu erteilen)

$$\varphi_p = 47^\circ 322\ 88222 \qquad \lambda_p = 16^\circ, 360\ 11695$$

und, in sexagesimaler Unterteilung des Grades mit Abrundung auf die vierte Dezimale der Sekunde,

$$\varphi_p = 47^\circ 19' 22",376 \qquad \lambda_p = 16^\circ 21' 36",421$$

Gegenüber den ursprünglich angenommenen Ausgangswerten bestehen demnach keine Abweichungen.

X = 5100 km

$\chi_{km}$	$\varphi^{\circ}$	$\frac{\Delta\varphi_x}{\Delta\varphi_y}$	$\frac{\Delta\lambda_x}{\Delta\lambda_y}$	$\lambda^{\circ}$	$\frac{\Delta\lambda_x}{\Delta\lambda_y}$	$\frac{\Delta\lambda_x}{\Delta\lambda_y}$	$\frac{\Delta\lambda_x}{\Delta\lambda_y}$
0	46,1298 4989	899 7471 7325	141 1 4651	0,0000 0000	1294 1193	0	2 1123 100
10	46,1297 7664	899 7448 2 1976	141 68 1 4650	0,1294 1193	1294 1093	2 1123	2 1122 201
20	46,1295 5688	899 7380 3 6626	143 115 1 4650	0,2588 2286	4 2245	4 2245	2 1120 301
30	46,1291 9062	899 7055 5 1278	143 160 1 4647	0,3882 3178	1294 0892	6 3355	2 1109 402
40	46,1286 7786	899 7105 6 5923	144 207 1 4647	0,5176 3769	8 4483	8 4483	2 1117 502
50	46,1280 1863	899 6898 8 0570	143 252 1 4647	0,6470 3958	10 5600	10 5600	2 1115 602
60	46,1272 1293	899 6646 9 5217	143 297 1 4643	0,7764 3645	12 6713	12 6713	2 1109 703
70	46,1262 6076	899 6349 10 9860	144 342 1 4640	0,9058 2730	14 7822	14 7822	2 1105 804
80	46,1251 6216	899 6007 12 4500	148 391 1 4639	1,0352 1112	16 8927	16 8927	2 1102 903
90	46,1239 1716	899 5616 13 9139	147 435 1 4637	1,1645 8690	18 0029	18 0029	2 1096 1005
100	46,1225 2577	899 5181 15 3776	149 479 1 4632	1,2939 5365	20 1125	20 1125	2 1091 1103
110	46,1209 8801	899 4700 16 8408	149 526 1 4630	1,4233 1036	22 2216	22 2216	2 1083 1203
120	46,1193 0393	899 4174 18 3038	151 571 1 4625	1,5526 5604	24 3309	24 3309	2 1075 1304
130	46,1174 7355	899 3603 19 7683	156 616 1 4622	1,6819 8969	26 4374	26 4374	2 1066 1405
140	46,1154 9692	899 2984 21 2285	156 662 1 4618	1,8113 1030	28 5442	28 5442	2 1061 1504
150	46,1133 7407	899 2320 23 6903	157 708 1 4613	1,9406 1686	30 6503	30 6503	2 1052 1605
160	46,1111 0504			2,0699 0838			

X = 5100 km

$\chi_{km}$	$\varphi^{\circ}$	$\frac{\Delta\varphi_x}{\Delta\varphi_y}$	$\frac{\Delta\lambda_x}{\Delta\lambda_y}$	$\lambda^{\circ}$	$\frac{\Delta\lambda_x}{\Delta\lambda_y}$	$\frac{\Delta\lambda_x}{\Delta\lambda_y}$	$\frac{\Delta\lambda_x}{\Delta\lambda_y}$
0	46,0398 7376	899 7613 7505	142 22 1 4604	0,0000 0000	1292 0172	0	2 1021 101
10	46,0398 0073	899 7591 2 1507	143 69 1 4605	0,1292 0172	1292 0071	2 1021	2 1022 200
20	46,0395 8166	899 7532 3 6512	142 114 1 4604	0,2584 0243	4 2043	4 2043	2 1021 299
30	46,0392 1654	899 7408 5 1116	143 160 1 4602	0,3876 0114	6 3054	6 3054	2 1019 399
40	46,0387 0538	899 7248 6 5718	143 205 1 4601	0,5167 9686	8 4083	8 4083	2 1016 499
50	46,0380 4820	899 7043 8 0319	145 251 1 4601	0,6459 8859	10 5099	10 5099	2 1014 599
60	46,0372 4501	899 6792 9 4920	146 297 1 4597	0,7751 7533	12 6112	12 6112	2 1010 699
70	46,0362 9581	899 6495 10 9517	146 343 1 4595	0,9043 5608	14 7122	14 7122	2 1006 799
80	46,0352 0064	899 6152 12 4112	145 388 1 4594	1,0335 2984	16 8128	16 8128	2 1000 899
90	46,0339 5952	899 5764 13 8706	148 433 1 4591	1,1626 9562	18 9128	18 9128	2 0995 901
100	46,0325 7246	899 5331 15 3297	150 478 1 4589	1,2918 5242	21 0123	21 0123	2 0989 1001
110	46,0310 3949	899 4852 16 7882	152 526 1 4585	1,4209 9925	23 1111	23 1111	2 0983 1098
120	46,0293 6067	899 4326 18 2467	152 571 1 4581	1,5501 3510	25 2094	25 2094	2 0977 1197
130	46,0275 3600	899 3755 19 7048	152 616 1 4578	1,6792 5898	27 3071	27 3071	2 0971 1296
140	46,0255 6552	899 3140 21 1624	156 661 1 4572	1,8083 6930	29 4040	29 4040	2 0965 1395
150	46,0234 4988	899 2479 22 6196	159 707 1 4567	1,9374 6687	31 4999	31 4999	2 0950 1494
160	46,0211 8732			2,0665 4889			

X 5130 km

$\lambda$ km	$\varphi^\circ$	$\frac{\Delta \varphi_x}{\Delta \varphi_y}$	$\frac{\Delta \varphi_{xx}}{\Delta \varphi_{yy}}$	$\lambda^\circ$	$\frac{\Delta \lambda_x}{\Delta \lambda_y}$	$\frac{\Delta \lambda_{xx}}{\Delta \lambda_{yy}}$
0	46,3037 9790	899 7188 7371	142 24 1	0,0000 0000	0	0
10	46,3037 2419	899 7164 2 2114	140 69 1	0,1298 3539	1298 3539	2 1325 24 101
20	46,3035 0305	899 7095 5 6856	140 140 1	0,2596 6977	4 2619 1298 3234	97 2 1324 204
30	46,3031 3449	899 6981 5 1597	143 160 1	0,3895 0211	6 3972 1298 2959	308 2 1322 406
40	46,3026 1852	899 6821 6 6336	146 209 1	0,5193 3140	8 5294 1298 2523	409 2 1319 508
50	46,3019 5516	899 6512 8 1074	144 255 1	0,6491 5663	10 6613 1298 2015	511 2 1316 610
60	46,3011 4442	899 6357 9 5812	143 300 1	0,7789 7678	12 7929 1298 1405	613 2 1312 711
70	46,3061 8630	899 6057 11 0548	144 345 1	0,9087 9083	14 9241 1298 0694	716 2 1308 813
80	46,3050 8082	899 5712 12 3681	146 392 1	1,0385 9777	17 0549 1297 9881	818 2 1304 914
90	46,3038 2801	899 5320 14 0011	146 439 1	1,1683 9658	19 1853 1297 8987	919 2 1299 1015
100	46,3024 2790	899 4882 15 4728	147 483 1	1,2981 8625	21 3451 1297 7952	1021 2 1292 1117
110	46,3008 8052	899 4398 16 9463	152 529 1	1,4279 6577	23 4443 1297 6835	1123 2 1285 1218
120	46,2991 8569	899 3870 18 4184	156 576 1	1,5577 3412	25 5728 1297 5617	1226 2 1278 1319
130	46,2973 4405	899 3293 19 8901	155 622 1	1,6874 9029	27 7006 1297 4298	1327 2 1269 1421
140	46,2953 5504	899 2671 21 3614	156 668 1	1,8172 3327	29 8275 1297 2877	1429 2 1262 1522
150	46,2932 1890	899 2003 22 8324	158 715 1	1,9469 6204	31 9537 1297 1355	1530 2 1253 1622
160	46,2909 3566		14706	2,0766 7599		

X = 5120 km

$\lambda$ km	$\varphi^\circ$	$\frac{\Delta \varphi_x}{\Delta \varphi_y}$	$\frac{\Delta \varphi_{xx}}{\Delta \varphi_{yy}}$	$\lambda^\circ$	$\frac{\Delta \lambda_x}{\Delta \lambda_y}$	$\frac{\Delta \lambda_{xx}}{\Delta \lambda_{yy}}$
0	46,2198 2460	899 7330 7348	142 23 1	0,0000 0000	0	0
10	46,2197 5112	899 7307 2 2044	143 70 1	0,1296 2316	1296 2316	2 1223 102 203
20	46,2195 3068	899 7237 5 6741	142 142 1	0,2592 4531	4 2446 1296 2012	203 2 1220 305
30	46,2191 6327	899 7122 5 1436	141 161 1	0,3888 6534	6 3668 1296 1709	304 2 1220 405
40	46,2186 4891	899 6961 6 6130	140 206 1	0,5184 8232	8 4888 1296 1306	406 2 1217 506
50	46,2179 8761	899 6755 8 0822	143 252 1	0,6480 9558	10 6105 1296 0800	508 2 1215 606
60	46,2171 7939	899 6503 9 5514	146 298 1	0,7777 0358	12 7320 1296 0194	609 2 1211 707
70	46,2162 2425	899 6205 11 0202	148 346 1	0,9073 0552	14 8531 1295 9487	713 2 1207 807
80	46,2151 2223	899 5859 12 4881	147 390 1	1,0369 0039	16 9738 1295 8680	811 2 1201 909
90	46,2138 7332	899 5469 15 9574	149 434 1	1,1664 8719	18 0939 1295 7771	914 2 1195 1009
100	46,2124 7758	899 5032 15 4357	150 481 1	1,2960 6490	21 2135 1295 6762	1016 2 1190 1111
110	46,2109 3501	899 4551 16 8934	151 527 1	1,4256 3252	23 3325 1295 5651	1118 2 1184 1211
120	46,2092 4567	899 4022 18 3609	152 573 1	1,5551 8903	25 4509 1295 4440	1219 2 1177 1311
130	46,2074 0958	899 3447 19 8282	154 619 1	1,6847 3343	27 5686 1295 3129	1320 2 1169 1412
140	46,2054 2676	899 2828 21 2949	157 665 1	1,8142 6472	29 6855 1295 1717	1420 2 1160 1513
150	46,2032 9727	899 2163 22 7611	160 713 1	1,9437 8189	31 8045 1295 0204	1522 2 1151 1614
160	46,2010 2116		14657	2,0732 8393		

X = 5150 km

$\chi_{km}$	$\varphi^\circ$	$\frac{\Delta \varphi_x}{\Delta \varphi_y}$	$\frac{\Delta \varphi_x}{\Delta \lambda_y}$	$\frac{\Delta \varphi_x}{\Delta \lambda_y}$	$\lambda^\circ$	$\frac{\Delta \lambda_x}{\Delta \lambda_y}$	$\frac{\Delta \lambda_x}{\Delta \lambda_y}$	$\frac{\Delta \lambda_x}{\Delta \lambda_y}$
0	46,4897 4024	899 6904 7417	141 24	1302 6292	0,0000 0000	141 24	1302 6292	0 2 1530 104
10	46,4896 6607	899 6890 2 2252	140 69	1302 6188	0,1302 6292	140 69	1302 6188	103 2 1530 205
20	46,4894 4355	899 6811 3 7087	142 115	1302 5983	0,2605 2480	142 115	1302 5983	206 2 1530 309
30	46,4890 7268	899 6696 5 1920	144 144	1302 5674	0,3907 8463	144 144	1302 5674	311 2 1527 411
40	46,4885 5348	899 6534 8 6752	145 209	1302 5263	0,5210 4137	145 209	1302 5263	413 2 1524 514
50	46,4878 8596	899 6325 8 1953	145 145	1302 4749	0,6512 9400	145 145	1302 4749	516 2 1520 617
60	46,4870 7013	899 6069 9 6413	145 147	1302 4152	0,7815 4149	145 147	1302 4152	621 2 1517 720
70	46,4861 0600	899 5768 11 1240	147 148	1302 3412	0,9117 8281	147 148	1302 3412	725 2 1514 822
80	46,4849 9360	899 5420 12 6085	149 149	1302 2590	1,0420 1693	149 149	1302 2590	827 2 1508 925
90	46,4837 3295	899 5025 14 0888	149 144	1302 1665	1,1722 4283	149 144	1302 1665	930 2 1495 1027
100	46,4823 2407	899 4584 15 5709	150 148	1302 0638	1,3024 5948	150 148	1302 0638	1034 2 1489 1130
110	46,4807 6698	899 4098 17 0525	152 148	1301 9508	1,4326 6586	152 148	1301 9508	1139 2 1483 1234
120	46,4790 6173	899 3566 18 5337	156 148	1301 8274	1,5628 6094	156 148	1301 8274	1243 2 1478 1336
130	46,4772 0836	899 2985 20 0146	156 148	1301 6938	1,6930 4368	156 148	1301 6938	1344 2 1475 1437
140	46,4752 0690	899 2359 21 4932	157 148	1301 5502	1,8232 1306	157 148	1301 5502	1446 2 1465 1539
150	46,4730 5738	899 1686 22 9754	159 147	1301 3962	1,9533 6808	159 147	1301 3962	1550 2 1457 1638
160	46,4707 5984		147		2,0835 0770			

X = 5140 km

$\chi_{km}$	$\varphi^\circ$	$\frac{\Delta \varphi_x}{\Delta \varphi_y}$	$\frac{\Delta \varphi_x}{\Delta \lambda_y}$	$\frac{\Delta \varphi_x}{\Delta \lambda_y}$	$\lambda^\circ$	$\frac{\Delta \lambda_x}{\Delta \lambda_y}$	$\frac{\Delta \lambda_x}{\Delta \lambda_y}$	$\frac{\Delta \lambda_x}{\Delta \lambda_y}$
0	46,3997 6978	899 8046 7595	142 22	1300 4864	0,0000 0000	142 22	1300 4864	0 2 1428 102
10	46,3996 9583	899 7904 2 2183	144 69	1300 4762	0,1300 4864	144 69	1300 4762	102 2 1426 205
20	46,3994 7400	899 6955 3 6970	144 117	1300 4357	0,2600 9626	144 117	1300 4357	206 2 1426 306
30	46,3991 0430	899 6838 5 1757	142 162	1300 4251	0,3901 4183	142 162	1300 4251	307 2 1423 409
40	46,3985 8673	899 6675 6 6545	141 207	1300 3842	0,5201 8434	141 207	1300 3842	412 2 1421 511
50	46,3979 2128	899 6468 8 1329	143 147	1300 3331	0,6502 2276	143 147	1300 3331	515 2 1415 614
60	46,3971 0799	899 6214 9 6112	145 147	1300 2717	0,7802 5607	145 147	1300 2717	617 2 1415 715
70	46,3961 4687	899 5913 11 0893	145 147	1300 2002	0,9102 8324	145 147	1300 2002	719 2 1410 817
80	46,3950 3794	899 5566 12 5673	146 146	1300 1185	1,0403 0326	146 146	1300 1185	823 2 1405 920
90	46,3937 8121	899 5174 14 0449	149 149	1300 0285	1,1703 1511	149 149	1300 0285	926 2 1400 1021
100	46,3923 7672	899 4735 15 5221	151 148	1299 9244	1,3003 1776	151 148	1299 9244	1028 2 1394 1124
110	46,3908 2451	899 4247 16 9992	149 148	1299 8120	1,4303 1020	149 148	1299 8120	1129 2 1388 1225
120	46,3891 2459	899 3714 18 4761	148 148	1299 6854	1,5602 9140	148 148	1299 6854	1230 2 1382 1328
130	46,3872 7698	899 3138 19 9523	153 147	1299 5567	1,6902 6035	153 147	1299 5567	1334 2 1371 1428
140	46,3852 8175	899 2515 21 4282	157 147	1299 4139	1,8202 1602	157 147	1299 4139	1438 2 1362 1531
150	46,3831 3893	899 1845 22 9037	159 147	1299 2688	1,9501 5741	159 147	1299 2688	1540 2 1354 1634
160	46,3808 4856		147		2,0800 8349			

X = 5170 km

$\chi$ km	$\varphi^\circ$	$\frac{\Delta\varphi}{\Delta\chi}$ $\frac{\Delta\varphi}{\Delta\chi}$ $\frac{\Delta\varphi}{\Delta\chi}$	$\lambda^\circ$	$\frac{\Delta\lambda}{\Delta\chi}$ $\frac{\Delta\lambda}{\Delta\chi}$ $\frac{\Delta\lambda}{\Delta\chi}$	$\frac{\Delta\lambda}{\Delta\chi}$ $\frac{\Delta\lambda}{\Delta\chi}$ $\frac{\Delta\lambda}{\Delta\chi}$	$\frac{\Delta\lambda}{\Delta\chi}$ $\frac{\Delta\lambda}{\Delta\chi}$ $\frac{\Delta\lambda}{\Delta\chi}$
0	45,6696 7691	899 6691 7464	0,0000 0000	142 24 1 4928	0 2 1738 104	1306 9455
10	46,6696 0227	899 6597 2 2392	0,1306 9455	141 0 1 4927	2 1738 104 2 1738	1306 9351
20	46,6693 7835	899 6527 3 7319	0,2613 8806	141 116 1 4926	4 3475 2 1736 3 1736	1306 9143
30	46,6690 0516	899 6411 5 2245	0,3920 7949	143 163 1 4925	6 5211 3 1733 4 1733	1306 8831
40	46,6684 8271	899 6248 6 7170	0,5227 6780	144 209 1 4925	8 6944 4 1732 5 1732	1306 8414
50	46,6678 1101	899 6037 8 2095	0,6534 5194	144 257 1 4922	10 8676 5 1729 6 1729	1306 7894
60	46,6669 9006	899 5780 9 7077	0,7841 3088	145 304 1 4921	13 0405 6 1724 7 1724	1306 7270
70	46,6660 1989	899 5476 11 1938	0,9148 0358	145 350 1 4917	15 2129 7 1720 8 1720	1306 6542
80	46,6649 0051	899 5126 12 6855	1,0454 6900	146 397 1 4916	17 3849 8 1715 9 1715	1306 5709
90	46,6636 3196	899 4729 14 1412	1,1761 2609	148 444 1 4912	19 5564 9 1710 10 1710	1306 4773
100	46,6622 1425	899 4285 15 6683	1,3067 7382	148 491 1 4910	21 7274 10 1703 11 1703	1306 3733
110	46,6606 4742	899 3794 17 1533	1,4374 1115	149 536 1 4906	23 8977 11 1696 12 1696	1306 2590
120	46,6589 3149	899 3258 18 6459	1,5680 3705	153 582 1 4902	26 0673 12 1689 13 1689	1306 1341
130	46,6570 6650	899 2676 20 1401	1,6986 5046	157 630 1 4897	28 2362 13 1681 14 1681	1305 9990
140	46,6550 5249	899 2046 21 6298	1,8292 5036	159 674 1 4895	30 4043 14 1672 15 1672	1305 8536
150	46,6528 8951	899 1368 23 1193	1,9598 3572	158 723 1 4890	32 5715 15 1662 16 1662	1305 6978
160	46,6505 7758		2,0904 0550			

X = 5160 km

$\chi$ km	$\varphi^\circ$	$\frac{\Delta\varphi}{\Delta\chi}$ $\frac{\Delta\varphi}{\Delta\chi}$ $\frac{\Delta\varphi}{\Delta\chi}$	$\lambda^\circ$	$\frac{\Delta\lambda}{\Delta\chi}$ $\frac{\Delta\lambda}{\Delta\chi}$ $\frac{\Delta\lambda}{\Delta\chi}$	$\frac{\Delta\lambda}{\Delta\chi}$ $\frac{\Delta\lambda}{\Delta\chi}$ $\frac{\Delta\lambda}{\Delta\chi}$	$\frac{\Delta\lambda}{\Delta\chi}$ $\frac{\Delta\lambda}{\Delta\chi}$ $\frac{\Delta\lambda}{\Delta\chi}$
0	46,5797 0928	899 6763 7441	0,0000 0000	142 25 1 4880	0 2 1633 104	1304 7822
10	46,5796 3487	899 6740 2 2321	0,1304 7822	143 71 1 4881	2 1633 105 2 1633	1304 7718
20	46,5794 1166	899 6669 3 7202	0,2609 5540	142 117 1 4880	4 3266 209 3 1632	1304 7511
30	46,5790 3964	899 6552 5 2082	0,3914 3051	141 163 1 4879	6 4898 310 4 1414	1304 7201
40	46,5785 1882	899 6389 6 6961	0,5219 0252	141 209 1 4878	8 6528 416 5 1616	1304 6787
50	46,5778 4921	899 6180 8 1839	0,6523 7039	143 256 1 4875	10 8155 518 6 1625	1304 6269
60	46,5770 3082	899 5924 9 6714	0,7828 3308	144 303 1 4874	12 9780 820 7 1621	1304 5649
70	46,5760 6368	899 5621 11 1588	0,9132 8957	145 350 1 4872	15 1401 928 8 1616	1304 4926
80	46,5749 4780	899 5271 12 6460	1,0437 3883	145 395 1 4869	17 3017 1040 9 1611	1304 4098
90	46,5736 8320	899 4876 14 1329	1,1741 7981	147 442 1 4866	19 4628 1134 10 1606	1304 3167
100	46,5722 6991	899 4434 15 6195	1,3046 1148	148 489 1 4862	21 6234 1240 11 1600	1304 2133
110	46,5707 0796	899 3946 17 1057	1,4350 3281	152 536 1 4861	23 7834 1344 12 1597	1304 0937
120	46,5689 9739	899 3410 18 5918	1,5654 4278	152 581 1 4855	25 9427 1446 13 1594	1303 9757
130	46,5671 3821	899 2828 20 0773	1,6958 4035	153 628 1 4851	28 1011 1546 14 1589	1303 8413
140	46,5651 3048	899 2201 21 5624	1,8262 2448	155 674 1 4847	30 2589 1650 15 1584	1303 6987
150	46,5620 7424	899 2527 23 0471	1,9565 9415	159 722 1 4841	32 4157 1752 16 1579	1303 5419
160	46,5606 6953		2,0869 4834			

X = 5190 km

Y[km]	φ°	Δφ <sub>x</sub> Δφ <sub>y</sub>	Δψ <sub>x</sub> Δψ <sub>y</sub>	λ°	Δλ <sub>x</sub> Δλ <sub>y</sub>	Δλ <sub>xy</sub> Δλ <sub>yx</sub>
0	46,8436 0791	899 6398 7511	142 1 5021	0,0000 0000	1311 3035	0 2 1948 105
10	46,8495 2380	899 6314 2 2532	142 1 5021	0,1311 3035	2 1948 1311 2930	106 2 1947 210
20	46,8495 0748	899 6243 3 7553	141 1 5019	0,2622 5965	4 3995 1311 2720	212 2 1945 317
30	46,8489 3195	899 6196 5 2572	142 1 5020	0,3933 8685	6 5840 1311 2403	319 2 1944 421
40	46,8484 0623	899 5961 6 7592	142 1 5018	0,5245 1088	8 7784 1311 1982	425 2 1942 527
50	46,8477 3031	899 5750 8 2610	144 1 5015	0,6556 3070	10 9726 1311 1455	530 2 1938 631
60	46,8469 0421	899 5491 9 7625	144 1 5014	0,7867 4525	13 1664 1311 0824	636 2 1934 738
70	46,8459 2796	899 5195 11 2639	145 1 5012	0,9178 5349	15 3698 1311 0088	742 2 1931 842
80	46,8448 0157	899 4833 12 7651	147 1 5008	1,0489 5435	17 5293 1310 9244	847 2 1924 948
90	46,8435 2506	899 4433 14 2659	148 1 5007	1,1800 4679	19 7453 1310 8296	954 2 1920 1051
100	46,8420 9847	899 3987 15 7666	150 1 5003	1,3111 2975	21 9373 1310 7245	1058 2 1912 1159
110	46,8405 2181	899 3494 17 2689	152 1 4998	1,4422 0220	24 1985 1310 6086	1165 2 1906 1262
120	46,8387 9512	899 2954 18 7687	155 1 4996	1,5732 6306	26 3191 1310 4824	1270 2 1900 1368
130	46,8369 1845	899 2365 20 2663	154 1 4990	1,7043 1130	28 5089 1310 3456	1376 2 1890 1472
140	46,8348 9182	899 1732 21 7653	159 1 4988	1,8353 4586	30 6979 1310 1984	1481 2 1881 1577
150	46,8327 1529	899 1049 23 2641	158 1 4982	1,9663 6570	32 8860 1310 0407	1586 2 1877 1682
160	46,8303 8888			2,0973 6977		

X = 5180 km

Y[km]	φ°	Δφ <sub>x</sub> Δφ <sub>y</sub>	Δψ <sub>x</sub> Δψ <sub>y</sub>	λ°	Δλ <sub>x</sub> Δλ <sub>y</sub>	Δλ <sub>xy</sub> Δλ <sub>yx</sub>
0	46,7596 4312	899 6479 7488	141 1 4974	0,0000 0000	1309 1193	0 2 1942 105
10	46,7595 6824	899 6456 2 2462	142 1 4973	0,1309 1193	2 1942 1309 1088	106 2 1942 209
20	46,7593 4362	899 6386 3 7435	143 1 4973	0,2618 2281	4 3684 1309 0879	211 2 1841 315
30	46,7589 6927	899 6268 5 2408	142 1 4973	0,3927 3160	6 5525 1309 0564	315 2 1835 418
40	46,7584 4519	899 6104 6 7381	143 1 4971	0,5236 3724	8 7364 1309 0146	420 2 1835 523
50	46,7577 7138	899 5893 8 2352	143 1 4969	0,6545 3870	10 9200 1308 9623	526 2 1832 629
60	46,7569 4786	899 5635 9 7321	144 1 4967	0,7854 3493	13 1032 1308 8994	632 2 1830 732
70	46,7559 7465	899 5331 11 2288	146 1 4964	0,9163 2487	15 2862 1308 8262	736 2 1825 838
80	46,7548 5177	899 4980 12 7252	147 1 4963	1,0472 0749	17 4686 1308 7424	843 2 1820 941
90	46,7535 7925	899 4581 14 2215	148 1 4959	1,1780 8173	19 6506 1308 6483	947 2 1815 1047
100	46,7521 5710	899 4137 15 7174	150 1 4955	1,3089 4656	21 8319 1308 5436	1054 2 1809 1150
110	46,7505 8536	899 3645 17 2129	151 1 4952	1,4398 0092	24 0128 1308 4286	1157 2 1800 1256
120	46,7488 6407	899 3105 18 7081	151 1 4950	1,5706 4378	26 1928 1308 3030	1263 2 1794 1359
130	46,7469 9326	899 2519 20 2031	154 1 4945	1,7014 7408	28 3722 1308 1671	1367 2 1785 1463
140	46,7449 7295	899 1887 21 6976	155 1 4939	1,8322 9079	30 5507 1308 0208	1472 2 1776 1568
150	46,7428 0319	899 1210 23 1915	161 1 4933	1,9630 9287	32 7283 1307 8640	1577 2 1767 1673
160	46,7404 8404			2,0938 7927		

X - 5210 km

$X_{km}$	$\psi^\circ$	$\Delta\psi_x$ $\Delta\psi_y$	$\frac{\Delta\psi_x}{\Delta\psi_y}$	$\lambda^\circ$	$\Delta\lambda_x$ $\Delta\lambda_y$	$\frac{\Delta\lambda_x}{\Delta\lambda_y}$
0	47,0295 3325	899 6084 7559	141 23	0,0000 0000	1315 7037	0 2 2160
10	47,0294 5766	899 6021 2 2673	142 71	0,1315 7037	1315 6930	108 2 2160
20	47,0292 3093	899 5960 3 7788	143 119	0,2631 3967	1315 6717	215 2 2158
30	47,0288 5305	899 5841 5 2902	142 146	0,3947 0664	6 6478	323 2 2157
40	47,0283 2403	899 5675 6 8016	142 151	0,5262 7081	8 8635	429 2 2153
50	47,0276 4387	899 5462 8 3128	143 259	0,6578 3052	11 0788	537 2 2152
60	47,0268 1259	899 5203 9 8238	145 307	0,7893 8489	13 2940	643 2 2147
70	47,0258 3021	899 4896 11 3345	147 356	0,9209 3287	15 5087	749 2 2141
80	47,0246 9676	899 4540 12 8452	147 402	1,0524 7340	17 7228	858 2 2137
90	47,0234 1224	899 4138 14 3553	149 451	1,1840 0539	19 9365	966 2 2132
100	47,0219 7671	899 3687 15 8654	149 500	1,3155 2779	22 1497	1072 2 2127
110	47,0203 9017	899 3190 17 3752	149 542	1,4470 3955	24 3621	1179 2 2118
120	47,0186 5265	899 2648 18 8844	155 592	1,5785 3958	26 5739	1286 2 2109
130	47,0167 6421	899 2056 20 3934	155 638	1,7100 2684	28 7848	1394 2 2102
140	47,0147 2487	899 1418 21 9018	158 686	1,8415 0025	30 9950	1500 2 2093
150	47,0125 3469	899 0732 23 4099	160 733	1,9729 5876	33 2043	1606 2 2085
160	47,0101 9370		1 5076	2,1044 0131	35 4137	1702 2 2076

X - 5200 km

$X_{km}$	$\psi^\circ$	$\Delta\psi_x$ $\Delta\psi_y$	$\frac{\Delta\psi_x}{\Delta\psi_y}$	$\lambda^\circ$	$\Delta\lambda_x$ $\Delta\lambda_y$	$\frac{\Delta\lambda_x}{\Delta\lambda_y}$
0	46,9395 7129	899 6196 7555	142 24	0,0000 0000	1313 4983	0 2 2054
10	46,9394 9594	899 6172 2 2603	141 70	0,1313 4983	1313 4877	106 2 2053
20	46,9393 6991	899 6102 5 7670	142 118	0,2626 9860	1313 4665	212 2 2052
30	46,9288 9321	899 5984 5 2737	143 165	0,3940 4525	6 6159	318 2 2050
40	46,9283 6584	899 5819 6 7803	144 213	0,5253 8872	1313 4347	423 2 2047
50	46,9376 8781	899 5606 8 2865	144 255	0,6567 2796	8 8209	426 2 2047
60	46,9368 5912	899 5247 9 7931	144 300	0,7880 6189	11 0356	532 2 2044
70	46,9358 7981	899 5040 11 2991	146 354	0,9193 8947	13 2500	640 2 2040
80	46,9347 4990	899 4686 12 8051	146 401	1,0507 0364	15 4340	747 2 2036
90	46,9334 6939	899 4285 14 3103	147 448	1,1820 2192	17 6376	849 2 2031
100	46,9320 3834	899 3837 15 8155	150 495	1,3133 2348	19 8407	958 2 2024
110	46,9304 5675	899 3342 17 3209	152 543	1,4446 1505	22 0431	1059 2 2019
120	46,9287 2466	899 2799 18 8256	151 588	1,5758 9497	24 2450	1163 2 2011
130	46,9268 4210	899 2211 20 3296	153 632	1,7071 6219	26 4461	1278 2 2004
140	46,9248 0914	899 1573 21 8336	155 682	1,8384 1565	28 6465	1376 2 1997
150	46,9226 2578	899 0891 23 3369	161 730	1,9696 5430	30 8460	1480 2 1986
160	46,9202 9209		1 5028	2,1008 7708	33 0446	1587 2 1977



X = 5230 km

$\chi_{km}$	$\varphi^{\circ}$	$\frac{\Delta \chi}{\Delta \varphi}$ $\frac{\Delta \chi}{\Delta \varphi}$ $\frac{\Delta \chi}{\Delta \varphi}$	$\lambda^{\circ}$	$\frac{\Delta \lambda}{\Delta \chi}$ $\frac{\Delta \lambda}{\Delta \chi}$ $\frac{\Delta \lambda}{\Delta \chi}$	$\lambda^{\circ}$	$\frac{\Delta \lambda}{\Delta \chi}$ $\frac{\Delta \lambda}{\Delta \chi}$ $\frac{\Delta \lambda}{\Delta \chi}$
0	47,2094 5292	899 5771 7006	0,0000 0000	141 1 5210	0,0000 0000	1320 1465 2 2375 108
10	47,2093 7686	899 5748 2 2816	0,1220 1465	142 1 5209	0,1220 1465	110 2 2375 2 2375 216
20	47,2091 4870	899 5677 3 8025	0,2640 2822	143 1 5209	0,2640 2822	218 2 2374 1141
30	47,2087 6845	899 5557 5 3234	0,3960 3963	142 1 5209	0,3960 3963	326 2 2372 2 2372 432
40	47,2082 3611	899 5390 6 8443	0,5280 4780	142 1 5205	0,5280 4780	434 8 9496 1320 0285
50	47,2075 5168	899 5176 8 3648	0,6600 5165	144 1 5206	0,6600 5165	543 11 1865 1319 9847
60	47,2067 1520	899 4913 9 8854	0,7920 5012	144 1 5203	0,7920 5012	652 13 4230 1319 9199
70	47,2057 2666	899 4654 11 4057	0,9240 4211	145 1 5201	0,9240 4211	759 15 6592 1319 8443
80	47,2045 8609	899 4246 12 9256	1,0560 2654	146 1 5196	1,0560 2654	859 17 5949 1319 7581
90	47,2032 9351	899 3842 14 4454	1,1880 0235	148 1 5195	1,1880 0235	978 20 1300 1319 6610
100	47,2018 4897	899 3389 15 9649	1,3199 6845	150 1 5193	1,3199 6845	1086 22 3646 2 2341
110	47,2002 5248	899 2887 17 4842	1,4519 2376	149 1 5186	1,4519 2376	1192 24 5987 1319 4346
120	47,1985 0406	899 2341 19 0028	1,5838 6722	153 1 5185	1,5838 6722	1302 26 8318 1319 3052
130	47,1966 0378	899 1745 20 5213	1,7157 9774	154 1 5179	1,7157 9774	154 29 0643 2 2315
140	47,1945 5165	899 1103 22 0392	1,8477 1425	156 1 5176	1,8477 1425	1518 31 2958 2 2307
150	47,1923 4773	899 0412 23 5586	1,9796 1568	159 1 5170	1,9796 1568	1616 33 5265 1318 8527
160	47,1899 9205		2,1115 0095		2,1115 0095	1724

X = 5220 km

$\chi_{km}$	$\varphi^{\circ}$	$\frac{\Delta \chi}{\Delta \varphi}$ $\frac{\Delta \chi}{\Delta \varphi}$ $\frac{\Delta \chi}{\Delta \varphi}$	$\lambda^{\circ}$	$\frac{\Delta \lambda}{\Delta \chi}$ $\frac{\Delta \lambda}{\Delta \chi}$ $\frac{\Delta \lambda}{\Delta \chi}$	$\lambda^{\circ}$	$\frac{\Delta \lambda}{\Delta \chi}$ $\frac{\Delta \lambda}{\Delta \chi}$ $\frac{\Delta \lambda}{\Delta \chi}$
0	47,1194 9379	899 5813 7582	0,0000 0000	1317 9197	0,0000 0000	0 2 2268 107
10	47,1194 1797	899 5889 2 2744	0,1317 9197	1317 9030	0,1317 9197	107 2 2267 215
20	47,1192 9023	899 5817 3 7907	0,2635 8287	1317 8875	0,2635 8287	215 2 2266 321
30	47,1188 1146	899 5699 5 3068	0,3953 7162	1317 8554	0,3953 7162	323 2 2263 430
40	47,1182 8073	899 5533 6 8229	0,5271 5716	1317 8124	0,5271 5716	432 2 2261 535
50	47,1175 9849	899 5319 8 3387	0,6589 3840	1317 7593	0,6589 3840	540 2 2258 644
60	47,1167 6462	899 5058 9 8545	0,7907 1429	1317 6945	0,7907 1429	647 2 2254 751
70	47,1157 7917	899 4749 11 3701	0,9224 8374	1317 6194	0,9224 8374	756 2 2249 858
80	47,1146 4216	899 4383 12 8854	1,0542 4586	1317 5336	1,0542 4586	863 2 2245 964
90	47,1133 5362	899 3989 14 4004	1,1859 9904	1317 4372	1,1859 9904	950 2 2238 1072
100	47,1119 1358	899 3539 15 9151	1,3177 4276	1317 3300	1,3177 4276	1077 2 2231 1179
110	47,1103 2207	899 3041 17 4294	1,4494 7576	1317 2121	1,4494 7576	1187 2 2225 1286
120	47,1085 7913	899 2492 18 9436	1,5811 9697	1317 0835	1,5811 9697	1293 2 2217 1392
130	47,1066 8477	899 1901 20 4572	1,7129 0532	1316 9443	1,7129 0532	1401 2 2208 1499
140	47,1046 3905	899 1260 21 9704	1,8445 9975	1316 7944	1,8445 9975	1508 2 2199 1606
150	47,1024 4201	899 0572 23 4832	1,9762 7919	1316 6338	1,9762 7919	1616 2 2189 1713
160	47,1000 9369		2,1079 4257		2,1079 4257	

X = 5250 km

$\chi$ km	$\varphi^\circ$	$\frac{\Delta\varphi_x}{\Delta\varphi_y}$	$\frac{\Delta\varphi_x}{\Delta\varphi_y}$	$\frac{\Delta\varphi_x}{\Delta\varphi_y}$	$\frac{\Delta\varphi_x}{\Delta\varphi_y}$	$\frac{\Delta\varphi_x}{\Delta\varphi_y}$	$\frac{\Delta\varphi_x}{\Delta\varphi_y}$	$\frac{\Delta\varphi_x}{\Delta\varphi_y}$	$\frac{\Delta\varphi_x}{\Delta\varphi_y}$	$\lambda^\circ$	$\frac{\Delta\lambda_x}{\Delta\lambda_y}$	$\frac{\Delta\lambda_x}{\Delta\lambda_y}$	$\frac{\Delta\lambda_x}{\Delta\lambda_y}$	$\frac{\Delta\lambda_x}{\Delta\lambda_y}$	$\frac{\Delta\lambda_x}{\Delta\lambda_y}$
0	47,3893 6693	899 5489	7653	142	0,0000 0000	1324 6325	0	0	0	0,0000 0000	1324 6325	0	0	0	0
10	47,3892 9040	899 5465	2 2399	116	0,1324 6325	1324 6215	2 2595	115	116	0,1324 6325	1324 6215	2 2595	115	116	116
20	47,3890 6081	899 5393	5 8264	142	0,2644 7572	1324 5937	4 5186	250	250	0,2644 7572	1324 5937	4 5186	250	250	250
30	47,3886 7817	899 5273	9 3268	143	0,3973 8537	1324 5669	6 7177	320	320	0,3973 8537	1324 5669	6 7177	320	320	320
40	47,3881 4249	899 5104	16 9	143	0,5298 4206	1324 5232	9 0366	441	441	0,5298 4206	1324 5232	9 0366	441	441	441
50	47,3874 5376	899 4889	8 4174	144	0,6622 9439	1324 4686	11 2953	550	550	0,6622 9439	1324 4686	11 2953	550	550	550
60	47,3866 1202	899 4625	9 9474	145	0,7947 4124	1324 4030	13 5535	654	654	0,7947 4124	1324 4030	13 5535	654	654	654
70	47,3856 1728	899 4312	11 4773	144	0,9271 8154	1324 3267	15 8116	770	770	0,9271 8154	1324 3267	15 8116	770	770	770
80	47,3844 6955	899 3953	13 0068	146	1,0596 1421	1324 2392	18 0691	878	878	1,0596 1421	1324 2392	18 0691	878	878	878
90	47,3831 6887	899 3515	14 5362	145	1,1920 3913	1324 1410	20 3260	989	989	1,1920 3913	1324 1410	20 3260	989	989	989
100	47,3817 1525	899 3030	16 0652	150	1,3244 5223	1324 0519	22 5824	1097	1097	1,3244 5223	1324 0519	22 5824	1097	1097	1097
110	47,3801 0873	899 2587	17 5938	152	1,4568 5542	1323 9118	24 8390	1208	1208	1,4568 5542	1323 9118	24 8390	1208	1208	1208
120	47,3783 4335	899 2036	19 1221	155	1,5892 4650	1323 7809	27 0929	1318	1318	1,5892 4650	1323 7809	27 0929	1318	1318	1318
130	47,3764 3714	899 1436	20 6499	156	1,7216 2469	1323 6330	29 3470	1427	1427	1,7216 2469	1323 6330	29 3470	1427	1427	1427
140	47,3743 7215	899 0787	22 1776	155	1,8539 8859	1323 4804	31 6003	1536	1536	1,8539 8859	1323 4804	31 6003	1536	1536	1536
150	47,3721 5439	899 0093	23 7045	159	1,9863 3723	1323 3228	33 8526	1645	1645	1,9863 3723	1323 3228	33 8526	1645	1645	1645
160	47,3697 8394			1 5263	2,1186 6951					2,1186 6951					1744

X = 5240 km

$\chi$ km	$\varphi^\circ$	$\frac{\Delta\varphi_x}{\Delta\varphi_y}$	$\frac{\Delta\varphi_x}{\Delta\varphi_y}$	$\frac{\Delta\varphi_x}{\Delta\varphi_y}$	$\frac{\Delta\varphi_x}{\Delta\varphi_y}$	$\frac{\Delta\varphi_x}{\Delta\varphi_y}$	$\frac{\Delta\varphi_x}{\Delta\varphi_y}$	$\frac{\Delta\varphi_x}{\Delta\varphi_y}$	$\frac{\Delta\varphi_x}{\Delta\varphi_y}$	$\lambda^\circ$	$\frac{\Delta\lambda_x}{\Delta\lambda_y}$	$\frac{\Delta\lambda_x}{\Delta\lambda_y}$	$\frac{\Delta\lambda_x}{\Delta\lambda_y}$	$\frac{\Delta\lambda_x}{\Delta\lambda_y}$	$\frac{\Delta\lambda_x}{\Delta\lambda_y}$
0	47,2994 1063	899 5630	7629	141	0,0000 0000	1322 3840	0	0	0	0,0000 0000	1322 3840	0	0	0	0
10	47,2993 3434	899 5606	2 2887	141	0,1322 3840	1322 3732	2 2485	110	110	0,1322 3840	1322 3732	2 2485	110	110	110
20	47,2991 0547	899 5534	5 8145	141	0,2644 7572	1322 3515	4 4968	218	218	0,2644 7572	1322 3515	4 4968	218	218	218
30	47,2987 2402	899 5415	9 3401	142	0,3967 1087	1322 3189	6 7450	327	327	0,3967 1087	1322 3189	6 7450	327	327	327
40	47,2981 9001	899 5248	12 8657	143	0,5289 4276	1322 2754	8 9930	435	435	0,5289 4276	1322 2754	8 9930	435	435	435
50	47,2975 0344	899 5032	16 3911	143	0,6611 7030	1322 2212	11 2408	542	542	0,6611 7030	1322 2212	11 2408	542	542	542
60	47,2966 6433	899 4769	19 9163	144	0,7933 9242	1322 1561	13 4882	653	653	0,7933 9242	1322 1561	13 4882	653	653	653
70	47,2956 7270	899 4458	23 4415	146	0,9256 0803	1322 0800	15 7351	765	765	0,9256 0803	1322 0800	15 7351	765	765	765
80	47,2945 2855	899 4100	26 9662	147	1,0578 1603	1321 9932	17 9818	873	873	1,0578 1603	1321 9932	17 9818	873	873	873
90	47,2932 3193	899 3694	30 4907	149	1,1900 1535	1321 8936	20 2278	982	982	1,1900 1535	1321 8936	20 2278	982	982	982
100	47,2917 8286	899 3229	34 0151	150	1,3222 0491	1321 7872	22 4732	1092	1092	1,3222 0491	1321 7872	22 4732	1092	1092	1092
110	47,2901 8135	899 2738	37 5388	151	1,4543 8363	1321 6677	24 7179	1201	1201	1,4543 8363	1321 6677	24 7179	1201	1201	1201
120	47,2884 2747	899 2188	41 0624	152	1,5865 5040	1321 5377	26 9620	1309	1309	1,5865 5040	1321 5377	26 9620	1309	1309	1309
130	47,2865 2123	899 1591	44 5855	155	1,7187 0417	1321 3966	29 2052	1418	1418	1,7187 0417	1321 3966	29 2052	1418	1418	1418
140	47,2844 6268	899 0947	48 1083	156	1,8508 4383	1321 2450	31 4476	1527	1527	1,8508 4383	1321 2450	31 4476	1527	1527	1527
150	47,2822 5185	899 0254	51 6305	161	1,9829 6833	1321 0823	33 6890	1636	1636	1,9829 6833	1321 0823	33 6890	1636	1636	1636
160	47,2798 8880			1 5246	2,1150 7656					2,1150 7656					1734

X = 5270 km

Y(km)	$\varphi^\circ$	$\frac{\Delta\psi_x}{\Delta\psi_y}$	$\lambda^\circ$	$\frac{\Delta\lambda_x}{\Delta\lambda_y}$	$\frac{\Delta\lambda_{xx}}{\Delta\lambda_{yy}}$	$\frac{\Delta\lambda_{xy}}{\Delta\lambda_{yy}}$	$\frac{\Delta\lambda_{xx}}{\Delta\lambda_{yy}}$
0	47,5692 7529	899 5206 7701	0,0000 0000	142 25 1 5402	0 2 2814 110	0 1329 1621 2 2814 110	0 2 2814 110
10	47,5691 9828	899 5181 2 3103	0,1329 1621	140 73 1 5402	2 2814 2 2813 222	2 2814 1329 1511 2 2813 222	2 2814 1329 1511 2 2813 222
20	47,5689 6725	899 5108 3 8505	0,2658 3132	139 120 1 5400	4 5627 2 2612 332	4 5627 1329 1269 2 2612 332	2 2612 332
30	47,5685 8820	899 4988 5 3905	0,3987 4421	141 169 1 5400	6 8439 2 2605 442	6 8439 1329 0398 2 2605 442	2 2605 442
40	47,5680 4315	899 4819 6 9305	0,5316 5379	142 217 1 5398	9 1250 2 2805 552	9 1250 1329 0515 2 2805 552	2 2805 552
50	47,5673 5010	899 4602 8 4703	0,6645 5894	144 266 1 5396	11 4056 2 2803 664	11 4056 1328 9963 2 2803 664	2 2803 664
60	47,5665 0307	899 4336 10 0099	0,7974 5857	144 314 1 5394	13 6859 2 2800 774	13 6859 1328 9299 2 2800 774	2 2800 774
70	47,5655 0208	899 4022 11 5493	0,9303 5156	145 361 1 5395	15 9659 2 2795 884	15 9659 1328 8523 2 2795 884	2 2795 884
80	47,5643 4715	899 3660 13 0886	1,0632 3681	147 410 1 5388	18 2454 2 2790 995	18 2454 1328 7641 2 2790 995	2 2790 995
90	47,5630 3829	899 3250 14 6274	1,1961 1322	148 459 1 5386	20 5244 2 2783 1104	20 5244 1328 6646 2 2783 1104	2 2783 1104
100	47,5615 7555	899 2791 16 1660	1,3289 7968	149 507 1 5383	22 8027 2 2776 1216	22 8027 1328 5542 2 2776 1216	2 2776 1216
110	47,5599 5895	899 2284 17 7043	1,4618 3510	152 555 1 5379	25 0803 2 2761 1326	25 0803 1328 4261 2 2761 1326	2 2761 1326
120	47,5581 8852	899 1729 19 2422	1,5946 7836	154 603 1 5374	27 3572 2 2744 1435	27 3572 1328 3000 2 2744 1435	2 2744 1435
130	47,5562 6430	899 1126 20 7796	1,7275 0836	157 652 1 5372	29 6333 2 2727 1546	29 6333 1328 1655 2 2727 1546	2 2727 1546
140	47,5541 8634	899 0474 22 3168	1,8603 2401	159 700 1 5364	31 9085 2 2710 1656	31 9085 1328 0019 2 2710 1656	2 2710 1656
150	47,5519 5466	898 9774 23 8552	1,9931 2420	159 748 1 5358	34 1827 2 2693 1765	34 1827 1327 8363 2 2693 1765	2 2693 1765
160	47,5495 6934		2,1259 0783	1 5358			

X = 5260 km

Y(km)	$\varphi^\circ$	$\frac{\Delta\psi_x}{\Delta\psi_y}$	$\lambda^\circ$	$\frac{\Delta\lambda_x}{\Delta\lambda_y}$	$\frac{\Delta\lambda_{xx}}{\Delta\lambda_{yy}}$	$\frac{\Delta\lambda_{xy}}{\Delta\lambda_{yy}}$	$\frac{\Delta\lambda_{xx}}{\Delta\lambda_{yy}}$
0	47,4793 2182	899 5347 7677	0,0000 0000	141 24 1 5354	0 2 2701 114	0 1326 8920 2 2701 114	0 2 2701 114
10	47,4792 4505	899 5323 2 3031	0,1326 8920	142 72 1 5353	2 2701 2 2705 218	2 2701 1326 8806 2 2705 218	2 2705 218
20	47,4790 1474	899 5251 3 8384	0,2653 7726	143 121 1 5353	4 5466 2 2701 330	4 5466 1326 8588 2 2701 330	2 2701 330
30	47,4786 3090	899 5130 5 3737	0,3980 6314	142 168 1 5351	6 8107 2 2700 439	6 8107 1326 8258 2 2700 439	2 2700 439
40	47,4780 9353	899 4962 6 9088	0,5307 4572	143 217 1 5350	9 0807 2 2696 549	9 0807 1326 7819 2 2696 549	2 2696 549
50	47,4774 0265	899 4745 8 4438	0,6634 2391	143 265 1 5345	11 3503 2 2693 661	11 3503 1326 7270 2 2693 661	2 2693 661
60	47,4765 5827	899 4480 9 9787	0,7960 9661	144 314 1 5342	13 6186 2 2690 767	13 6186 1326 6609 2 2690 767	2 2690 767
70	47,4755 6040	899 4168 11 5132	0,9287 6270	146 361 1 5344	15 8886 2 2687 881	15 8886 1326 5842 2 2687 881	2 2687 881
80	47,4744 0908	899 3807 13 0476	1,0614 2112	147 410 1 5341	18 1569 2 2680 987	18 1569 1326 4961 2 2680 987	2 2680 987
90	47,4731 0432	899 3397 14 5817	1,1940 7073	147 457 1 5338	20 4249 2 2672 1099	20 4249 1326 3974 2 2672 1099	2 2672 1099
100	47,4716 4615	899 2940 16 1155	1,3267 1047	149 505 1 5334	22 6921 2 2667 1208	22 6921 1326 2875 2 2667 1208	2 2667 1208
110	47,4700 3460	899 2435 17 6489	1,4593 3922	151 554 1 5332	24 9588 2 2659 1317	24 9588 1326 1667 2 2659 1317	2 2659 1317
120	47,4682 6971	899 1881 19 1821	1,5919 5589	152 601 1 5327	27 2247 2 2650 1427	27 2247 1326 0350 2 2650 1427	2 2650 1427
130	47,4663 5150	899 1280 20 7148	1,7245 5939	154 648 1 5322	29 4897 2 2642 1536	29 4897 1325 8923 2 2642 1536	2 2642 1536
140	47,4642 8002	899 0632 22 2470	1,8571 4862	158 695 1 5317	31 7539 2 2632 1646	31 7539 1325 7387 2 2632 1646	2 2632 1646
150	47,4620 5532	898 9934 23 7787	1,9897 2249	160 745 1 5312	34 0171 2 2623 1751	34 0171 1325 5741 2 2623 1751	2 2623 1751
160	47,4596 7745		2,1222 7990	1 5312			

X = 5290 km

Ykm	φ°	Δφ x Δφ y	Δφ x Δφ y	λ°	Δλ x Δλ y	Δλ x Δλ y
0	47,7491 7799	899 4924 7749	142 25	0,0000 0000	1333 7360	0 2 3038 121
10	47,7491 0030	899 4809 2 3248	142 73	0,1333 7360	1333 7249	111 2 3038 2035 285
20	47,7488 6802	899 4826 3 8747	142 159	0,2667 4609	1333 7024	226 2 3038 595
30	47,7484 8055	899 4705 5 4244	143 169	0,4001 1633	1333 6689	338 2 3033 449
40	47,7479 3811	899 4536 6 9741	146 154	0,5334 8322	1333 6240	450 2 3031 559
50	47,7472 4070	899 4347 8 5235	146 219	0,6668 4562	11 5173 1333 5681	562 2 3026 671
60	47,7463 8835	899 4048 10 0728	144 286	0,8002 0243	13 8199 1333 5010	676 2 3022 784
70	47,7453 8107	899 3732 11 6219	146 365	0,9335 5253	16 1221 1333 4226	789 2 3018 896
80	47,7442 8888	899 3367 13 1707	147 444	1,0668 9479	18 4239 1333 3330	901 2 3013 1006
90	47,7429 0181	899 2953 14 7193	148 523	1,2002 2809	20 7252 1333 2324	1013 2 3006 1119
100	47,7414 2988	899 2491 16 2677	149 602	1,3335 5133	23 0258 1333 1205	1125 2 2999 1230
110	47,7398 0311	899 1982 17 8155	153 681	1,4668 6338	25 3257 1332 9975	1237 2 2992 1342
120	47,7380 2156	899 1423 19 3631	155 760	1,6001 6313	27 6248 1332 8633	1350 2 2983 1454
130	47,7360 8525	899 0915 20 9102	155 839	1,7334 4946	29 9231 1332 7179	1462 2 2975 1564
140	47,7339 9423	899 0159 22 4568	159 918	1,8667 2125	32 2206 1332 5615	1573 2 2966 1677
150	47,7317 4855	898 9455 24 0031	161 997	1,9999 7740	34 5170 1332 3938	1685 2 2954 1788
160	47,7293 4824		15456	2,1332 1678		

X = 5280 km

Ykm	φ°	Δφ x Δφ y	Δφ x Δφ y	λ°	Δλ x Δλ y	Δλ x Δλ y
0	47,6592 2735	899 5064 7726	140 23	0,0000 0000	1331 4435	0 2 2925 111
10	47,6591 5009	899 5041 2 3176	142 72	0,1331 4435	1331 4324	113 2 2925 223
20	47,6589 8333	899 4969 3 8623	142 151	0,2662 8759	1331 4101	223 2 2923 332
30	47,6585 3208	899 4847 5 4074	142 170	0,3994 2860	1331 3765	336 2 2920 448
40	47,6579 9134	899 4677 6 9522	141 219	0,5325 6629	1331 3321	449 2 2919 555
50	47,6572 9612	899 4459 8 4969	141 266	0,6656 9950	11 4512 1331 2766	561 2 2915 667
60	47,6564 4643	899 4192 10 0415	144 313	0,7988 2716	13 7527 1331 2039	672 2 2911 779
70	47,6554 4230	899 3877 11 5855	145 364	0,9319 4815	16 0438 1331 1320	783 2 2906 889
80	47,6542 8375	899 3513 13 1296	146 411	1,0650 6135	18 3344 1331 0431	895 2 2899 1002
90	47,6529 7073	899 3102 14 6733	148 460	1,1981 6566	20 6243 1330 9429	1009 2 2895 1111
100	47,6519 0346	899 2642 16 2167	151 510	1,3312 5995	22 9138 1330 8318	1119 2 2887 1223
110	47,6498 8179	899 2132 17 7598	150 557	1,4643 4313	25 2025 1330 7095	1232 2 2880 1334
120	47,6481 0581	899 1575 19 3025	152 606	1,5974 1408	27 4905 1330 5761	1343 2 2872 1444
130	47,6461 7556	899 0959 20 8448	154 654	1,7304 7169	29 7777 1330 4317	1454 2 2862 1556
140	47,6440 9108	899 0315 22 3868	156 703	1,8635 1486	32 0639 1330 2761	1567 2 2854 1665
150	47,6418 5240	898 9615 23 9280	160 751	1,9965 4247	34 3493 1330 1036	1677 2 2842 1775
160	47,6394 5960		15406	2,1295 5343		

X = 5310 km

Y/km	φ°	Δφ x Δφ y	Δφ <sup>pk</sup> Δφ <sup>xy</sup> Δφ <sup>yy</sup>	λ°	Δλ x Δλ y Δλ z	Δλ x Δλ y Δλ z
0	47,9290 7505	899 4640 7799	139 23 1 5595	0,0000 0000	0	0 2 3264 113
10	47,9289 9706	899 4517 2 3394	141 71 1 5596	0,1338 3547	1338 3547	2 3264 113 2 3262 226
20	47,9287 6312	899 4543 3 8990	141 123 1 5595	0,2676 6981	1338 3208	4 6526 2 3260 341
30	47,9283 7322	899 4420 5 4585	141 171 1 5594	0,4015 0189	1338 2867	6 9786 2 3260 453
40	47,9278 2737	899 4319 7 0119	143 220 1 5592	0,5353 3056	1338 2414	9 3046 2 3256 567
50	47,9271 2558	899 4029 8 5771	144 269 1 5591	0,6691 5470	11 6302 1338 1847	11 6302 2 3262 688
60	47,9262 6787	899 3760 10 1362	145 319 1 5588	0,8029 7317	13 9554 1338 1167	13 9554 2 3249 793
70	47,9252 5425	899 3441 11 6950	144 367 1 5586	0,9367 8464	16 2803 1338 0374	16 2803 2 3243 906
80	47,9240 8475	899 3074 13 2556	146 415 1 5582	1,0705 8858	18 6046 1337 9468	18 6046 2 3233 1020
90	47,9227 5939	899 2659 14 8118	150 466 1 5581	1,2043 8326	20 9284 1337 8448	20 9284 2 3231 1153
100	47,9212 7821	899 2193 16 3699	149 514 1 5576	1,3381 6774	23 2515 1337 7315	23 2515 2 3225 1245
110	47,9196 4122	899 1679 17 9275	152 561 1 5572	1,4719 4089	25 5740 1337 6010	25 5740 2 3222 1359
120	47,9178 4847	899 1117 19 4847	156 612 1 5569	1,6057 0159	27 8956 1337 4711	27 8956 2 3209 1471
130	47,9159 0000	899 0505 21 0416	158 661 1 5564	1,7394 4870	30 2165 1337 3240	30 2165 2 3199 1585
140	47,9137 9584	898 9844 22 5960	159 709 1 5559	1,8731 6110	32 5364 1337 1654	32 5364 2 3184 1696
150	47,9115 3604	898 9134 24 1539	160 758 1 5554	2,0068 9765	34 8553 1336 9959	34 8553 2 3178 1812
160	47,9091 2065			2,1405 9724		

X = 5300 km

Y/km	φ°	Δφ x Δφ y	Δφ <sup>pk</sup> Δφ <sup>xy</sup> Δφ <sup>yy</sup>	λ°	Δλ x Δλ y Δλ z	Δλ x Δλ y Δλ z
0	47,8391 2723	899 4782 7774	142 25 1 5547	0,0000 0000	0	0 2 3149 114
10	47,8390 4949	899 4757 2 3321	140 72 1 5547	0,1336 0398	1336 0284	2 3149 114 2 3150 224
20	47,8388 1628	899 4684 3 8868	141 122 1 5545	0,2672 0682	1336 0060	4 6699 2 3148 338
30	47,8384 2760	899 4562 5 4413	142 172 1 5547	0,4008 0742	6 9447 1335 9722	6 9447 2 3145 451
40	47,8378 8347	899 4390 8 9960	144 210 1 5544	0,5344 0464	9 2592 1335 9271	9 2592 2 3143 564
50	47,8371 8387	899 4171 8 5504	142 267 1 5540	0,6679 9735	11 5735 1335 8707	11 5735 2 3139 675
60	47,8363 2883	899 3904 10 1044	144 318 1 5540	0,8015 8442	13 8875 1335 8032	13 8875 2 3135 788
70	47,8353 1839	899 3586 11 6584	145 368 1 5537	0,9351 6474	16 2040 1335 7244	16 2040 2 3130 901
80	47,8341 5255	899 2220 13 2121	146 415 1 5534	1,0687 3718	18 5140 1335 6343	18 5140 2 3125 1013
90	47,8328 3134	899 2805 14 7655	146 463 1 5531	1,2023 0061	20 8265 1335 5330	20 8265 2 3118 1128
100	47,8313 5479	899 2342 16 3186	149 513 1 5528	1,3358 5391	23 1383 1335 4204	23 1383 2 3111 1238
110	47,8297 2293	899 1829 17 8714	150 561 1 5525	1,4693 9595	25 4484 1335 2968	25 4484 2 3104 1350
120	47,8279 3579	899 1268 19 4239	151 608 1 5519	1,6029 2561	27 7598 1335 1616	27 7598 2 3095 1462
130	47,8259 9340	899 0660 20 9788	155 656 1 5514	1,7364 4177	30 0693 1335 0154	30 0693 2 3086 1575
140	47,8238 9582	899 0002 22 5272	158 705 1 5512	1,8699 4331	32 3779 1334 8579	32 3779 2 3076 1687
150	47,8216 4310	898 9294 24 0784	160 755 1 5506	2,0034 2910	34 6855 1334 6892	34 6855 2 3066 1799
160	47,8192 3526			2,1368 9802		

X = 5330 km

$\chi_{km}$	$\varphi^{\circ}$	$\frac{\Delta\varphi^{\circ}}{\Delta\chi}$ $\frac{\Delta\varphi^{\circ}}{\Delta\chi}$	$\lambda^{\circ}$	$\frac{\Delta\lambda^{\circ}}{\Delta\chi}$ $\frac{\Delta\lambda^{\circ}}{\Delta\chi}$ $\frac{\Delta\lambda^{\circ}}{\Delta\chi}$	$\frac{\Delta\lambda^{\circ}}{\Delta\chi}$ $\frac{\Delta\lambda^{\circ}}{\Delta\chi}$ $\frac{\Delta\lambda^{\circ}}{\Delta\chi}$
0	48,1089 6646	899 4369 7847	0,0000 0000	142 36 1 5635	0 3492 2 115
10	48,1088 8799	899 4323 2 3542	0,1343 0188	140 12 1 5634	2 3492 1343 0073
20	48,1086 5257	899 4260 3 9235	0,2686 0561	142 183 1 5693	4 6983 1342 9843
30	48,1082 6021	899 4137 5 4929	0,4029 0104	142 212 1 5631	7 0473 1342 9499
40	48,1077 1092	899 3965 7 0620	0,5371 9603	143 303 1 5630	9 3961 1342 9040
50	48,1070 0472	899 3743 8 6310	0,6714 8643	144 272 1 5689	11 7446 1342 8467
60	48,1061 4162	899 3471 10 1999	0,8057 7110	144 321 1 5687	14 0927 1342 7778
70	48,1051 2163	899 3150 11 7686	0,9400 4888	145 373 1 5684	16 4494 1342 6973
80	48,1039 4477	899 2780 13 3370	1,0743 1863	145 419 1 5681	18 7876 1342 6056
90	48,1026 1107	899 2361 14 9051	1,2085 7919	146 467 1 5677	21 1343 1342 5025
100	48,1011 2056	899 1894 16 4728	1,3428 2944	150 517 1 5675	23 4802 1342 3878
110	48,0994 7328	899 1377 18 0405	1,4770 6822	153 566 1 5670	25 8255 1342 2617
120	48,0976 6925	899 0810 19 6073	1,6112 9439	154 616 1 5666	28 1699 1342 1241
130	48,0957 0852	899 0194 21 1739	1,7455 0680	156 666 1 5662	30 5135 1341 9752
140	48,0935 9113	898 9528 22 7401	1,8797 0432	157 714 1 5657	32 8562 1341 8147
150	48,0913 1712	898 8814 24 3058	2,0138 8579	161 763 1 5652	35 1978 1341 6425
160	48,0888 8654		2,1480 5008		37 5306 2 1835

X = 5320 km

$\chi_{km}$	$\varphi^{\circ}$	$\frac{\Delta\varphi^{\circ}}{\Delta\chi}$ $\frac{\Delta\varphi^{\circ}}{\Delta\chi}$	$\lambda^{\circ}$	$\frac{\Delta\lambda^{\circ}}{\Delta\chi}$ $\frac{\Delta\lambda^{\circ}}{\Delta\chi}$ $\frac{\Delta\lambda^{\circ}}{\Delta\chi}$	$\frac{\Delta\lambda^{\circ}}{\Delta\chi}$ $\frac{\Delta\lambda^{\circ}}{\Delta\chi}$ $\frac{\Delta\lambda^{\circ}}{\Delta\chi}$
0	48,0190 2145	899 1501 7822	0,0000 0000	142 35 1 5646	0 3377 2 115
10	48,0189 4323	899 4476 2 3468	0,1340 6811	143 14 1 5645	2 3377 1340 6636
20	48,0187 0655	899 4402 3 9113	0,2681 3507	142 123 1 5643	4 6754 1340 6468
30	48,0183 1742	899 4279 5 4756	0,4021 9975	142 173 1 5643	7 0129 1340 6127
40	48,0177 6986	899 4106 7 0399	0,5362 6102	141 221 1 5641	9 3501 1340 5670
50	48,0170 6587	899 3885 8 6040	0,6703 1772	142 270 1 5641	11 6871 1340 5099
60	48,0162 0547	899 3635 10 1681	0,8043 6871	144 318 1 5636	14 0239 1340 4416
70	48,0151 8866	899 3257 11 7317	0,9384 1287	147 369 1 5634	16 3601 1340 3617
80	48,0140 1549	899 2928 13 2951	1,0724 4904	148 417 1 5633	18 6959 1340 2706
90	48,0126 8598	899 2509 14 8584	1,2064 7610	148 467 1 5629	21 0309 1340 1679
100	48,0112 0014	899 2042 16 4215	1,3404 9289	148 517 1 5624	23 3655 1340 0510
110	48,0095 5801	899 1527 17 9837	1,4744 9829	150 566 1 5622	25 6933 1339 9286
120	48,0077 5964	899 0961 19 5459	1,6084 9115	151 616 1 5618	28 0324 1339 7920
130	48,0056 0505	899 0347 21 1077	1,7424 7035	153 666 1 5613	30 3645 1339 6439
140	48,0036 9428	898 9685 22 6690	1,8764 3474	156 714 1 5607	32 6988 1339 4844
150	48,0014 2738	898 8974 24 2237	2,0103 8318	160 761 1 5601	35 0261 1339 3137
160	47,9990 0441		2,1443 1455		37 3506 2 1821

X = 5350 km

Y/km	φ°	Δφ Δφ	Δλ Δλ	Δλ Δλ	λ°	Δλ Δλ	Δλ Δλ
0	48,2888 5222	899 4877 25 7897	141 25 15793	0,0000 0000	1347 7287	0	2 3724 115
10	48,2887 7325	899 4052 2 3690	141 74 15792	0,1347 7287	1347 7172	2 3724	117 352
20	48,2885 3635	899 3978 3 9482	142 424 15792	0,2695 4459	1347 6938	4 7446	235 348
30	48,2881 4153	899 3954 5 5274	143 171 15791	0,4043 1397	1347 6590	7 1169	350 464
40	48,2875 8879	899 3680 7 1065	143 224 15789	0,5390 7987	1347 6128	9 4888	461 582
50	48,2868 7814	899 3456 8 6854	143 274 15788	0,6738 4113	1347 5544	11 8604	585 697
60	48,2860 0960	899 3482 10 2642	142 322 15784	0,8085 9657	1347 4847	14 2317	701 815
70	48,2849 8318	899 2860 11 8426	145 372 15783	0,9433 4504	1347 4034	16 6026	817 929
80	48,2837 9932	899 2487 13 4209	145 422 15780	1,0780 8538	1347 3105	18 9729	935 1046
90	48,2824 5683	899 2065 14 9989	146 471 15776	1,2128 1643	1347 2059	21 3426	1052 1161
100	48,2809 5694	899 1594 16 5765	149 521 15773	1,3475 3702	1347 0898	23 7117	1169 1276
110	48,2792 9929	899 1073 18 1538	152 571 15769	1,4822 4600	1346 9622	26 0801	1285 1394
120	48,2774 8391	899 0502 19 7307	153 621 15765	1,6169 4222	1346 8228	28 4476	1402 1508
130	48,2755 4084	899 9881 21 3072	153 673 15761	1,7516 2450	1346 6720	30 8143	1518 1625
140	48,2733 8012	899 9212 22 8833	157 718 15754	1,8862 9170	1346 5035	32 1800	1635 1739
150	48,2710 9179	898 8494 24 4587	162 769 15748	2,0209 4265	1346 3356	35 5448	1750 1855
160	48,2686 4592		1 5748	2,1555 7621			

X = 5340 km

Y/km	φ°	Δφ Δφ	Δλ Δλ	Δλ Δλ	λ°	Δλ Δλ	Δλ Δλ
0	48,1989 1005	899 4247 1873	140 24 15742	0,0000 0000	1345 3680	0	2 3607 116
10	48,1988 3132	899 4193 2 3615	141 75 15744	0,1345 3680	1345 3564	2 3607	117 231
20	48,1985 9517	899 4118 3 9359	140 123 15742	0,2690 7244	1345 3333	4 7215	231 346
30	48,1982 0158	899 3905 5 5101	141 173 15741	0,4036 0577	1345 2987	7 0820	349 462
40	48,1976 5057	899 3622 7 0842	142 223 15740	0,5381 3564	1345 2525	9 4422	469 577
50	48,1969 4215	899 3599 8 6582	143 272 15738	0,6726 6089	1345 1948	11 8024	580 693
60	48,1960 7633	899 3327 10 2320	145 322 15736	0,8071 8037	1345 1255	14 1620	697 808
70	48,1950 5313	899 3005 11 8056	145 370 15733	0,9416 9292	1345 0447	16 5212	814 924
80	48,1938 7257	899 2635 13 3789	148 420 15729	1,0761 9739	1344 9523	18 8799	930 1039
90	48,1925 3468	899 2215 14 9518	150 471 15727	1,2106 9262	1344 8484	21 2381	1045 1153
100	48,1910 3950	899 1744 16 5245	150 520 15723	1,3451 7746	1344 7331	23 5956	1159 1270
110	48,1893 8705	899 1224 18 0970	151 568 15719	1,4796 5077	1344 6061	25 9523	1278 1384
120	48,1875 7735	899 0656 19 6689	154 618 15716	1,6141 1138	1344 4677	28 3084	1392 1508
130	48,1856 1046	899 0038 21 2405	157 670 15710	1,7485 5815	1344 3173	30 6535	1498 1616
140	48,1834 8641	898 9371 22 8115	159 718 15706	1,8829 8994	1344 1563	33 0716	1624 1722
150	48,1812 0526	898 8653 24 3821	159 766 15700	2,0174 0557	1343 9835	35 3708	1740 1844
160	48,1787 6705		1 5700	2,1518 0392			

X = 5370 km

Ykm	$\varphi^{\circ}$	$\frac{\Delta\varphi}{\Delta Y}$	$\lambda^{\circ}$	$\frac{\Delta\lambda}{\Delta Y}$	$\frac{\Delta\lambda}{\Delta\varphi}$
0	48,4687 3235	899 3795 7947	0,0000 0000	140 24	0 2 3958 118
10	48,4686 5288	899 3771 2 3639	0,1352 4852	142 1592	2 3058 1352 4734 235
20	48,4684 1449	899 3696 3 9731	0,2704 9586	142 15891	4 7916 1352 4499 2 3956 353
30	48,4680 1718	899 3571 5 5622	0,4057 4085	143 15891	7 1872 1352 4146 2 3954 471
40	48,4674 6096	899 3495 7 1513	0,5409 8231	142 15889	9 5826 1352 3875 2 3951 589
50	48,4667 4583	899 3169 8 7402	0,6762 1906	141 15886	11 9777 1352 3086 703
60	48,4658 7181	899 2896 10 3288	0,8114 4992	145 15884	14 3725 1352 2381 2 3942 823
70	48,4648 3893	899 2671 11 9172	0,9466 7373	147 15882	16 7667 1352 1558 2 3958 942
80	48,4636 4721	899 2195 15 5054	1,0818 8931	147 15879	19 1605 1352 0616 2 3951 1058
90	48,4622 9667	899 1769 15 0933	1,2170 9547	147 15877	21 5536 1351 9558 2 3925 1176
100	48,4607 8733	899 1295 16 6810	1,3522 9105	150 15871	23 9461 1351 8382 2 1184 1293
110	48,4591 1923	899 0771 18 2681	1,4874 7487	153 15868	26 3379 1351 7089 2 3901 1411
120	48,4572 9242	899 0195 19 8549	1,6226 4576	153 15865	28 7288 1351 5678 2 3891 1527
130	48,4553 0693	898 9570 21 4414	1,7578 0254	154 15860	31 1189 1351 4151 2 3891 1645
140	48,4531 6279	898 8896 23 0274	1,8929 4405	157 15853	33 5090 1351 2500 2 3880 1762
150	48,4508 6005	898 8173 24 6127	2,0280 6911	162 15847	35 8960 1351 0744 2 3870 1878
160	48,4483 9878		2,1631 7655		

X = 5360 km

Ykm	$\varphi^{\circ}$	$\frac{\Delta\varphi}{\Delta Y}$	$\lambda^{\circ}$	$\frac{\Delta\lambda}{\Delta Y}$	$\frac{\Delta\lambda}{\Delta\varphi}$
0	48,3787 9299	899 4936 7922	0,0000 0000	141 25	0 2 3841 117
10	48,3787 1377	899 3911 2 3764	0,1350 1011	140 15842	2 2841 1350 0894 233
20	48,3784 7613	899 3036 3 9606	0,2700 1905	140 15842	4 7681 1350 0661 352
30	48,3780 8007	899 3711 5 5448	0,4050 2566	140 15841	7 1519 1350 0309 2 3637 467
40	48,3775 2559	899 3537 7 1289	0,5400 2875	142 15839	9 5355 1349 3842 2 3633 582
50	48,3768 1270	899 3313 8 7128	0,6750 2717	144 15836	11 9189 1349 9275 2 3629 701
60	48,3759 4142	899 3039 10 2964	0,8100 1974	143 15835	14 3018 1349 8556 2 3625 819
70	48,3749 1178	899 2715 11 8793	0,9450 0530	144 15832	16 6843 1349 7787 2 3621 935
80	48,3737 2379	899 2342 13 4631	1,0799 8267	147 15829	19 0664 1349 6802 2 3614 1052
90	48,3723 7748	899 1919 15 0460	1,2149 5069	150 15826	21 4478 1349 5750 2 3608 1168
100	48,3708 7288	899 1445 16 6286	1,3499 0819	150 15823	23 8286 1349 4582 2 3600 1285
110	48,3692 4002	899 0921 18 2109	1,4848 5401	150 15819	26 2086 1349 3297 2 3592 1402
120	48,3673 8893	899 0349 19 7928	1,6197 8698	154 15813	28 5878 1349 1895 2 3783 1518
130	48,3654 0965	898 9728 21 3741	1,7547 0593	158 15810	30 9661 1349 0377 1634
140	48,3632 7224	898 9055 22 9551	1,8896 0970	159 15805	33 3435 1348 8143 2 3752 1654
150	48,3609 7673	898 8332 24 5356	2,0244 9173	159 15800	35 7198 1348 6992 2 3752 1869
160	48,3585 2317		2,1593 6705		



X = 5390 km

Y <sub>km</sub>	φ°	Δφ° Δφ	Δφ° Δφ	λ°	Δλ° Δλ	Δλ° Δλ	Δλ° Δλ
0	48,6486 0685	899 3543 7997	140 1592	0,0000 0000	0	2 4196 119	0
10	48,6485 2688	899 3488 2 3983	140 1592	0,1357 2887	1357 2887	2 4196 1357 2887	2 4196
20	48,6482 8699	899 3412 3 9982	140 1591	0,2714 5655	2714 5655	4 8391 1357 2530	2 4194
30	48,6478 8717	899 3286 5 5973	140 1591	0,4071 8185	4071 8185	7 2585 1357 2172	2 4191
40	48,6473 2744	899 3110 7 1964	141 1588	0,5429 0357	5429 0357	9 6776 1357 1695	2 4189
50	48,6466 0780	899 2884 8 7952	143 1586	0,6786 2052	6786 2052	12 0955 1357 1160	2 4184
60	48,6457 2828	899 2606 10 3940	143 1584	0,8143 3152	8143 3152	14 5149 1357 0384	2 4181
70	48,6446 8888	899 2280 11 9924	144 1582	0,9500 3536	9500 3536	16 9330 1356 9551	2 4175
80	48,6434 8964	899 1903 13 5906	148 1579	1,0857 3087	10857 3087	19 3505 1356 8598	2 4168
90	48,6421 3058	899 1475 15 1885	150 1578	1,2214 1685	12214 1685	21 7673 1356 7526	2 4162
100	48,6406 1173	899 0996 16 7861	150 1572	1,3570 9211	13570 9211	24 1855 1356 6335	2 4150
110	48,6389 3312	899 0468 18 3833	152 1567	1,4927 5546	14927 5546	26 5990 1356 5025	2 4147
120	48,6370 9479	898 9889 19 9800	154 1565	1,6284 0571	16284 0571	29 0137 1356 3597	2 4136
130	48,6350 9679	898 9259 21 5785	156 1563	1,7640 4168	17640 4168	31 4274 1356 2051	2 4126
140	48,6329 3914	898 8580 23 1725	158 1561	1,8996 6219	18996 6219	33 8400 1356 0384	2 4117
150	48,6306 2189	898 7851 24 7677	160 1546	2,0352 6603	20352 6603	36 2517 1355 8600	2 4106
160	48,6281 4512		15946	2,1708 5203			2 4102

X = 5380 km

Y <sub>km</sub>	φ°	Δφ° Δφ	Δφ° Δφ	λ°	Δλ° Δλ	Δλ° Δλ	Δλ° Δλ
0	48,5866 7030	899 3655 13971	142 1593	0,0000 0000	0	2 4077 118	0
10	48,5865 9059	899 3629 2 3914	141 1592	0,1354 8810	1354 8810	2 4077 1354 8632	2 4077
20	48,5863 5145	899 3554 3 9856	142 1592	0,2709 7502	2709 7502	4 8153 1354 8455	2 4075
30	48,5859 8289	899 3428 5 5798	142 1591	0,4064 5957	4064 5957	7 2228 1354 8100	2 4072
40	48,58573 9494	899 3253 7 1733	143 1590	0,5419 4057	5419 4057	9 6300 1354 7626	2 4069
50	48,58566 7752	899 3028 8 7675	144 1588	0,6774 1683	6774 1683	12 0369 1354 7034	2 4066
60	48,5858 0077	899 2751 10 3613	145 1585	0,8128 8717	8128 8717	14 4435 1354 6383	2 4061
70	48,5847 6464	899 2424 11 9548	144 1582	0,9483 5040	9483 5040	16 8496 1354 5496	2 4055
80	48,5835 6916	899 2048 13 5480	145 1578	1,0838 0536	10838 0536	19 2551 1354 4547	2 4051
90	48,5822 4436	899 1622 15 1408	147 1576	1,2192 5083	12192 5083	21 6602 1354 3485	2 4043
100	48,5807 0028	899 1145 16 7334	149 1573	1,3546 8566	13546 8566	24 0645 1354 2300	2 4035
110	48,5800 2694	899 0618 18 3257	150 1567	1,4901 0866	14901 0866	26 4680 1354 0998	2 4027
120	48,5801 9437	899 0042 18 9174	153 1566	1,6255 1864	16255 1864	28 8707 1353 9579	2 4018
130	48,5802 0263	898 9416 21 5088	157 1564	1,7609 1443	17609 1443	31 2725 1353 8042	2 4009
140	48,5803 5175	898 8739 23 0997	159 1561	1,8962 9485	18962 9485	33 6734 1353 6386	2 3999
150	48,5807 4478	898 8011 24 6902	160 1546	2,0316 5871	20316 5871	36 0732 1353 4614	2 3986
160	48,5882 7276		15900	2,1670 0485			2 3982

X = 5410 km

$\chi_{km}$	$\varphi^\circ$	$\frac{\Delta \chi}{\Delta \varphi}$ $\frac{\Delta \chi}{\Delta \varphi}$	$\lambda^\circ$	$\frac{\Delta \chi}{\Delta \lambda}$ $\frac{\Delta \chi}{\Delta \lambda}$ $\frac{\Delta \chi}{\Delta \lambda}$	$\lambda^\circ$	$\frac{\Delta \chi}{\Delta \lambda}$ $\frac{\Delta \chi}{\Delta \lambda}$ $\frac{\Delta \chi}{\Delta \lambda}$
0	48,8284 7571	899 3232 8 8477	0,0000 0000	140 25 1 6094	0,0000 0000	0 2 4437 120
10	48,8283 9524	899 3207 2 4141	0,1362 1939	141 76 1 6093	0,1362 1939	2 4437 121 2 4432
20	48,8281 5383	899 3131 4 0234	0,2724 2678	141 126 1 6092	0,2724 2678	4 8872 2 4435 362
30	48,8277 5149	899 3005 5 6326	0,4086 3715	143 179 1 6092	0,4086 3715	7 3307 2 4432 483
40	48,8271 8823	899 2826 7 2418	0,5448 4390	141 238 1 6090	0,5448 4390	9 7739 2 4429 603
50	48,8264 6405	899 2598 8 8508	0,6810 4582	142 279 1 6087	0,6810 4582	12 2168 2 4425 728
60	48,8255 7897	899 2319 10 4595	0,8172 4171	142 329 1 6085	0,8172 4171	14 6593 2 4422 841
70	48,8245 3302	899 1990 12 0680	0,9534 3034	145 391 1 6084	0,9534 3034	17 1015 2 4414 967
80	48,8233 2622	899 1609 13 6764	1,0896 1056	146 452 1 6079	1,0896 1056	19 5438 2 4398 1086
90	48,8219 5858	899 1179 15 2843	1,2257 8111	149 482 1 6076	1,2257 8111	21 9837 2 4377 1203
100	48,8204 3015	899 0697 16 8919	1,3619 4080	150 533 1 6074	1,3619 4080	24 4240 2 4394 1327
110	48,8187 4096	898 0164 18 4993	1,4980 8844	151 583 1 6069	1,4980 8844	28 8634 2 4395 1446
120	48,8168 9103	898 0581 20 1062	1,6342 2281	153 634 1 6063	1,6342 2281	33 3020 2 4377 1567
130	48,8148 8041	898 0949 21 7125	1,7703 4272	157 685 1 6050	1,7703 4272	37 7397 2 4361 1686
140	48,8127 0916	898 8264 23 3185	1,9064 4696	158 735 1 6055	1,9064 4696	42 1764 2 4355 1808
150	48,8103 7731	898 7528 24 9240	2,0425 3434	160 785 1 6000	2,0425 3434	46 6119 2 4345 1928
160	48,8078 8491		2,1786 0364			

X = 5400 km

$\chi_{km}$	$\varphi^\circ$	$\frac{\Delta \chi}{\Delta \varphi}$ $\frac{\Delta \chi}{\Delta \varphi}$	$\lambda^\circ$	$\frac{\Delta \chi}{\Delta \lambda}$ $\frac{\Delta \chi}{\Delta \lambda}$ $\frac{\Delta \chi}{\Delta \lambda}$	$\lambda^\circ$	$\frac{\Delta \chi}{\Delta \lambda}$ $\frac{\Delta \chi}{\Delta \lambda}$ $\frac{\Delta \chi}{\Delta \lambda}$
0	48,7385 4198	899 3373 8 8022	0,0000 0000	141 25 1 6045	0,0000 0000	0 2 4326 120
10	48,7384 6176	899 3348 2 4065	0,1359 7083	141 76 1 6043	0,1359 7083	2 4316 2 4316 239
20	48,7382 2111	899 3272 4 0108	0,2719 4046	141 126 1 6041	0,2719 4046	4 8632 2 4313 361
30	48,7378 2003	899 3146 5 6149	0,4079 0770	141 179 1 6041	0,4079 0770	7 2945 2 4312 479
40	48,7372 5854	899 2969 7 2190	0,5438 7133	143 228 1 6040	0,5438 7133	9 7257 2 4308 600
50	48,7365 3664	899 2741 8 8230	0,6798 3017	143 278 1 6036	0,6798 3017	12 1565 2 4305 719
60	48,7356 5434	899 2463 10 4266	0,8157 8301	144 329 1 6035	0,8157 8301	14 5870 2 4298 839
70	48,7346 1168	899 2134 12 0301	0,9517 2866	144 380 1 6033	0,9517 2866	17 0168 2 4296 960
80	48,7334 0867	899 1755 13 6334	1,0876 6592	146 430 1 6030	1,0876 6592	19 4464 2 4292 1079
90	48,7320 4533	899 1325 15 2364	1,2235 9358	146 479 1 6025	1,2235 9358	21 8753 2 4281 1198
100	48,7305 2169	898 0846 16 8389	1,3595 1046	150 530 1 6023	1,3595 1046	24 3034 2 4274 1318
110	48,7288 3780	898 0316 18 4412	1,4954 1536	151 581 1 6018	1,4954 1536	26 7308 2 4265 1438
120	48,7269 9368	898 9735 20 0430	1,6313 0708	154 632 1 6014	1,6313 0708	29 1573 2 4257 1557
130	48,7249 8938	898 9103 21 6444	1,7671 8442	154 681 1 6010	1,7671 8442	31 5830 2 4247 1676
140	48,7228 2494	898 8424 23 2454	1,9030 4619	158 731 1 6003	1,9030 4619	34 0077 2 4237 1795
150	48,7205 0040	898 7691 24 8457	2,0388 9120	162 781 1 5997	2,0388 9120	36 4314 2 4222 1916
160	48,7180 1583		2,1747 1826			

X = 5430 km

Y/km	φ°	Δφ <sub>x</sub> Δφ <sub>y</sub>	Δφ <sub>x</sub> Δφ <sub>y</sub>	λ°	Δλ <sub>x</sub> Δλ <sub>y</sub>	Δλ <sub>x</sub> Δλ <sub>y</sub>
0	49,0083 3895	899 2952 8098	141 26 1 6195	0,0000 0000	0 1567 0394	2 4680 122
10	49,0082 5797	899 2926 2 4293	140 77 1 6195	0,1367 0394	2 4680 1367 0272	2 4680 245
20	49,0080 1504	899 2849 4 0488	140 128 1 6194	0,2734 0666	4 9360 1367 0027	246 2 4678 367
30	49,0076 1016	899 2721 5 6682	140 173 1 6193	0,4101 0693	7 4098 1366 9860	269 2 468 488
40	49,0070 4334	899 2542 7 2875	141 230 1 6191	0,5468 0353	9 8714 1366 9172	2 4672 612
50	49,0065 1459	899 2312 8 9066	142 281 1 6190	0,6834 9525	12 3386 1366 8560	616 2 4670 732
60	49,0054 2393	899 2031 10 5256	143 339 1 6187	0,8201 8085	14 8056 1366 7928	727 2 4663 857
70	49,0043 7137	899 1700 12 1443	146 393 1 6184	0,9568 5913	17 2719 1366 6971	861 2 4659 976
80	49,0031 5694	899 1317 13 7627	147 435 1 6181	1,0935 2884	19 7378 1366 5995	983 2 4651 1101
90	49,0017 8087	899 0882 15 3808	146 491 1 6178	1,2301 8879	22 2093 1366 4994	1108 2 4646 1220
100	49,0002 4259	899 0397 16 9986	149 536 1 6175	1,3668 3773	24 6875 1366 3674	1229 2 4637 1344
110	48,9985 4273	898 9861 18 6161	151 586 1 6169	1,5034 7447	27 1312 1366 2330	1352 2 4629 1465
120	48,9966 8112	898 9275 20 2350	154 622 1 6168	1,6400 9777	28 5941 1366 0865	1474 2 4619 1587
130	48,9946 5782	898 8636 21 8496	155 669 1 6161	1,7767 0642	32 0560 1365 9278	1598 2 4610 1708
140	48,9924 7286	898 7947 23 4657	158 740 1 6156	1,9132 9920	34 5170 1365 7570	1719 2 4598 1830
150	48,9901 2629	898 7207 25 0815	160 771 1 6151	2,0498 7490	36 9768 1365 5740	1841 2 4586 1953
160	48,9876 1816			2,1864 3230		

X = 5420 km

Y/km	φ°	Δφ <sub>x</sub> Δφ <sub>y</sub>	Δφ <sub>x</sub> Δφ <sub>y</sub>	λ°	Δλ <sub>x</sub> Δλ <sub>y</sub>	Δλ <sub>x</sub> Δλ <sub>y</sub>
0	48,9184 0803	899 3092 8072	140 26 1 6145	0,0000 0000	0 1364 5836	2 4558 122
10	48,9183 2731	899 3066 2 4217	140 76 1 6143	0,1364 5836	2 4558 1364 5714	132 2 4556 242
20	48,9180 8514	899 2990 4 0360	141 128 1 6143	0,2729 1550	4 9116 1364 5412	244 2 4552 365
30	48,9176 8154	899 2862 5 6505	141 177 1 6141	0,4093 7022	7 3671 1364 5107	267 2 4553 486
40	48,9171 1649	899 2685 7 2646	143 229 1 6141	0,5458 2129	9 8224 1364 4621	490 2 4551 607
50	48,9163 9003	899 2456 8 8787	144 287 1 6137	0,6822 6750	12 2775 1364 4014	611 2 4516 729
60	48,9155 0216	899 2177 10 4924	146 332 1 6137	0,8187 0764	14 7321 1364 3285	735 2 4543 849
70	48,9144 5292	899 1845 12 1061	145 382 1 6133	0,9551 4049	17 1864 1364 2436	855 2 4535 973
80	48,9132 4231	899 1463 13 7194	146 431 1 6131	1,0915 6485	19 6389 1364 1463	978 2 4532 1091
90	48,9118 7037	899 1030 15 3325	148 489 1 6127	1,2279 7948	22 0931 1364 0372	1098 2 4522 1214
100	48,9103 3712	899 0547 16 9452	150 534 1 6124	1,3643 8320	24 5453 1363 9158	1222 2 4516 1335
110	48,9086 4260	899 0012 18 5576	152 582 1 6118	1,5007 7478	26 9969 1363 7823	1343 2 4507 1455
120	48,9067 8684	898 9428 20 1694	153 636 1 6116	1,6371 5301	29 4476 1363 6368	1465 2 4497 1577
130	48,9047 6990	898 8792 21 7810	156 686 1 6110	1,7735 1669	31 8973 1363 4791	1587 2 4487 1698
140	48,9025 9180	898 8106 23 3920	159 737 1 6105	1,9098 6460	34 3460 1363 3093	1710 2 4477 1818
150	48,9002 5260	898 7369 25 0025	162 788 1 6100	2,0461 9553	36 7937 1363 1275	1831 2 4465 1939
160	48,8977 5235			2,1825 0828		

X = 5450 km

$Y_{km}$	$\varphi^\circ$	$\frac{\Delta \lambda_x}{\Delta \lambda_y}$	$\frac{\Delta \lambda_x}{\Delta \lambda_y}$	$\lambda^\circ$	$\frac{\Delta \lambda_x}{\Delta \lambda_y}$	$\frac{\Delta \lambda_x}{\Delta \lambda_y}$	$\frac{\Delta \lambda_x}{\Delta \lambda_y}$
0	49,1881 9658	899 5671 5 949	141 26 1 6298	0,0000 0000	1371 9878	2 4927 124	0
10	49,1881 1509	899 2645 2 4447	141 78 1 6297	0,1371 9878	2 4927 1371 9754	2 4927 2 4927 248	0
20	49,1878 7062	899 2567 4 0744	139 128 1 6297	0,2743 9632	4 9854 1371 9506	2 4925 2 4925 371	0
30	49,1874 6318	899 2439 3 7041	141 180 1 6295	0,4115 9138	7 4779 1371 9135	2 4922 2 4922 495	0
40	49,1868 9277	899 2229 7 3336	141 232 1 6293	0,5487 8273	9 9701 1371 8640	2 4919 2 4919 619	0
50	49,1861 5941	899 2027 8 9629	141 283 1 6292	0,6859 6913	12 4620 1371 8021	2 4916 2 4916 743	0
60	49,1852 6312	899 1744 10 5921	143 334 1 6289	0,8231 4934	14 9536 1371 7278	2 4910 2 4910 867	0
70	49,1842 0391	899 1410 12 2210	145 385 1 6286	0,9603 2212	17 4446 1371 6411	2 4903 2 4903 989	0
80	49,1829 8181	899 1025 13 8496	148 439 1 6285	1,0974 8623	19 9352 1371 5422	2 4897 2 4897 1115	0
90	49,1815 9685	899 0596 15 4781	146 487 1 6279	1,2346 4045	22 4249 1371 4307	2 4893 2 4893 1236	0
100	49,1800 4904	899 0099 17 1060	151 541 1 6276	1,3717 8352	24 9142 1371 3071	2 4884 2 4884 1361	0
110	49,1783 3844	898 9558 18 7336	152 592 1 6273	1,5089 1423	27 4025 1371 1710	2 4875 2 4875 1485	0
120	49,1764 6508	898 8966 20 3609	153 643 1 6268	1,6460 3133	29 8900 1371 0227	2 4864 2 4864 1608	0
130	49,1744 2899	898 8324 21 9877	156 694 1 6262	1,7831 3360	32 3754 1370 8619	2 4856 2 4856 1731	0
140	49,1722 3022	898 7630 23 6139	158 745 1 6258	1,9202 1979	34 8619 1370 6888	2 4844 2 4844 1855	0
150	49,1698 6883	898 6895 25 2397	161 797 1 6253	2,0572 8867	37 3463 1370 5035	2 4832 2 4832 1976	0
160	49,1673 4486			2,1943 3902			

X 5440 km

$Y_{km}$	$\varphi^\circ$	$\frac{\Delta \lambda_x}{\Delta \lambda_y}$	$\frac{\Delta \lambda_x}{\Delta \lambda_y}$	$\lambda^\circ$	$\frac{\Delta \lambda_x}{\Delta \lambda_y}$	$\frac{\Delta \lambda_x}{\Delta \lambda_y}$	$\frac{\Delta \lambda_x}{\Delta \lambda_y}$
0	49,0982 6847	899 2811 25 8124	140 25 1 6246	0,0000 0000	1369 5074	2 4804 123	0
10	49,0981 8723	899 2786 2 4370	141 77 1 6246	0,1369 5074	2 4804 1369 4952	2 4802 2 4802 247	0
20	49,0979 4353	899 2709 4 0616	142 128 1 6245	0,2739 0026	4 9605 1369 4705	2 4801 2 4801 369	0
30	49,0975 3727	899 2581 5 6861	142 180 1 6244	0,4108 4731	7 4407 1369 4356	2 4799 2 4799 492	0
40	49,0969 6876	899 2401 7 3105	142 231 1 6242	0,5477 9067	9 9206 1369 3844	2 4796 2 4796 614	0
50	49,0962 3771	899 2170 8 9347	143 283 1 6240	0,6847 2911	12 4002 1369 3230	2 4791 2 4791 739	0
60	49,0953 4424	899 1888 10 5587	144 334 1 6239	0,8216 6141	14 8793 1369 2491	2 4787 2 4787 861	0
70	49,0942 8837	899 1554 12 1826	144 384 1 6236	0,9585 8632	17 3580 1369 1630	2 4781 2 4781 984	0
80	49,0930 7011	899 1170 13 8062	145 434 1 6231	1,0955 0262	19 8361 1369 0646	2 4776 2 4776 1106	0
90	49,0916 8949	899 0736 15 4293	150 488 1 6229	1,2324 0908	22 3137 1368 9540	2 4769 2 4769 1229	0
100	49,0901 4656	899 0248 17 0522	149 538 1 6225	1,3693 0448	24 7904 1368 8311	2 4760 2 4760 1352	0
110	49,0884 4134	898 9710 18 6747	152 588 1 6222	1,5061 8759	27 2664 1368 6959	2 4751 2 4751 1475	0
120	49,0865 7387	898 9121 20 2969	155 638 1 6216	1,6430 5718	29 7415 1368 5484	2 4743 2 4743 1596	0
130	49,0845 4418	898 8481 21 9185	157 692 1 6212	1,7799 1202	32 2158 1368 3888	2 4731 2 4731 1720	0
140	49,0823 5233	898 7789 23 5397	159 742 1 6207	1,9167 5090	34 6889 1368 2168	2 4720 2 4720 1842	0
150	49,0799 9836	898 7047 25 1604	162 793 1 6202	2,0535 7258	37 1609 1368 0326	2 4709 2 4709 1965	0
160	49,0774 8232			2,1903 7584			

X = 5470 km

Y <sub>km</sub>	φ°	Δφ <sub>x</sub> Δφ <sub>y</sub>	Δφ <sub>x</sub> Δφ <sub>y</sub> Δφ <sub>z</sub>	λ°	Δλ <sub>x</sub> Δλ <sub>y</sub>	Δλ <sub>x</sub> Δλ <sub>y</sub> Δλ <sub>z</sub>
0	49,3680 4859	899 2390 8201	140 26 1 6400	0,0000 0000	1376 9857	0 2 3177 125
10	49,3679 6658	899 2364 2 4601	140 78 1 6401	0,1376 9857	2 5177 1376 9732	127 2 5176 251
20	49,3677 2057	899 2286 4 1002	140 339 1 6399	0,2753 9569	5 0353 1376 9461	254 2 5177 377
30	49,3673 1055	899 2157 5 7401	141 482 1 6399	0,4130 9070	7 5528 1376 9104	380 2 5173 501
40	49,3667 3654	899 1875 7 3800	141 233 1 6397	0,5507 8174	10 0701 1376 8603	506 2 5169 627
50	49,3659 9854	899 1742 9 0197	142 534 1 6394	0,6884 6777	12 5870 1376 7978	532 2 5165 753
60	49,3650 9657	899 1458 10 6591	145 337 1 6392	0,8261 4753	15 1035 1376 7223	758 2 5162 877
70	49,3640 3066	899 1121 12 2983	146 388 1 6389	0,9638 1976	17 6196 1376 6346	883 2 5155 1003
80	49,3628 0083	899 0732 13 9372	146 437 1 6388	1,1014 8322	20 1351 1376 5343	1008 2 5148 1128
90	49,3614 0711	899 0290 15 5760	146 491 1 6383	1,2391 3665	22 6499 1376 4215	1135 2 5140 1253
100	49,3598 4951	898 9799 17 2143	150 543 1 6378	1,3767 7880	25 1639 1376 2962	1262 2 5133 1379
110	49,3581 2808	898 8256 18 8521	152 595 1 6375	1,5144 0842	27 6772 1376 1583	1387 2 5124 1502
120	49,3562 4287	898 8660 20 4896	154 647 1 6371	1,6520 2425	30 1896 1376 0081	1513 2 5114 1625
130	49,3541 9391	898 8073 22 1267	157 700 1 6365	1,7896 2506	32 7010 1375 8452	1639 2 5104 1752
140	49,3519 8124	898 7243 23 7632	158 752 1 6360	1,9272 0958	35 2114 1375 6700	1764 2 5092 1878
150	49,3496 0492	898 6562 25 3992	160 802 1 6355	2,0647 7658	37 7206 1375 4822	1889 2 5083 2003
160	49,3470 6500			2,2023 2480		

X = 5460 km

Y <sub>km</sub>	φ°	Δφ <sub>x</sub> Δφ <sub>y</sub>	Δφ <sub>x</sub> Δφ <sub>y</sub> Δφ <sub>z</sub>	λ°	Δλ <sub>x</sub> Δλ <sub>y</sub>	Δλ <sub>x</sub> Δλ <sub>y</sub> Δλ <sub>z</sub>
0	49,2781 2329	899 2530 8175	140 26 1 6350	0,0000 0000	1374 4805	0 2 5052 124
10	49,2780 4154	899 2504 2 4525	140 76 1 6347	0,1374 4805	2 5052 1374 4681	125 2 5051 250
20	49,2777 9629	899 2428 4 0872	142 310 1 6343	0,2748 9486	5 0103 1374 4431	250 2 5047 374
30	49,2773 8757	899 2298 5 7221	141 460 1 6347	0,4123 3917	7 5153 1374 4057	375 2 5047 498
40	49,2768 1536	899 2118 7 3568	143 232 1 6344	0,5497 7974	10 0200 1374 3559	501 2 5044 622
50	49,2760 7968	899 1886 8 9912	144 282 1 6343	0,6872 1533	12 5244 1374 2957	626 2 5042 743
60	49,2751 8056	899 1601 10 6255	143 336 1 6340	0,8246 4470	15 0283 1374 2188	752 2 5035 871
70	49,2741 1801	899 1265 12 2595	144 388 1 6340	0,9620 6658	17 5318 1374 1317	878 2 5029 1098
80	49,2728 9206	899 0877 13 8935	145 437 1 6333	1,0994 7975	20 0347 1374 0319	1004 2 5024 1119
90	49,2715 0271	899 0440 15 5268	150 492 1 6333	1,2368 8294	22 5371 1373 9200	1128 2 5015 1246
100	49,2699 5003	898 9948 17 1601	149 542 1 6327	1,3742 7494	25 0386 1373 7954	1253 2 5008 1369
110	49,2682 3402	898 8406 18 7928	150 593 1 6323	1,5116 5448	27 5304 1373 6585	1378 2 4998 1494
120	49,2663 5474	898 8813 20 4251	153 645 1 6320	1,6490 2033	30 0392 1373 5091	1504 2 4990 1617
130	49,2643 1223	898 8168 22 0571	155 696 1 6313	1,7863 7124	32 5382 1373 3474	1628 2 4978 1742
140	49,2621 0652	898 7472 23 6884	158 748 1 6310	1,9237 0598	35 0360 1373 1732	1754 2 4968 1865
150	49,2597 3768	898 6724 25 3194	162 798 1 6305	2,0610 2330	37 5328 1372 9867	1878 2 4952 1992
160	49,2572 0574			2,1983 2197		



- c. Interpolationstafeln zur Berechnung der Gauß-Krügerschen Koordinaten in einem Meridianstreifen aus den Koordinaten im benachbarten Streifen ( $x = 5\ 080\text{ km}$  bis  $x = 5\ 480\text{ km}$ ,  $3^\circ$ -Streifen, Besselsches Ellipsoid).

Anordnung der Zahlenwerte.

In den Tafeln sind für runde, mit Intervallen von 10 Kilometern fortschreitende Werte der Gauß-Krügerschen Koordinaten  $x, y$  eines Meridianstreifens die Koordinaten  $x', y'$  im benachbarten Meridianstreifen angegeben. Neben den Koordinatenwerten  $y'$  sind die ersten und zweiten Differenzen, genommen in den  $x$ - und  $y$ -Richtungen, eingetragen. Die Eingangswerte  $x, y$  der Tafeln sind so gewählt, daß längs des Grenzmeridians zweier Meridianstreifen ein Gebiet von einem Grad Längenausdehnung überdeckt wird.

Berechnung der Gauß-Krügerschen Koordinaten  $x', y'$  in einem Meridianstreifen  $n + 1$  aus den gegebenen Gauß-Krügerschen Koordinaten  $x, y$  in einem Meridianstreifen  $n$ .

In den Tafeln sind die Absolutwerte der Ordinaten  $y'$  und ebenso als Eingangswerte die Absolutwerte der Ordinaten  $y$  angegeben. Innerhalb der Interpolationsrechnung wird das Vorzeichen der Ordinate nicht berücksichtigt; ist  $y$  positiv, so ist am Schluß der Rechnung das berechnete  $y'$  negativ zu nehmen und umgekehrt.

Um die einem Wertepaar  $x, y$  zugeordneten Koordinaten  $x', y'$  im benachbarten Meridianstreifen zu ermitteln, muß zwischen den Tafelwerten interpoliert werden. Dies geschieht mit der Newtonschen Interpolationsformel für eine Funktion von zwei Unbekannten, die für den vorliegenden Fall in der Form

$$x' = x'_0 + \Delta x'_x n_x + \Delta x'_y n_y + \Delta x'_{xx} \left(\frac{n_x}{2}\right) + \Delta x'_{xy} n_x n_y + \Delta x'_{yy} \left(\frac{n_y}{2}\right)$$

$$y' = y'_0 + \Delta y'_x n_x + \Delta y'_y n_y + \Delta y'_{xx} \left(\frac{n_x}{2}\right) + \Delta y'_{xy} n_x n_y + \Delta y'_{yy} \left(\frac{n_y}{2}\right)$$

mit den Gliedern einschließlich der Ordnungszahl zwei angeschrieben werden kann. Hierin bedeutet  $x_0, y_0$  die gegenüber den gegebenen Koordinaten  $x, y$  nächst niedrigeren Eingangswerte in die Tafel  $x'_0, y'_0$  die den Werten  $x_0, y_0$  zugeordneten Tafelwerte  $\Delta x'_x, \Delta x'_y$  u. s. w. die ersten und zweiten Differenzen zwischen den Tafelwerten, genommen in der  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung

$n_x, n_y$  die Differenzen  $x - x_0, y - y_0$  in Einheiten des Tafelintervalls, d. h. in Einheiten von 10 km.  $n_x, n_y$  muß stets kleiner als die Einheit sein.

Für die ganze Tafel kann gesetzt werden

$$\Delta x'_{xx} = -\Delta x'_{yy} = -\Delta y'_{yy}$$

$$\Delta x'_{xy} = \Delta y'_{xx} = -\Delta y'_{yy}$$

Setzt man die Absolutwerte dieser Differenzen zwei Größen  $a$  und  $b$  gleich, so folgt mit Berücksichtigung aller Vorzeichen das Formelpaar

$$x' = x'_0 + \Delta x'_x n_x - \Delta x'_y n_y + b \left(\frac{n_x}{2}\right) - a n_x n_y - b \left(\frac{n_y}{2}\right)$$

$$y' = y'_0 - \Delta y'_x n_x - \Delta y'_y n_y + a \left(\frac{n_x}{2}\right) + b n_x n_y - a \left(\frac{n_y}{2}\right)$$

oder

$$x' = x'_0 + \Delta x'_x n_x - \Delta x'_y n_y + b \left(\frac{n_x}{2}\right) - \left(\frac{n_y}{2}\right) - a n_x n_y$$

$$y' = y'_0 - \Delta y'_x n_x - \Delta y'_y n_y + a \left(\frac{n_x}{2}\right) - \left(\frac{n_y}{2}\right) + b n_x n_y$$

In diese Formeln sind alle Größen als Absolutwerte einzuführen.

Beispiel.

Wir benutzen das ursprüngliche Beispiel; aus den gegebenen Koordinaten eines Punktes P

$$x_P = 5\ 243\ 506,392 \quad y_P = +102\ 806,961$$

im Meridianstreifen  $\lambda_m = 15^\circ$  sind die Gauß-Krügerschen Koordinaten  $x'_p, y'_p$  desselben Punktes im Meridianstreifen  $\lambda_m = 18^\circ$  zu berechnen.

Die nächst niedrigeren Eingangswerte in die Tafel sind für die obigen Koordinatenwerte

$$x_0 = 5\ 240\text{ km}, \quad y_0 = 100\text{ km}$$

Es ist daher

$$n_x = 0,350\ 6392 \quad n_y = 0,280\ 6961$$

und

$$\left| \left(\frac{n_x}{2}\right) \right| = 0,113\ 85 \quad \left| \left(\frac{n_y}{2}\right) \right| = 0,100\ 95 \quad \left| \left(\frac{n_x}{2}\right) \right| - \left| \left(\frac{n_y}{2}\right) \right| = +0,012\ 95 \quad n_x n_y = 0,098\ 42$$

Mit den für die Eingangswerte  $x_0 = 5\ 240\text{ km}$ ,  $y_0 = 100\text{ km}$  und den obigen Werten ergibt sich

$x'_0$	5 240 517,477	$y'_0$	126 893,185
$\Delta x'_n$	+ 3 504,053 2	$\Delta y'_n$	- 134,997 5
$\Delta x'_n$	- 107,986 3	$\Delta y'_n$	- 2 805,015 2
$b[(\frac{n_x}{2}) - (\frac{n_y}{2})]$	+ 0,000 4	$a[(\frac{n_x}{2}) - (\frac{n_y}{2})]$	+ 007 2
$a n_x n_y$	- 0,054 7	$b n_x n_y$	+ 003 2
$x'_p$	= 5 243 913,489 6	$y'_p$	= 123 953,182 7

Die Abrundung auf den Millimeter ergibt - wir setzen der Ordinate das entgegengesetzte Vorzeichen der gegebenen Ordinate vor - die gesuchten Koordinaten des Punktes P im Meridianstreifen mit dem Mittelmeridian  $\lambda_m = 18^\circ$ , nämlich

$$x'_p = 5\ 243\ 913,490 \qquad y'_p = -123\ 953,183$$

Aus der Umrechnung der geographischen Koordinaten in Gauß-Krügersche des Punktes P ( $\varphi_P = 47^\circ 19' 22'', 376$   $\lambda_P = 16^\circ 21' 36'', 421$ ) hatten wir gefunden für den Meridianstreifen  $\lambda_m = 15^\circ$

$$x_p = 5\ 243\ 506,392 \qquad y_p = +102\ 806,961$$

Dies waren auch die Ausgangswerte unseres Beispiels; im Meridianstreifen  $\lambda_m = 18^\circ$  fanden wir aus den geographischen Koordinaten

$$x_p = 5\ 243\ 913,490 \qquad y_p = -123\ 953,181$$

Die Übereinstimmung dieser Werte mit den gerade berechneten Werten ist befriedigend, da die zu erwartende Unsicherheit in einer Interpolation etwa in der Größenordnung des Millimeters angenommen werden muß.

Wir führen noch die umgekehrte Transformation aus, d.h. wir berechnen aus  $x'_p, y'_p$  wieder  $x_p, y_p$ . Es ist dann

$$x_0 = 5\ 240\ \text{km} \qquad y_0 = 120\ \text{km}$$

und weiter

$$n_x = 0,391\ 3490 \qquad n_y = 0,395\ 3183$$

$$k(\frac{n_x}{2}) = 0,119\ 10 \quad k(\frac{n_y}{2}) = 0,119\ 52 \quad \left[ \left( \frac{n_x}{2} \right) - \left( \frac{n_y}{2} \right) \right] = -0,000\ 42 \quad n_x n_y = 0,154\ 707$$

$x'_0$	5 239 748,091	$y'_0$	106 907,605
$\Delta x'_n$	+ 3 910,444 5	$\Delta y'_n$	- 150,645 5
$\Delta x'_n$	- 152,057 2	$\Delta y'_n$	- 3 950,003 1
$b[(\frac{n_x}{2}) - (\frac{n_y}{2})]$	- 0,000 0	$a[(\frac{n_x}{2}) - (\frac{n_y}{2})]$	- 0,000 2
$a n_x n_y$	- 0,086 0	$b n_x n_y$	+ 0,004 8
$x'_p$	= 5 243 506,392 3	$y'_p$	= +102 806,961 0

Das Ergebnis stimmt mit den Ausgangswerten vollkommen überein.

Um die Benützung der Tafeln auch für die Transformation Gauß-Krügerscher Koordinaten zwischen zwei benachbarten Meridianstreifen am Internationalen Ellipsoid zu ermöglichen, geben wir Übergangsformeln an.

Man berechnet, wenn es sich um Gauß-Krügersche Koordinaten am Internationalen Ellipsoid handelt, aus den gegebenen Koordinaten  $x, y$  mit Hilfe der vorliegenden Tafeln die Koordinaten  $x', y'$  im benachbarten Streifen. An den gefundenen Werten  $x', y'$  sind lediglich Zuschläge  $\Delta x$  und  $\Delta y$  nach den folgenden Formeln anzubringen:

$$\Delta x = 0,9707 + 0,029\ 68 \Delta x + 0,351\ 80 \Delta y + 0,000\ 13 \Delta x^2 + 0,002\ 02 \Delta x \Delta y - 0,000\ 03 \Delta y^2$$

$$\Delta y = 62,583\ 5 + 0,352\ 57 \Delta x - 0,029\ 66 \Delta y + 0,000\ 70 \Delta x^2 - 0,000\ 14 \Delta x \Delta y - 0,001\ 11 \Delta y^2$$

Die Zuschläge ergeben sich in Metern; in die Formeln ist

$$\Delta x = x - 5\ 200\ 000, \qquad \Delta y = |y| - 50\ 000$$

in Einheiten von 100 Kilometern ( $10^5$  m) einzuführen. Die Differenzen  $\Delta x, \Delta y$  sind mit den Eingangswerten, also mit den gegebenen Koordinaten  $x, |y|$  zu bilden.



X = 5100 km

X <sub>km</sub>	X' <sub>m</sub>	$\frac{\Delta X'}{\Delta X''}$	Y' <sub>m</sub>	$\frac{\Delta Y'}{\Delta Y''}$	a
60	5 102 114,981	9 996,078 9 995,966	172 204,204	9 996,078 9 995,966	571 37
70	5 101 738,015	9 995,508 9 995,399	162 208,393	9 995,508 9 995,399	569 36
80	5 101 361,086	9 994,959 9 994,854	152 213,151	9 994,959 9 994,854	569 35
90	5 100 984,192	9 994,370 9 994,265	142 218,479	9 994,370 9 994,265	569 34
100	5 100 607,333	9 993,801 9 993,695	132 224,377	9 993,801 9 993,695	569 33
110	5 100 230,508	9 993,231 9 992,126	122 230,845	9 993,231 9 992,126	569 32
120	5 099 853,716	9 992,662 9 992,557	112 237,882	9 992,662 9 992,557	569 32
130	5 099 476,955	9 992,093 9 991,988	102 245,489	9 992,093 9 991,988	569 31
140	5 099 100,226	9 991,523 9 991,418	92 253,666	9 991,523 9 991,418	569 30
150	5 098 723,226	9 990,954 9 990,849	82 262,413	9 990,954 9 990,849	569 29
160	5 098 346,856	9 990,384 9 990,279	72 271,729	9 990,384 9 990,279	569 28
170	5 097 970,213		62 281,616		

X = 5080 km

X <sub>km</sub>	X' <sub>m</sub>	$\frac{\Delta X'}{\Delta X''}$	Y' <sub>m</sub>	$\frac{\Delta Y'}{\Delta Y''}$	a
60	5 082 122,713	9 996,153 9 995,886	172 957,033	9 996,153 9 995,886	571 37
70	5 081 746,889	9 995,584 9 995,314	162 961,147	9 995,584 9 995,314	571 36
80	5 081 371,101	9 995,010 9 994,742	152 965,853	9 995,010 9 994,742	571 35
90	5 080 995,349	9 994,438 9 994,171	142 971,091	9 994,438 9 994,171	571 35
100	5 080 619,631	9 993,868 9 993,604	132 976,920	9 993,868 9 993,604	571 33
110	5 080 243,947	9 993,297 9 993,037	122 983,321	9 993,297 9 993,037	571 32
120	5 079 868,296	9 992,726 9 992,466	112 990,294	9 992,726 9 992,466	571 33
130	5 079 492,677	9 992,155 9 991,894	102 997,838	9 992,155 9 991,894	571 31
140	5 079 117,089	9 991,584 9 991,323	93 005,954	9 991,584 9 991,323	571 30
150	5 078 741,532	9 991,011 9 990,750	83 014,641	9 991,011 9 990,750	571 28
160	5 078 366,003	9 990,440 9 990,179	73 023,901	9 990,440 9 990,179	571 28
170	5 077 990,502		63 033,732		

X = 5100 km

X <sub>km</sub>	X' <sub>m</sub>	$\frac{\Delta X'}{\Delta X''}$	Y' <sub>m</sub>	$\frac{\Delta Y'}{\Delta Y''}$	a
60	5 112 111,059	9 996,039 9 995,774	171 826,935	9 996,039 9 995,774	568 37
70	5 111 733,523	9 995,472 9 995,206	161 831,161	9 995,472 9 995,206	568 36
80	5 111 356,025	9 994,903 9 994,637	151 835,955	9 994,903 9 994,637	568 36
90	5 110 978,562	9 994,332 9 994,066	141 841,318	9 994,332 9 994,066	568 34
100	5 110 601,134	9 993,766 9 993,500	131 847,250	9 993,766 9 993,500	568 33
110	5 110 223,759	9 993,199 9 992,933	121 853,751	9 993,199 9 992,933	568 32
120	5 109 846,378	9 992,630 9 992,364	111 860,821	9 992,630 9 992,364	568 32
130	5 109 468,048	9 992,061 9 991,795	101 868,459	9 992,061 9 991,795	568 30
140	5 109 091,749	9 991,493 9 991,227	91 876,667	9 991,493 9 991,227	568 30
150	5 108 714,480	9 990,925 9 990,659	81 885,443	9 990,925 9 990,659	568 29
160	5 108 337,240	9 990,356 9 990,090	71 894,788	9 990,356 9 990,090	568 28
170	5 107 960,028		61 904,703		

X = 5090 km

X <sub>km</sub>	X' <sub>m</sub>	$\frac{\Delta X'}{\Delta X''}$	Y' <sub>m</sub>	$\frac{\Delta Y'}{\Delta Y''}$	a
60	5 092 118,866	9 996,145 9 995,880	172 580,904	9 996,145 9 995,880	570 37
70	5 091 742,470	9 995,545 9 995,278	162 585,055	9 995,545 9 995,278	570 36
80	5 091 366,111	9 994,975 9 994,707	152 589,777	9 994,975 9 994,707	570 35
90	5 090 989,788	9 994,404 9 994,136	142 595,070	9 994,404 9 994,136	570 34
100	5 090 613,499	9 993,834 9 993,566	132 600,934	9 993,834 9 993,566	570 33
110	5 090 237,244	9 993,264 9 992,996	122 607,366	9 993,264 9 992,996	570 32
120	5 089 861,022	9 992,694 9 992,426	112 614,373	9 992,694 9 992,426	570 31
130	5 089 484,832	9 992,123 9 991,854	102 621,949	9 992,123 9 991,854	570 30
140	5 089 108,673	9 991,553 9 991,285	92 630,095	9 991,553 9 991,285	570 30
150	5 088 732,543	9 990,983 9 990,714	82 638,813	9 990,983 9 990,714	570 28
160	5 088 356,443	9 990,413 9 990,144	72 648,101	9 990,413 9 990,144	570 28
170	5 087 980,371		62 657,960		

X = 5120 km

$X_{km}$	$X'_{m}$	$\frac{\Delta X'_{x'}}{\Delta X'_{y'}}$	$Y'_{m}$	$\frac{\Delta Y'_{x'}}{\Delta Y'_{y'}}$	a	b
60	5 122 107,089	9 986,093 376,103	171 449,087	378,406 9 995,151	567 31	567
70	5 121 728,995	9 995,435 376,067	161 453,360	378,369 9 995,170	567 36	567
80	5 121 350,928	9 994,868 376,031	151 458,190	378,332 9 994,661	567 35	567
90	5 120 972,897	9 994,300 375,997	141 463,589	378,298 9 994,034	567 35	567
100	5 120 594,900	9 993,733 375,962	131 469,555	378,263 9 993,466	567 33	567
110	5 120 216 938	9 993,165 375,927	121 476,089	378,230 9 992,898	567 32	567
120	5 119 839,008	9 992,598 375,892	111 483,191	378,198 9 992,330	567 32	567
130	5 119 461,109	9 992,031 375,857	101 490,861	378,167 9 991,762	567 31	567
140	5 119 083,242	9 991,465 375,821	91 499,099	378,136 9 991,194	567 29	567
150	5 118 705,405	9 990,899 375,785	81 507,805	378,107 9 990,627	567 29	567
160	5 118 327,596	9 990,328 375,749	71 517,278	378,078 9 990,058	567 28	567
170	5 117 949,816		61 527,220			

X = 5140 km

$X_{km}$	$X'_{m}$	$\frac{\Delta X'_{x'}}{\Delta X'_{y'}}$	$Y'_{m}$	$\frac{\Delta Y'_{x'}}{\Delta Y'_{y'}}$	a	b
60	5 142 099,066	9 995,928 375,237	170 691,719	379,339 9 995,653	566 37	566
70	5 141 719,829	9 995,362 375,201	160 696,056	379,302 9 995,088	566 36	566
80	5 141 340,628	9 994,797 375,165	150 700,958	379,265 9 994,531	566 35	566
90	5 140 961,463	9 994,231 375,130	140 706,427	379,230 9 994,066	566 34	566
100	5 140 582,333	9 993,665 375,097	130 712,461	379,196 9 993,599	566 33	566
110	5 140 203,236	9 993,100 375,064	120 719,082	379,162 9 993,132	566 32	566
120	5 139 824,172	9 992,532 375,032	110 726,228	379,129 9 992,667	566 31	566
130	5 139 445,140	9 991,969 375,002	100 733,961	379,100 9 992,201	565 30	565
140	5 139 066,138	9 991,404 374,972	90 742,260	379,070 9 991,736	565 30	565
150	5 138 687,167	9 990,838 374,943	80 751,124	379,039 9 991,269	565 29	565
160	5 138 308,224	9 990,273 374,914	70 760,555	379,011 9 990,803	566 28	566
170	5 137 929,310		60 770,532			

X = 5130 km

$X_{km}$	$X'_{m}$	$\frac{\Delta X'_{x'}}{\Delta X'_{y'}}$	$Y'_{m}$	$\frac{\Delta Y'_{x'}}{\Delta Y'_{y'}}$	a	b
60	5 132 103,101	9 995,965 376,671	171 070,691	378,972 9 995,700	567 37	567
70	5 131 724,430	9 995,399 376,634	161 074,991	378,935 9 995,153	567 35	567
80	5 131 345,796	9 994,832 376,599	151 079,858	378,900 9 994,567	566 35	566
90	5 130 967,197	9 994,266 376,564	141 085,291	378,864 9 993,999	566 34	566
100	5 130 588,633	9 993,700 376,530	131 091,292	378,831 9 993,433	566 34	566
110	5 130 210,103	9 993,133 376,597	121 097,859	378,797 9 992,866	566 32	566
120	5 129 831,606	9 992,566 376,466	111 104,993	378,765 9 992,299	566 31	566
130	5 129 453 140	9 992,000 376,435	101 112,694	378,733 9 991,731	566 30	566
140	5 129 074,705	9 991,434 376,405	91 120,963	378,703 9 991,165	567 29	567
150	5 128 696,300	9 990,867 376,376	81 129,798	378,674 9 990,598	567 29	567
160	5 128 317,924	9 990,300 376,346	71 139,200	378,645 9 990,030	567 28	567
170	5 127 939,576		61 149,170			

X = 5150 km

$X_{km}$	$X'_{m}$	$\frac{\Delta X'_{x'}}{\Delta X'_{y'}}$	$Y'_{m}$	$\frac{\Delta Y'_{x'}}{\Delta Y'_{y'}}$	a	b
60	5 152 094,994	9 995,890 375,803	170 312,180	390,103 9 995,626	565 37	565
70	5 151 715,191	9 995,326 375,766	160 316,554	390,067 9 995,061	565 36	565
80	5 151 335,425	9 994,761 375,729	150 321,493	390,031 9 994,496	565 35	565
90	5 150 955,694	9 994,197 375,696	140 326,997	379,996 9 993,932	565 35	565
100	5 150 575,998	9 993,632 375,662	130 333,065	379,961 9 993,366	565 35	565
110	5 150 196,236	9 993,068 375,629	120 339,699	379,928 9 992,801	565 32	565
120	5 149 816,707	9 992,502 375,598	110 346,898	379,896 9 992,237	564 31	564
130	5 149 437,103	9 991,938 375,567	100 354,661	379,864 9 991,671	565 30	565
140	5 149 057,242	9 991,373 375,537	90 362,990	379,834 9 991,106	564 29	564
150	5 148 676,005	9 990,808 375,508	80 371,885	379,803 9 990,541	564 28	564
160	5 148 296,497	9 990,244 375,481	70 381,344	379,777 9 990,076	564 28	564
170	5 147 919,016		60 391,368			

X = 5160 km

$Y_{km}$	$X'_{m}$	$\frac{\Delta X'_{x'}}{\Delta X'_{y'}}$	$Y'_m$	$\frac{\Delta Y'_{x'}}{\Delta Y'_{y'}}$	$a$
60	5 162 090,884	9 995,852 380,550 37	169 932,077	380,558 9 995,590 37	563
70	5 161 710,517	9 995,939 380,531	159 935,487	380,530 9 995,025 36	564
80	5 161 330,186	9 994,255 380,549	149 941,462	380,549 9 994,161 34	564
90	5 160 949,891	9 994,162 380,560	139 947,001	380,560 9 993,897 35	563
100	5 160 569,630	9 993,599 380,526	129 953,104	380,526 9 993,535 33	564
110	5 160 189,404	9 993,034 380,493	119 959,771	380,493 9 992,769 33	563
120	5 159 809,209	9 992,471 380,460	109 967,002	380,460 9 992,205 31	564
130	5 159 429,047	9 991,907 380,427	99 974,797	380,429 9 991,641 30	563
140	5 159 048,915	9 991,344 380,398	89 983,156	380,398 9 991,076 30	564
150	5 158 668,813	9 990,780 380,365	79 992,080	380,365 9 990,513 29	563
160	5 158 288,741	9 990,216 380,332	70 001,367	380,340 9 989,952 28	564
170	5 157 908,696		60 011,619		

X = 5180 km

$Y_{km}$	$X'_{m}$	$\frac{\Delta X'_{x'}}{\Delta X'_{y'}}$	$Y'_m$	$\frac{\Delta Y'_{x'}}{\Delta Y'_{y'}}$	$a$
60	5 182 082,552	9 995,777 381,134	169 170,179	381,793 9 995,516 37	561
70	5 181 701,058	9 995,217 381,156	159 174,663	381,756 9 994,953 36	562
80	5 181 319,602	9 994,654 381,172	149 179,710	381,720 9 994,391 35	561
90	5 180 938,180	9 994,093 381,187	139 185,319	381,685 9 993,829 34	562
100	5 180 556,793	9 993,530 381,203	129 191,490	381,651 9 993,267 32	561
110	5 180 175,440	9 992,970 381,220	119 198,223	381,618 9 992,705 32	562
120	5 179 794,120	9 992,407 381,238	109 205,518	381,585 9 992,142 31	562
130	5 179 412,831	9 991,846 381,256	99 213,276	381,554 9 991,580 30	562
140	5 179 031,573	9 991,284 381,273	89 221,796	381,524 9 991,018 30	562
150	5 178 650,344	9 990,723 381,293	79 230,778	381,493 9 990,455 28	562
160	5 178 269,145	9 990,160 381,312	69 240,323	381,461 9 989,893 28	561
170	5 177 887,973		59 250,430		

X = 5170 km

$Y_{km}$	$X'_{m}$	$\frac{\Delta X'_{x'}}{\Delta X'_{y'}}$	$Y'_m$	$\frac{\Delta Y'_{x'}}{\Delta Y'_{y'}}$	$a$
60	5 172 086,736	9 995,816 380,530	169 551,409	381,230 9 995,552 36	563
70	5 171 705,806	9 995,252 380,595	159 555,857	381,194 9 994,989 36	562
80	5 171 324,911	9 994,691 380,558	149 560,868	381,158 9 994,427 36	563
90	5 170 944,053	9 994,127 380,524	139 566,441	381,122 9 993,865 34	563
100	5 170 563,229	9 993,564 380,751	129 572,578	381,088 9 993,300 33	563
110	5 170 182,438	9 993,002 380,718	119 579,278	381,055 9 992,738 32	562
120	5 169 801,680	9 992,440 380,726	109 586,542	381,024 9 992,174 32	563
130	5 169 420,954	9 991,877 380,695	99 594,268	380,992 9 991,610 30	563
140	5 169 040,259	9 991,314 380,666	89 602,728	380,962 9 991,047 30	563
150	5 168 659,593	9 990,751 380,636	79 611,711	380,933 9 990,484 28	563
160	5 168 278,957	9 990,188 380,609	69 621,227	380,904 9 989,921 28	563
170	5 167 898,348		59 631,306		

X = 5190 km

$Y_{km}$	$X'_{m}$	$\frac{\Delta X'_{x'}}{\Delta X'_{y'}}$	$Y'_m$	$\frac{\Delta Y'_{x'}}{\Delta Y'_{y'}}$	$a$
60	5 192 078,329	9 995,741 382,054	168 788,286	382,354 9 995,479 37	561
70	5 191 696,275	9 995,179 382,019	158 792,007	382,316 9 994,917 35	561
80	5 191 314,256	9 994,619 381,983	148 797,990	382,281 9 994,356 34	561
90	5 190 932,273	9 994,058 381,950	138 803,634	382,246 9 993,795 34	560
100	5 190 550,323	9 993,499 381,913	128 809,839	382,212 9 993,234 33	561
110	5 190 168,410	9 992,936 381,876	118 816,605	382,179 9 992,672 32	560
120	5 189 786,527	9 992,376 381,839	108 823,933	382,147 9 992,111 31	561
130	5 189 404,677	9 991,815 381,802	98 831,822	382,116 9 991,550 30	561
140	5 189 022,857	9 991,254 381,765	88 840,272	382,086 9 990,989 29	561
150	5 188 641,167	9 990,693 381,728	78 849,283	382,056 9 990,427 28	560
160	5 188 259,305	9 990,133 381,733	68 858,856	382,028 9 989,865 28	561
170	5 187 877,572		58 868,991		

X = 5220 km

$X_{km}$	$X'_m$	$\frac{\Delta X''}{\Delta X'}$	$Y'_m$	$\frac{\Delta Y''}{\Delta Y'}$	$a$
60	5 220 059,439	9 995,628 383,734	167 639,645	384,032 9 995,368	59 37
70	5 221 681,705	9 995,070 383,698	157 644,277	383,995 9 994,810	58 36
80	5 223 298,007	9 984,533 383,662	147 649,467	383,959 9 994,251	58 35
90	5 220 914,345	9 993,924 383,626	137 655,216	383,924 9 993,692	59 34
100	5 220 530,717	9 993,397 383,595	127 661,523	383,990 9 993,135	59 33
110	5 220 147,122	9 992,839 383,562	117 669,388	383,957 9 992,576	59 32
120	5 219 763,560	9 992,281 383,530	107 675,812	383,925 9 992,017	59 31
130	5 219 380,030	9 991,723 383,500	97 683,795	383,794 9 991,460	58 30
140	5 218 996,530	9 991,166 383,470	87 692,335	383,763 9 990,900	58 29
150	5 218 613,060	9 990,607 383,441	77 701,435	383,735 9 990,343	58 28
160	5 218 229,619	9 990,043 383,413	67 711,092	383,706 9 989,785	58 27
170	5 217 846,206		57 721,309		

X = 5200 km

$X_{km}$	$X'_m$	$\frac{\Delta X''}{\Delta X'}$	$Y'_m$	$\frac{\Delta Y''}{\Delta Y'}$	$a$
60	5 202 074,070	9 995,703 382,616	168 406,032	382,914 9 995,441	59 37
70	5 201 619,454	9 995,144 382,579	158 410,591	382,878 9 994,882	58 36
80	5 201 308,875	9 984,604 382,544	148 415,709	382,844 9 994,321	58 35
90	5 200 926,331	9 984,024 382,509	138 421,388	382,806 9 993,761	58 34
100	5 200 543,822	9 983,464 382,476	128 427,627	382,772 9 993,201	58 33
110	5 200 161,346	9 982,905 382,443	118 434,426	382,739 9 992,640	58 32
120	5 199 778,903	9 982,345 382,411	108 441,786	382,707 9 992,080	58 31
130	5 199 396,492	9 981,784 382,381	98 449,706	382,676 9 991,520	58 30
140	5 199 014,111	9 981,225 382,351	88 458,186	382,645 9 990,959	58 29
150	5 198 631,760	9 980,665 382,322	78 467,227	382,615 9 990,399	58 28
160	5 198 249,438	9 980,104 382,293	68 476,828	382,588 9 989,838	58 27
170	5 197 867,143		58 486,930		

X = 5210 km

$X_{km}$	$X'_m$	$\frac{\Delta X''}{\Delta X'}$	$Y'_m$	$\frac{\Delta Y''}{\Delta Y'}$	$a$
60	5 212 069,773	9 995,666 383,175	168 023,118	383,473 9 995,405	59 37
70	5 211 686,598	9 995,107 383,139	158 027,713	383,436 9 994,845	59 36
80	5 211 303,459	9 984,548 383,104	148 032,868	383,401 9 994,286	58 35
90	5 210 920,355	9 983,990 383,069	138 038,582	383,366 9 993,727	59 34
100	5 210 537,286	9 983,431 383,035	128 044,855	383,332 9 993,165	59 33
110	5 210 154,251	9 982,871 383,003	118 051,687	383,297 9 992,603	59 32
120	5 209 771,248	9 982,312 382,970	108 059,079	383,267 9 992,043	59 31
130	5 209 388,276	9 981,754 382,940	98 067,030	383,235 9 991,489	59 30
140	5 209 005,336	9 981,194 382,911	88 075,241	383,206 9 990,930	59 29
150	5 208 622,425	9 980,635 382,883	78 084,611	383,176 9 990,371	59 28
160	5 208 239,542	9 980,077 382,854	68 094,240	383,148 9 989,811	59 27
170	5 207 856,688		58 104,429		

X = 5230 km

$X_{km}$	$X'_m$	$\frac{\Delta X''}{\Delta X'}$	$Y'_m$	$\frac{\Delta Y''}{\Delta Y'}$	$a$
60	5 232 061,067	9 995,592 384,292	167 255,613	384,999 9 995,331	59 37
70	5 231 676,775	9 995,035 384,255	157 260,282	384,952 9 994,774	59 36
80	5 231 292,520	9 984,477 384,221	147 265,508	384,916 9 994,216	59 35
90	5 230 908,299	9 983,921 384,185	137 271,292	384,882 9 993,659	59 34
100	5 230 524,114	9 983,363 384,153	127 277,633	384,848 9 993,102	59 33
110	5 230 139,961	9 982,807 384,120	117 284,531	384,814 9 992,544	59 32
120	5 229 755,841	9 982,250 384,088	107 291,987	384,782 9 991,986	59 31
130	5 229 371,753	9 981,693 384,057	97 300,001	384,752 9 991,429	59 30
140	5 228 987,696	9 981,135 384,025	87 309,572	384,722 9 990,872	59 29
150	5 228 603,667	9 980,579 383,993	77 317,700	384,692 9 990,314	59 28
160	5 228 219,668	9 980,021 383,971	67 327,386	384,664 9 989,756	59 27
170	5 227 835,697		57 337,630		

X = 5240 km

X <sub>km</sub>	X' <sub>m</sub>	$\frac{\Delta X''}{\Delta X'}$	Y' <sub>m</sub>	$\frac{\Delta Y''}{\Delta Y'}$	a	b
60	5 242 056,659	9 995,533 384,849	166 871,024	9 395,145 9 995,294	556	554
70	5 244 671,810	9 995,098 384,813	156 875,730	9 395,109 9 994,738	556	554
80	5 244 286,997	9 994,442 384,777	146 880,992	9 395,073 9 994,182	556	554
90	5 240 902,220	9 992,996 384,742	136 886,810	9 395,037 9 993,625	554	554
100	5 240 517,477	9 992,320 384,705	126 893,185	9 395,004 9 993,068	554	554
110	5 240 132,768	9 992,774 384,677	116 900,117	9 394,971 9 992,512	556	554
120	5 239 748,091	9 992,218 384,645	106 907,605	9 394,939 9 991,956	556	554
130	5 239 363,446	9 991,662 384,615	96 915,649	9 394,908 9 991,399	556	554
140	5 238 978,831	9 991,106 384,585	86 924,250	9 394,878 9 990,842	556	554
150	5 238 594,246	9 990,550 384,557	76 933,408	9 394,849 9 990,286	556	554
160	5 238 209,689	9 989,993 384,529	66 943,122	9 394,821 9 989,729	556	554
170	5 237 825,161		56 953,993		528	

X = 5260 km

X <sub>km</sub>	X' <sub>m</sub>	$\frac{\Delta X''}{\Delta X'}$	Y' <sub>m</sub>	$\frac{\Delta Y''}{\Delta Y'}$	a	b
60	5 262 047,729	9 995,479 385,360	166 100,478	9 396,235 9 995,221	554	554
70	5 261 661,769	9 994,926 385,323	156 104,957	9 396,218 9 994,666	554	554
80	5 261 275,846	9 994,371 385,288	146 110,231	9 396,183 9 994,112	554	554
90	5 260 889,958	9 993,817 385,254	136 116,179	9 396,148 9 993,557	554	554
100	5 260 504,104	9 993,260 385,220	126 122,622	9 396,114 9 992,999	554	554
110	5 260 118,284	9 992,709 385,188	116 129,619	9 396,081 9 992,448	554	554
120	5 259 732,496	9 992,155 385,157	106 137,171	9 396,049 9 991,895	554	554
130	5 259 346,729	9 991,601 385,126	96 145,278	9 396,019 9 991,339	554	554
140	5 258 961,013	9 991,047 385,096	86 153,939	9 395,988 9 990,784	554	554
150	5 258 575,317	9 990,492 385,068	76 163,155	9 395,960 9 990,230	554	554
160	5 258 189,649	9 989,938 385,040	66 172,925	9 395,931 9 989,675	554	554
170	5 257 804,009		56 183,250			

X = 5250 km

X <sub>km</sub>	X' <sub>m</sub>	$\frac{\Delta X''}{\Delta X'}$	Y' <sub>m</sub>	$\frac{\Delta Y''}{\Delta Y'}$	a	b
60	5 252 052,212	9 995,217 385,404	166 485,879	9 395,701 9 995,258	556	554
70	5 251 666,008	9 994,661 385,369	156 490,621	9 395,664 9 994,702	556	554
80	5 251 281,439	9 994,107 385,333	146 495,919	9 395,628 9 994,146	556	554
90	5 250 896,106	9 993,552 385,299	136 501,773	9 395,594 9 993,592	556	554
100	5 250 510,807	9 992,997 385,265	126 508,481	9 395,559 9 993,035	556	554
110	5 250 125,542	9 992,442 385,233	116 515,146	9 395,527 9 992,480	556	554
120	5 249 740,309	9 991,887 385,201	106 522,666	9 395,495 9 991,925	556	554
130	5 249 355,108	9 991,331 385,171	96 530,741	9 395,463 9 991,369	556	554
140	5 248 969,937	9 990,776 385,141	86 539,272	9 395,433 9 990,813	556	554
150	5 248 584,796	9 990,221 385,113	76 548,559	9 395,404 9 990,258	556	554
160	5 248 199,683	9 989,666 385,085	66 558,201	9 395,376 9 989,702	556	554
170	5 247 814,598		56 568,599			

X = 5270 km

X <sub>km</sub>	X' <sub>m</sub>	$\frac{\Delta X''}{\Delta X'}$	Y' <sub>m</sub>	$\frac{\Delta Y''}{\Delta Y'}$	a	b
60	5 272 043,208	9 995,443 386,213	165 713,923	9 396,809 9 994,184	554	554
70	5 271 656,693	9 994,899 386,178	155 718,739	9 396,772 9 993,631	554	554
80	5 271 270,217	9 994,336 386,142	145 724,408	9 396,736 9 993,077	554	554
90	5 270 883,775	9 993,783 386,108	135 730,031	9 396,701 9 992,523	554	554
100	5 270 497,367	9 993,230 386,074	125 736,508	9 396,668 9 991,970	554	554
110	5 270 110,993	9 992,677 386,042	115 743,538	9 396,635 9 991,416	554	554
120	5 269 724,651	9 992,123 386,011	105 751,122	9 396,603 9 990,863	554	554
130	5 269 338,340	9 991,571 385,980	95 759,259	9 396,571 9 990,308	554	554
140	5 268 952,060	9 991,017 385,951	85 767,951	9 396,542 9 989,756	554	554
150	5 268 565,809	9 990,464 385,922	75 777,195	9 396,512 9 989,201	554	554
160	5 268 179,587	9 989,911 385,894	65 786,994	9 396,485 9 988,648	554	554
170	5 267 793,393		55 797,346			

X = 5300 km

Y(km)	X' m	$\frac{\Delta X'}{\Delta X''}$	Y' m	$\frac{\Delta Y'}{\Delta Y''}$	a	b
60	5 302 029,423	9 995,371 9 995,074	164 551,840	388,164 9 995,074	550	37
70	5 301 641,253	9 994,791 9 994,523	154 556,766	386,427 9 994,523	550	36
80	5 301 253,120	9 994,430 9 994,173	144 562,243	384,291 9 994,173	550	35
90	5 300 865,021	9 994,080 9 993,822	134 568,270	382,356 9 993,822	550	33
100	5 300 476,957	9 993,730 9 993,480	124 574,840	380,623 9 993,480	550	33
110	5 300 088,926	9 993,380 9 993,131	114 581,977	379,090 9 993,131	550	32
120	5 299 700,927	9 993,030 9 992,781	104 589,656	377,769 9 992,781	550	30
130	5 299 312,960	9 992,680 9 992,431	94 597,887	376,648 9 992,431	550	30
140	5 298 925,023	9 992,330 9 992,081	84 606,668	375,727 9 992,081	550	30
150	5 298 537,116	9 992,080 9 991,831	74 615,999	375,017 9 991,831	550	28
160	5 298 149,237	9 991,830 9 991,581	64 625,882	374,440 9 991,581	550	26
170	5 297 761,385	9 991,580	54 636,316	374,000	550	26

X = 5280 km

Y(km)	X' m	$\frac{\Delta X'}{\Delta X''}$	Y' m	$\frac{\Delta Y'}{\Delta Y''}$	a	b
60	5 282 038,651	9 995,405 9 995,147	165 327,114	387,361 9 995,147	552	36
70	5 281 651,584	9 995,053 9 994,795	155 331,967	385,725 9 994,795	552	36
80	5 281 264,663	9 994,701 9 994,442	145 337,372	384,289 9 994,442	552	35
90	5 280 877,559	9 994,350 9 994,091	135 343,330	383,054 9 994,091	552	34
100	5 280 490,597	9 994,000 9 993,741	125 349,840	382,020 9 993,741	553	33
110	5 280 103,670	9 993,650 9 993,391	115 356,903	381,187 9 993,391	552	32
120	5 279 716,774	9 993,300 9 993,041	105 364,519	380,455 9 993,041	553	31
130	5 279 329,911	9 992,950 9 992,691	95 372,688	379,823 9 992,691	552	30
140	5 278 943,077	9 992,600 9 992,341	85 381,409	379,291 9 992,341	552	29
150	5 278 556,273	9 992,250 9 992,001	75 390,683	378,859 9 992,001	553	29
160	5 278 169,498	9 991,900 9 991,651	65 400,509	378,527 9 991,651	552	26
170	5 277 782,750	9 991,550	55 410,889	378,200	552	26

X = 5290 km

Y(km)	X' m	$\frac{\Delta X'}{\Delta X''}$	Y' m	$\frac{\Delta Y'}{\Delta Y''}$	a	b
60	5 212 034,056	9 995,367 9 995,111	164 939,753	387,913 9 995,111	551	37
70	5 291 646,437	9 994,915 9 994,659	154 944,642	386,276 9 994,659	551	36
80	5 291 259,854	9 994,563 9 994,307	144 950,083	384,840 9 994,307	551	34
90	5 290 871,307	9 994,211 9 993,955	134 956,076	383,606 9 993,955	551	34
100	5 290 483,794	9 993,860 9 993,604	124 962,620	382,572 9 993,604	551	33
110	5 290 096,314	9 993,510 9 993,254	114 969,716	381,739 9 993,254	551	31
120	5 289 708,867	9 993,160 9 992,904	104 977,264*	381,008 9 992,904	551	31
130	5 289 321,451	9 992,810 9 992,554	94 985,563	380,376 9 992,554	551	30
140	5 288 934,065	9 992,460 9 992,204	84 994,314	379,844 9 992,204	551	30
150	5 288 546,709	9 992,110 9 991,854	75 003,617	379,412 9 991,854	551	28
160	5 288 159,381	9 991,760 9 991,504	65 013,472	379,080 9 991,504	550	26
170	5 287 772,081	9 991,410	55 023,878	378,750	550	26

X = 5310 km

Y(km)	X' m	$\frac{\Delta X'}{\Delta X''}$	Y' m	$\frac{\Delta Y'}{\Delta Y''}$	a	b
60	5 312 024,754	9 995,294 9 995,037	164 163,376	389,013 9 995,037	550	37
70	5 311 636,034	9 994,744 9 994,487	154 168,339	387,376 9 994,487	549	35
80	5 311 247,350	9 994,293 9 994,036	144 173,852	385,941 9 994,036	549	35
90	5 310 858,701	9 993,842 9 993,585	134 179,914	384,706 9 993,585	549	34
100	5 310 470,087	9 993,391 9 993,134	124 186,525	383,672 9 993,134	549	32
110	5 310 081,506	9 992,940 9 992,683	114 193,687	382,840 9 992,683	549	32
120	5 309 692,957	9 992,489 9 992,232	104 201,398	382,108 9 992,232	549	31
130	5 309 304,439	9 992,038 9 991,781	94 209,659	381,477 9 991,781	549	30
140	5 308 915,952	9 991,587 9 991,330	84 218,470	380,945 9 991,330	550	29
150	5 308 527,494	9 991,136 9 990,879	74 227,831	380,513 9 990,879	549	27
160	5 308 139,065	9 990,685 9 990,428	64 237,742	380,181 9 990,428	549	26
170	5 307 750,663	9 990,234	54 248,202	379,850	549	26

X = 5320 km

X <sub>km</sub>	X' m	$\frac{\Delta X' X'}{\Delta X' Y'}$	Y' m	$\frac{\Delta Y' X'}{\Delta Y' Y'}$	a	b
60	5 320 020,048	9 995,256 9 995,270	163 774,363	389,561 9 995,000	548 36	548 36
70	5 321 630,778	9 994,709 9 994,452	153 775,363	389,925 9 994,452	549 35	549 36
80	5 321 241,545	9 994,160 9 993,198	143 784,911	389,490 9 993,503	548 35	547 35
90	5 320 852,347	9 993,612 9 993,163	133 791,008	389,055 9 993,355	549 34	549 33
100	5 320 463,184	9 993,063 9 992,131	123 797,653	389,041 9 992,066	548 33	548 33
110	5 320 074,053	9 992,515 9 992,033	113 804,847	389,289 9 992,231	548 32	548 32
120	5 319 684,955	9 991,967 9 991,067	103 812,590	389,256 9 991,108	548 31	548 31
130	5 319 295,888	9 991,419 9 990,536	93 820,882	389,225 9 991,159	549 30	549 29
140	5 318 906,852	9 990,870 9 990,008	83 829,723	389,296 9 990,610	548 29	548 28
150	5 318 517,844	9 990,322 9 989,578	73 839,113	389,267 9 990,062	549 28	549 28
160	5 318 128,866	9 989,773 9 989,048	63 849,051	389,239 9 989,312	548 27	548 27
170	5 317 739,914		53 859,539			

X = 5340 km

X <sub>km</sub>	X' m	$\frac{\Delta X' X'}{\Delta X' Y'}$	Y' m	$\frac{\Delta Y' X'}{\Delta Y' Y'}$	a	b
60	5 342 010,523	9 995,183 9 994,927	162 994,692	390,656 9 994,927	547 36	547 36
70	5 341 620,159	9 994,636 9 994,381	152 999,765	390,620 9 994,381	546 36	546 36
80	5 341 229,830	9 994,090 9 993,834	143 005,284	390,584 9 993,834	547 35	547 35
90	5 340 839,537	9 993,543 9 993,287	133 011,550	390,549 9 993,287	546 35	546 35
100	5 340 449,278	9 992,997 9 992,741	123 018,263	390,516 9 992,741	546 34	546 34
110	5 340 059,051	9 992,451 9 992,194	113 025,323	390,483 9 992,194	547 33	547 33
120	5 339 668,888	9 991,904 9 991,652	103 033,329	390,451 9 991,652	546 32	546 32
130	5 339 278,695	9 991,358 9 991,102	93 041,693	390,421 9 991,102	547 30	547 30
140	5 338 888,563	9 990,811 9 990,552	83 050,293	390,391 9 990,552	546 29	546 29
150	5 338 498,459	9 990,265 9 990,074	73 060,031	390,363 9 990,066	547 28	547 28
160	5 338 108,385	9 989,718 9 989,459	63 070,025	390,334 9 989,459	546 27	546 27
170	5 337 718,337		53 080,566			

X = 5330 km

X <sub>km</sub>	X' m	$\frac{\Delta X' X'}{\Delta X' Y'}$	Y' m	$\frac{\Delta Y' X'}{\Delta Y' Y'}$	a	b
60	5 332 015,304	9 995,219 9 994,964	163 384,802	390,110 9 994,964	547 37	547 37
70	5 331 625,487	9 994,672 9 994,417	153 389,838	390,072 9 994,417	547 36	547 36
80	5 331 235,705	9 994,125 9 993,868	143 395,421	390,037 9 993,868	547 34	547 34
90	5 330 845,959	9 993,578 9 993,321	133 401,533	390,003 9 993,321	547 34	547 34
100	5 330 456,247	9 993,031 9 992,773	123 408,232	389,969 9 992,773	547 33	547 33
110	5 330 066,568	9 992,483 9 992,225	113 415,459	389,936 9 992,225	547 31	547 31
120	5 329 676,922	9 991,936 9 991,677	103 423,234	389,905 9 991,677	547 31	547 31
130	5 329 287,307	9 991,389 9 991,130	93 431,557	389,874 9 991,130	547 30	547 30
140	5 328 897,722	9 990,841 9 990,584	83 440,427	389,844 9 990,584	547 29	547 29
150	5 328 508,166	9 990,293 9 990,034	73 449,846	389,815 9 990,034	547 28	547 28
160	5 328 118,639	9 989,746 9 989,500	63 459,812	389,787 9 989,485	547 26	547 26
170	5 327 729,139		53 470,327			

X = 5350 km

X <sub>km</sub>	X' m	$\frac{\Delta X' X'}{\Delta X' Y'}$	Y' m	$\frac{\Delta Y' X'}{\Delta Y' Y'}$	a	b
60	5 352 005,706	9 995,145 9 994,911	162 604,036	391,202 9 994,911	545 37	545 37
70	5 351 614,795	9 994,600 9 994,345	152 609,145	391,165 9 994,345	545 35	545 35
80	5 351 223,920	9 994,095 9 993,840	142 614,800	391,130 9 993,840	545 33	545 33
90	5 350 833,080	9 993,540 9 993,285	132 621,001	391,095 9 993,285	546 34	546 34
100	5 350 442,275	9 992,994 9 992,739	122 627,747	391,061 9 992,739	545 32	545 32
110	5 350 051,502	9 992,448 9 992,193	112 635,040	391,029 9 992,193	546 32	546 32
120	5 349 660,762	9 991,897 9 991,642	102 642,878	390,997 9 991,642	545 31	545 31
130	5 349 270,033	9 991,348 9 991,093	92 651,262	390,966 9 991,093	546 29	546 29
140	5 348 879,374	9 990,799 9 990,544	82 660,192	390,937 9 990,544	545 29	545 29
150	5 348 488,784	9 990,251 9 990,027	72 669,668	390,909 9 990,027	545 27	545 27
160	5 348 098,103	9 989,691 9 989,434	62 679,691	390,881 9 989,434	545 27	545 27
170	5 347 707,509		52 690,259			

X = 5380 km

$Y_{km}$	$X'_{m}$	$\frac{\Delta X'_{m}}{\Delta X'_{m}}$	$Y'_{m}$	$\frac{\Delta Y'_{m}}{\Delta Y'_{m}}$	$a$
60	5 380 991,030	9 995,035 9 994,781	161 428,797	392,833 9 994,781	543 56
70	5 381 598,487	9 994,491 9 992,508	151 434,016	392,797 9 994,239	542 56
80	5 381 205,979	9 992,948 9 992,412	141 439,777	392,761 9 992,695	544 54
90	5 380 813,506	9 993,407 9 992,459	131 446,082	392,727 9 992,153	542 53
100	5 380 421,067	9 992,865 9 992,405	121 452,829	392,694 9 992,610	542 53
110	5 380 028,662	9 992,322 9 992,374	111 460,319	392,661 9 992,067	542 52
120	5 379 636,288	9 991,780 9 992,342	101 468,252	392,629 9 991,524	543 51
130	5 379 243,946	9 991,237 9 992,315	91 476,728	392,598 9 990,980	542 49
140	5 378 851,633	9 990,695 9 992,283	81 485,748	392,568 9 990,438	543 48
150	5 378 459,350	9 990,152 9 992,255	71 495,310	392,541 9 989,895	543 48
160	5 378 067,095	9 989,609 9 992,228	61 505,415	392,513 9 989,351	542 47
170	5 377 674,867		51 516,064		

X = 5360 km

$Y_{km}$	$X'_{m}$	$\frac{\Delta X'_{m}}{\Delta X'_{m}}$	$Y'_{m}$	$\frac{\Delta Y'_{m}}{\Delta Y'_{m}}$	$a$
60	5 362 000,951	9 995,058 9 991,654	162 212,834	391,747 9 991,654	544 37
70	5 361 609,395	9 994,564 9 994,120	152 217,980	391,710 9 994,120	545 35
80	5 361 217,975	9 994,019 9 993,674	142 223,670	391,674 9 993,674	544 33
90	5 360 826,590	9 993,475 9 993,251	132 229,906	391,641 9 993,251	544 33
100	5 360 435,239	9 992,931 9 992,516	122 236,686	391,607 9 992,516	545 33
110	5 360 043,921	9 992,386 9 991,886	112 244,011	391,574 9 991,886	544 31
120	5 359 652,635	9 991,842 9 991,254	102 251,881	391,543 9 991,254	544 31
130	5 359 261,381	9 991,297 9 991,225	92 260,296	391,512 9 991,041	544 31
140	5 358 870,156	9 990,753 9 991,195	82 269,255	391,482 9 990,495	544 29
150	5 358 478,961	9 990,209 9 991,167	72 278,760	391,452 9 989,950	545 28
160	5 358 087,794	9 989,664 9 991,159	62 288,810	391,422 9 989,405	545 27
170	5 357 696,655		52 299,405		

X = 5370 km

$Y_{km}$	$X'_{m}$	$\frac{\Delta X'_{m}}{\Delta X'_{m}}$	$Y'_{m}$	$\frac{\Delta Y'_{m}}{\Delta Y'_{m}}$	$a$
60	5 371 995,959	9 995,071 9 992,000	161 821,087	392,290 9 994,817	543 36
70	5 371 603,959	9 994,528 9 991,965	151 826,270	392,254 9 994,274	543 35
80	5 371 211,994	9 993,985 9 991,929	141 831,936	392,219 9 993,731	544 36
90	5 370 820,065	9 993,441 9 991,895	131 838,265	392,183 9 993,186	544 33
100	5 370 428,170	9 992,897 9 991,868	121 845,079	392,148 9 992,642	542 32
110	5 370 036,307	9 992,355 9 991,850	111 852,437	392,118 9 992,099	544 32
120	5 369 644,477	9 991,811 9 991,799	101 860,328	392,086 9 991,594	543 30
130	5 369 252,678	9 991,268 9 991,769	91 868,784	392,056 9 991,011	543 31
140	5 368 860,909	9 990,724 9 991,739	81 877,773	392,025 9 990,466	544 28
150	5 368 469,170	9 990,180 9 991,712	71 887,307	391,997 9 989,922	543 27
160	5 368 077,458	9 989,637 9 991,684	61 897,385	391,970 9 889,378	544 27
170	5 367 685,774		51 908,007		

X = 5390 km

$Y_{km}$	$X'_{m}$	$\frac{\Delta X'_{m}}{\Delta X'_{m}}$	$Y'_{m}$	$\frac{\Delta Y'_{m}}{\Delta Y'_{m}}$	$a$
60	5 391 986,065	9 994,987 9 992,087	161 035,964	393,275 9 994,745	541 36
70	5 391 592,978	9 994,456 9 992,050	151 041,219	393,239 9 994,203	541 36
80	5 391 199,928	9 993,915 9 992,015	141 047,016	393,203 9 993,661	542 34
90	5 390 806,913	9 993,373 9 992,981	131 053,355	393,168 9 993,120	541 34
100	5 390 413,932	9 992,832 9 992,946	121 060,235	393,135 9 992,577	542 32
110	5 390 020,984	9 992,290 9 992,916	111 067,658	393,102 9 992,035	541 32
120	5 389 628,068	9 991,749 9 992,885	101 075,623	393,171 9 991,493	542 30
130	5 389 235,183	9 991,207 9 992,855	91 084,130	393,141 9 990,951	542 29
140	5 388 842,328	9 990,665 9 992,826	81 093,179	393,112 9 990,410	541 30
150	5 388 449,502	9 990,124 9 992,798	71 102,769	393,082 9 989,867	541 28
160	5 388 056,704	9 989,583 9 992,770	61 112,902	393,054 9 989,324	542 26
170	5 387 663,934		51 123,978		



X = 5400 km

$X_{km}$	$X'$	$\frac{\Delta X'}{\Delta X}$	$Y'$	$\frac{\Delta Y'}{\Delta X'}$	a	b
60	5 401 981,062	9 393,960 9 393,628	160 642,589	9 393,916 9 394,709	540	36
70	5 401 587,434	9 994,421 9 994,167	150 647,880	9 994,880 9 994,167	540	35
80	5 401 193,843	9 993,890 9 993,557	140 653,713	9 993,845 9 993,627	540	35
90	5 400 800,286	9 993,340 9 993,122	130 660,086	9 993,810 9 993,086	541	34
100	5 400 406,764	9 992,789 9 992,571	120 667,000	9 992,745 9 992,421	541	33
110	5 400 013,274	9 992,259 9 992,041	110 674,455	9 992,713 9 992,389	541	30
120	5 399 619,817	9 991,717 9 991,477	100 682,452	9 991,682 9 991,358	540	31
130	5 399 226,390	9 991,177 9 991,177	90 690,989	9 991,656 9 990,922	540	30
140	5 398 832,993	9 990,637 9 990,637	80 700,067	9 990,628 9 990,304	541	28
150	5 398 439,626	9 990,096 9 990,096	70 709,687	9 990,624 9 990,300	541	28
160	5 398 046,287	9 989,555 9 989,555	60 719,848	9 989,596 9 989,272	540	27
170	5 397 652,974	9 989,014 9 989,014	50 730,549	9 989,259 9 988,935	540	27

X = 5420 km

$X_{km}$	$X'$	$\frac{\Delta X'}{\Delta X}$	$Y'$	$\frac{\Delta Y'}{\Delta X'}$	a	b
60	5 421 970,946	9 994,887 9 994,707	159 854,217	9 994,850 9 994,526	539	37
70	5 421 576,239	9 994,348 9 994,167	149 859,581	9 994,312 9 994,062	539	36
80	5 421 181,567	9 993,810 9 993,630	139 865,484	9 993,775 9 993,523	537	34
90	5 420 786,931	9 993,271 9 993,091	129 871,926	9 993,740 9 993,486	538	34
100	5 420 392,328	9 992,733 9 992,553	119 878,908	9 992,704 9 992,450	538	33
110	5 419 997,759	9 992,194 9 992,014	109 886,428	9 992,668 9 992,414	538	32
120	5 419 603,221	9 991,656 9 991,476	99 894,487	9 991,620 9 991,366	539	30
130	5 419 208,714	9 991,117 9 991,117	89 902,085	9 991,084 9 990,830	538	29
140	5 418 814,237	9 990,579 9 990,579	79 912,223	9 990,542 9 990,288	539	29
150	5 418 419,790	9 990,039 9 990,039	69 921,899	9 990,002 9 989,748	538	28
160	5 418 025,370	9 989,500 9 989,500	59 932,115	9 989,462 9 989,208	538	28
170	5 417 630,977	9 988,961 9 988,961	49 942,870	9 988,924 9 988,670	538	27

X = 5410 km

$X_{km}$	$X'$	$\frac{\Delta X'}{\Delta X}$	$Y'$	$\frac{\Delta Y'}{\Delta X'}$	a	b
60	5 411 976,022	9 994,364 9 994,184	160 248,673	9 994,328 9 994,004	540	31
70	5 411 581,855	9 994,384 9 994,184	150 254,000	9 994,439 9 994,184	540	30
80	5 411 187,723	9 993,844 9 993,644	140 259,868	9 993,898 9 993,644	539	34
90	5 410 793,626	9 993,305 9 993,105	130 266,276	9 993,359 9 993,105	540	34
100	5 410 399,563	9 992,765 9 992,565	120 273,224	9 992,819 9 992,565	539	32
110	5 410 005,532	9 992,227 9 992,027	110 280,712	9 992,281 9 992,027	540	32
120	5 409 611,534	9 991,687 9 991,487	100 288,739	9 991,741 9 991,487	540	30
130	5 409 217,567	9 991,147 9 991,147	90 297,307	9 991,201 9 990,947	540	30
140	5 408 823,630	9 990,607 9 990,607	80 306,415	9 990,661 9 990,407	540	28
150	5 408 429,722	9 990,068 9 990,068	70 316,063	9 990,122 9 989,868	540	27
160	5 408 035,842	9 989,529 9 989,529	60 326,252	9 989,583 9 989,329	540	27
170	5 407 641,989	9 988,989 9 988,989	50 336,980	9 989,043 9 988,789	540	27

X = 5430 km

$X_{km}$	$X'$	$\frac{\Delta X'}{\Delta X}$	$Y'$	$\frac{\Delta Y'}{\Delta X'}$	a	b
60	5 431 965,833	9 994,850 9 994,670	159 459,222	9 994,814 9 994,490	538	36
70	5 431 570,587	9 994,312 9 994,132	149 464,623	9 994,276 9 994,022	537	36
80	5 431 175,377	9 993,775 9 993,595	139 470,561	9 993,739 9 993,485	537	34
90	5 430 780,202	9 993,238 9 993,058	129 477,038	9 993,202 9 992,948	538	34
100	5 430 385,061	9 992,700 9 992,520	119 484,052	9 992,664 9 992,410	538	32
110	5 429 989,953	9 992,162 9 991,982	109 491,605	9 992,126 9 991,872	539	31
120	5 429 594,877	9 991,624 9 991,444	99 499,636	9 991,588 9 991,334	537	31
130	5 429 199,831	9 991,087 9 991,087	89 508,324	9 991,050 9 990,796	538	30
140	5 428 804,816	9 990,549 9 990,549	79 517,491	9 990,512 9 990,258	537	28
150	5 428 409,829	9 990,012 9 990,012	69 527,196	9 990,074 9 989,820	538	27
160	5 428 014,871	9 989,474 9 989,474	59 537,440	9 989,436 9 989,182	538	27
170	5 427 619,940	9 988,936 9 988,936	49 548,221	9 988,898 9 988,644	538	27

X = 5460 km

$Y_{km}$	$X'_{m}$	$\frac{\Delta X'_x}{\Delta X'_y}$	$Y'_{m}$	$\frac{\Delta X'_x}{\Delta X'_y}$	$X'_{m}$	$\frac{\Delta X'_x}{\Delta X'_y}$	$Y'_{m}$	$\frac{\Delta X'_x}{\Delta X'_y}$	a	b
60	5 461 950,272	9 994,740	158 271,014	9 994,740	5 461 950,272	9 994,740	158 271,014	9 994,740	537	536
70	5 461 553,417	9 993,505	148 276,523	9 993,505	5 461 553,417	9 993,505	148 276,523	9 993,505	537	536
80	5 461 156,598	9 992,270	138 282,030	9 992,270	5 461 156,598	9 992,270	138 282,030	9 992,270	537	536
90	5 460 759,813	9 991,035	128 287,537	9 991,035	5 460 759,813	9 991,035	128 287,537	9 991,035	537	536
100	5 460 363,062	9 989,800	118 293,044	9 989,800	5 460 363,062	9 989,800	118 293,044	9 989,800	537	536
110	5 459 966,345	9 988,565	108 298,551	9 988,565	5 459 966,345	9 988,565	108 298,551	9 988,565	537	536
120	5 459 569,628	9 987,330	98 304,058	9 987,330	5 459 569,628	9 987,330	98 304,058	9 987,330	537	536
130	5 459 172,911	9 986,095	88 309,565	9 986,095	5 459 172,911	9 986,095	88 309,565	9 986,095	537	536
140	5 458 776,194	9 984,860	78 315,072	9 984,860	5 458 776,194	9 984,860	78 315,072	9 984,860	537	536
150	5 458 379,477	9 983,625	68 320,579	9 983,625	5 458 379,477	9 983,625	68 320,579	9 983,625	537	536
160	5 457 982,760	9 982,390	58 326,086	9 982,390	5 457 982,760	9 982,390	58 326,086	9 982,390	537	536
170	5 457 586,043	9 981,155	48 331,593	9 981,155	5 457 586,043	9 981,155	48 331,593	9 981,155	537	536

X = 5440 km

$Y_{km}$	$X'_{m}$	$\frac{\Delta X'_x}{\Delta X'_y}$	$Y'_{m}$	$\frac{\Delta X'_x}{\Delta X'_y}$	$X'_{m}$	$\frac{\Delta X'_x}{\Delta X'_y}$	$Y'_{m}$	$\frac{\Delta X'_x}{\Delta X'_y}$	a	b
60	5 441 960,683	9 984,813	159 063,689	9 984,813	5 441 960,683	9 984,813	159 063,689	9 984,813	537	536
70	5 441 564,099	9 983,578	149 069,196	9 983,578	5 441 564,099	9 983,578	149 069,196	9 983,578	537	536
80	5 441 167,515	9 982,343	139 074,703	9 982,343	5 441 167,515	9 982,343	139 074,703	9 982,343	537	536
90	5 440 770,931	9 981,108	129 080,210	9 981,108	5 440 770,931	9 981,108	129 080,210	9 981,108	537	536
100	5 440 374,347	9 979,873	119 085,717	9 979,873	5 440 374,347	9 979,873	119 085,717	9 979,873	537	536
110	5 439 977,763	9 978,638	109 091,224	9 978,638	5 439 977,763	9 978,638	109 091,224	9 978,638	537	536
120	5 439 581,179	9 977,403	99 096,731	9 977,403	5 439 581,179	9 977,403	99 096,731	9 977,403	537	536
130	5 439 184,595	9 976,168	89 102,238	9 976,168	5 439 184,595	9 976,168	89 102,238	9 976,168	537	536
140	5 438 788,011	9 974,933	79 107,745	9 974,933	5 438 788,011	9 974,933	79 107,745	9 974,933	537	536
150	5 438 391,427	9 973,698	69 113,252	9 973,698	5 438 391,427	9 973,698	69 113,252	9 973,698	537	536
160	5 438 000,843	9 972,463	59 118,759	9 972,463	5 438 000,843	9 972,463	59 118,759	9 972,463	537	536
170	5 437 604,259	9 971,228	49 124,266	9 971,228	5 437 604,259	9 971,228	49 124,266	9 971,228	537	536

X = 5470 km

$Y_{km}$	$X'_{m}$	$\frac{\Delta X'_x}{\Delta X'_y}$	$Y'_{m}$	$\frac{\Delta X'_x}{\Delta X'_y}$	$X'_{m}$	$\frac{\Delta X'_x}{\Delta X'_y}$	$Y'_{m}$	$\frac{\Delta X'_x}{\Delta X'_y}$	a	b
60	5 471 945,012	9 994,702	157 873,873	9 994,702	5 471 945,012	9 994,702	157 873,873	9 994,702	534	536
70	5 471 547,622	9 993,467	147 879,419	9 993,467	5 471 547,622	9 993,467	147 879,419	9 993,467	534	536
80	5 471 150,232	9 992,232	137 884,966	9 992,232	5 471 150,232	9 992,232	137 884,966	9 992,232	534	536
90	5 470 752,842	9 991,000	127 890,513	9 991,000	5 470 752,842	9 991,000	127 890,513	9 991,000	534	536
100	5 470 355,452	9 989,765	117 896,060	9 989,765	5 470 355,452	9 989,765	117 896,060	9 989,765	534	536
110	5 469 958,062	9 988,530	107 901,607	9 988,530	5 469 958,062	9 988,530	107 901,607	9 988,530	534	536
120	5 469 560,672	9 987,295	97 907,154	9 987,295	5 469 560,672	9 987,295	97 907,154	9 987,295	534	536
130	5 469 163,282	9 986,060	87 912,701	9 986,060	5 469 163,282	9 986,060	87 912,701	9 986,060	534	536
140	5 468 765,892	9 984,825	77 918,248	9 984,825	5 468 765,892	9 984,825	77 918,248	9 984,825	534	536
150	5 468 368,502	9 983,590	67 923,795	9 983,590	5 468 368,502	9 983,590	67 923,795	9 983,590	534	536
160	5 467 971,112	9 982,355	57 929,342	9 982,355	5 467 971,112	9 982,355	57 929,342	9 982,355	534	536
170	5 467 573,722	9 981,120	47 934,889	9 981,120	5 467 573,722	9 981,120	47 934,889	9 981,120	534	536

X = 5450 km

$Y_{km}$	$X'_{m}$	$\frac{\Delta X'_x}{\Delta X'_y}$	$Y'_{m}$	$\frac{\Delta X'_x}{\Delta X'_y}$	$X'_{m}$	$\frac{\Delta X'_x}{\Delta X'_y}$	$Y'_{m}$	$\frac{\Delta X'_x}{\Delta X'_y}$	a	b
60	5 451 955,496	9 994,776	158 667,620	9 994,776	5 451 955,496	9 994,776	158 667,620	9 994,776	535	536
70	5 451 558,106	9 993,541	148 673,167	9 993,541	5 451 558,106	9 993,541	148 673,167	9 993,541	535	536
80	5 451 160,716	9 992,306	138 678,714	9 992,306	5 451 160,716	9 992,306	138 678,714	9 992,306	535	536
90	5 450 763,326	9 991,071	128 684,261	9 991,071	5 450 763,326	9 991,071	128 684,261	9 991,071	535	536
100	5 450 365,936	9 989,836	118 689,808	9 989,836	5 450 365,936	9 989,836	118 689,808	9 989,836	535	536
110	5 449 968,546	9 988,601	108 695,355	9 988,601	5 449 968,546	9 988,601	108 695,355	9 988,601	535	536
120	5 449 571,156	9 987,366	98 700,902	9 987,366	5 449 571,156	9 987,366	98 700,902	9 987,366	535	536
130	5 449 173,766	9 986,131	88 706,449	9 986,131	5 449 173,766	9 986,131	88 706,449	9 986,131	535	536
140	5 448 776,376	9 984,896	78 712,000	9 984,896	5 448 776,376	9 984,896	78 712,000	9 984,896	535	536
150	5 448 378,986	9 983,661	68 717,547	9 983,661	5 448 378,986	9 983,661	68 717,547	9 983,661	535	536
160	5 447 981,596	9 982,426	58 723,094	9 982,426	5 447 981,596	9 982,426	58 723,094	9 982,426	535	536
170	5 447 584,206	9 981,191	48 728,641	9 981,191	5 447 584,206	9 981,191	48 728,641	9 981,191	535	536

- d. Koeffizienten der Potenzreihen zur Berechnung der Gauß-Krügerschen aus den geographischen Koordinaten und umgekehrt für breite Meridianstreifen (Besselsches und Internationales Ellipsoid).

Nach den Formeln (31) des Teiles II ergeben sich die Gauß-Krügerschen Koordinaten aus Potenzreihen, deren allgemeine Form durch

$$x = B + A_2 L^2 + A_4 L^4 + A_6 L^6 + \dots$$

$$y = A_1 L + A_3 L^3 + A_5 L^5 + A_7 L^7 + \dots$$

gegeben ist. Hierin bedeutet neben den Gauß-Krügerschen Koordinaten  $x, y$  die Größe  $L$  den Längenunterschied des zu transformierenden Punktes zum Grundmeridian,  $B$  den Meridianbogen vom Äquator bis zur Breite des betrachteten Punktes; die Koeffizienten  $A_i$  sind Funktionen der geographischen Breite des zu transformierenden Punktes.

Für die Berechnung der geographischen aus den Gauß-Krügerschen Koordinaten gilt

$$\varphi = \varphi_1 + \bar{A}_2 y^2 + \bar{A}_4 y^4 + \bar{A}_6 y^6 + \bar{A}_8 y^8 + \dots$$

$$l = \bar{A}_1 y + \bar{A}_3 y^3 + \bar{A}_5 y^5 + \bar{A}_7 y^7 + \dots$$

Hierin ist mit  $\varphi$  die geographische Breite des zu transformierenden Punktes (Gauß-Krügersche Koordinaten  $x, y$ ) und mit  $l$  dessen Längenunterschied zum Grundmeridian des betreffenden Meridianstreifens bezeichnet. Der Wert  $\varphi_1$  ist die Fußpunktsbreite, jene Breite, die dem Endpunkt der Gauß-Krügerschen Abszisse  $x$  zukommt. Auf diese Breite sind alle Koeffizienten  $\bar{A}_i$  - es sind diese Größen ebenfalls Funktionen der geographischen Breite - bezogen.

In den nachstehenden Tafeln sind die Werte  $B, A_{1-7}$  mit Intervallen von  $0,10''$ , die Werte  $\varphi_1, \bar{A}_{1-3}$  mit Intervallen von  $10$  km für das Besselsche und für das Internationale Ellipsoid tabelliert. Die Anzahl der Glieder und deren Stellenzahl wurde so gewählt, daß bei Meridianstreifen von einer Längenausdehnung  $2L = 120''$  die Summe der vernachlässigten Glieder und ihrer Abrundungen unter der Größenordnung von  $0,001$  m liegt. Um den Umfang der Tafeln in beschränkten Grenzen zu halten, mußten die oben erwähnten relativ großen Intervalle gewählt werden; diese bedingen jedoch Interpolationen höherer als erster Ordnung, auf die in diesem Zusammenhang kurz eingegangen werden soll.

Ist  $y = f(x)$  und sind an einer beliebigen Stelle der Funktion für die mit gleichen Intervallen fortschreitenden Argumente  $x_0, x_1, x_2, x_3 \dots$  die Funktionswerte  $y_0, y_1, y_2, y_3 \dots$  tabelliert, so ergibt sich ein Funktionswert  $y$  für das Argument  $x$  im Intervall zwischen  $x_0$  und  $x_1$  aus der bekannten Interpolationsformel für gleiche Tafelintervalle (Newton) mit

$$y = y_0 + \Delta_1 n + \Delta_2 \binom{n}{2} + \Delta_3 \binom{n}{3} + \dots$$

Hierin ist  $n = \frac{x - x_0}{\Delta}$ , d.h. die Argumentdifferenz des vorgegebenen Arguments gegen den nächst niedrigeren Tafelwert in Einheiten des Tafelintervalls  $\Delta$ ;  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  sind die ersten, zweiten und dritten Tafeldifferenzen, die aus

$$\Delta_1 = y_1 - y_0, \quad \Delta_2 = y_2 - 2y_1 + y_0, \quad \Delta_3 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$

gebildet werden. Durch Auflösung der Ausdrücke  $\binom{n}{2}$  und  $\binom{n}{3}$  kann die vorstehende Interpolationsformel als eine nach Potenzen von  $n$  fortschreitende Potenzreihe angeschrieben werden, nämlich

$$y = y_0 + (\Delta_1 - \frac{\Delta_2}{2} + \frac{\Delta_3}{3})n + (\frac{\Delta_2}{2} - \frac{\Delta_3}{3})n^2 + \frac{\Delta_3}{6}n^3 + \dots$$

oder, mit einfacher Bezeichnung der Koeffizienten,

$$y = y_0 + d_1 n + d_2 n^2 + d_3 n^3 + \dots$$

Für die praktische Rechnung verwendet man diese Formel zweckmäßig in der Form

$$y = y_0 + n [d_1 + n(d_2 + nd_3)]$$

an, d.h. man multipliziert  $d_3$  mit  $n$ , bildet die Summe  $d_2 + nd_3$ , multipliziert diese Summe wieder mit  $n$ , bildet schließlich  $d_1 + n(d_2 + nd_3)$  und multipliziert auch diese Summe gleichfalls mit  $n$ .

In den Tafeln sind neben den Meridianbogenlängen  $B$  und den Fußpunktsbreiten  $\varphi_1$  die Absolutwerte der Koeffizienten  $A_i, \bar{A}_i$  und jeweils rechts in gleicher Zeile die Werte  $d_1, d_2$  und  $d_3$ , diese in Einheiten des Koeffizienten oder von dessen letzter Dezimale, angegeben. Dadurch wird eine sehr einfache Interpolation zwischen den Tafelwerten ermöglicht.

In den eingangs angegebenen Formeln ist, um die Gauß-Krügerschen Koordinaten in Metern zu erhalten, der Längenunterschied in Einheiten von  $10^4$  Sekunden alter Teilung einzuführen; berücksichtigt man noch die Vorzeichen der Koeffizienten, so gilt

$$x = B + A_2 L^2 + A_4 L^4 - A_6 L^6$$

$$y = A_1 L - A_3 L^3 - A_5 L^5 - A_7 L^7$$

Im umgekehrten Rechengang erhält man den Längenunterschied  $l$  und die Differenz  $\varphi - \varphi_1 = \Delta\varphi$  in Sekunden alter Teilung, wenn man die Ordinate  $y$  in Einheiten von  $10^6$  Metern einführt; berücksichtigt man auch hier die Vorzeichen der Koeffizienten, so ergeben sich die Gebrauchsformeln

$$\Delta\varphi = -\bar{A}_2 y^2 + \bar{A}_4 y^4 - \bar{A}_6 y^6 + \bar{A}_8 y^8$$

$$l = \bar{A}_1 y - \bar{A}_3 y^3 + \bar{A}_5 y^5 - \bar{A}_7 y^7$$

und

$$\varphi = \varphi_1 + \Delta\varphi$$

In beiden Umformungsfällen berücksichtigt man das Vorzeichen von  $l$  und  $y$  nicht, sondern man setzt nach vollendeter Rechnung mit dem Absolutwert jeweils der berechneten

Ordinate das Vorzeichen des Längenunterschiedes vor und umgekehrt.

Beispiel.

Gegeben sei ein Punkt P mit den geographischen Koordinaten  $\varphi = 47^\circ 03' 00''$ ,  $\lambda = 20^\circ$ . Zu berechnen sind die Gauß-Krügerschen Koordinaten am Besselschen Ellipsoid im Meridianstreifen  $\lambda_m = 15^\circ$ .

Es ist  $47^\circ 03' 00'' = 47,05^\circ$ ; der nächst niedrigere Eingangswert in die Tafeln (Besselsches Ellipsoid) ist  $47,0^\circ$ , daher ist für die Interpolation

$$n = \frac{1}{0,10} (47,05^\circ - 47,0^\circ) = 0,5$$

Aus den Tafeln entnimmt man für die geographische Breite  $47,05^\circ$  durch Interpolation mit  $n = 0,5$  folgende Werte

B	=	5 212 275,06746	A <sub>1</sub>	=	21 1043,8729
A <sub>2</sub>	=	3 744,53757	A <sub>3</sub>	=	5,791 283
A <sub>4</sub>	=	1,319 142	A <sub>5</sub>	=	0,030 5854
A <sub>6</sub>	=	0,000 0613	A <sub>7</sub>	=	0,000 0138

Der Längenunterschied  $\lambda - \lambda_m = 5^\circ = 18\,000$  Sekunden ist, ausgedrückt in Einheiten von  $10^4$  Sekunden, mit  $\ell = 1,8$  gegeben; es ergeben sich also mit den angegebenen Gebrauchsformeln die Gauß-Krügerschen Koordinaten aus

B	=	5 212 275,06746	A <sub>1</sub> ℓ	=	379 878,97122
+ A <sub>2</sub> ℓ <sup>2</sup>	=	+ 12 132,301 727	- A <sub>3</sub> ℓ <sup>3</sup>	=	- 33,774 762
+ A <sub>4</sub> ℓ <sup>4</sup>	=	+ 13,847 825	- A <sub>5</sub> ℓ <sup>5</sup>	=	- 0,577 932
- A <sub>6</sub> ℓ <sup>6</sup>	=	- 0,002 085	- A <sub>7</sub> ℓ <sup>7</sup>	=	- 0,000 845
<hr/>			<hr/>		
x	=	5 224 421,214 927	y	=	379 844,617 681

Um die Rechnung zu verproben, berechnen wir aus den vorstehenden Gauß-Krügerschen Koordinaten wieder die geographischen Koordinaten. Mit dem Eingangswert  $x_0 = 5\,220$  km ergibt sich  $n = 0,442\,1214\,927$  und aus den mit diesem Wert ausgeführten Interpolationen folgen die Werte

$\varphi_1$	=	47° 09' 33",36058	$\bar{A}_1$	=	47 480,568 525
$\bar{A}_2$	=	2 733,12192	$\bar{A}_3$	=	645,370 897
$\bar{A}_4$	=	47,20160	$\bar{A}_5$	=	16,638 8
$\bar{A}_6$	=	1,0270	$\bar{A}_7$	=	0,519
$\bar{A}_8$	=	0,027			

Die Ordinate  $y$ , ausgedrückt in Einheiten von  $10^6$  Metern, ist  $0,379\,8446\,17681$  mit den angegebenen Gebrauchsformeln ergeben sich die geographischen Koordinaten aus

$\varphi_1$	=	47° 09' 33",36058	+ $\bar{A}_1 y$	=	18 035",238 395
- $\bar{A}_2 y^2$	=	- 6' 34",340 115	- $\bar{A}_3 y^3$	=	- 35",369 367
+ $\bar{A}_4 y^4$	=	+ 0",982 608	+ $\bar{A}_5 y^5$	=	+ 0",131 568
- $\bar{A}_6 y^6$	=	- 0",003 084	- $\bar{A}_7 y^7$	=	- 0",000 592
+ $\bar{A}_8 y^8$	=	+ 0",000 012			
<hr/>			<hr/>		
$\varphi$	=	47° 03' 00",000 001	$\ell$	=	18 000",000 004
				=	5°00'00",000 004

Die aus der Hin- und Rückrechnung sich ergebende kleine Differenz - die Summe aus den vernachlässigten Gliedern und den Abrundungen - liegt für dieses Beispiel demnach in der Größenordnung von  $0,1$  mm.

$$x = B + A_2 l^2 + A_4 l^4 - A_6 l^6$$

φ	B	d <sub>1</sub>			A <sub>2</sub>	d <sub>2</sub>		A <sub>4</sub>	d <sub>3</sub>		A <sub>6</sub>	d <sub>4</sub>
		+	+	-		-	-		-	+		
46,0	5 095 568,45785	11 113,89320	9738	0	3751,62840	0,43541	2286	1,403091	7928	7	0,000 0042	57
1	5 106 682,44842	11 114,08794	9737	0	3751,17014	0,48112	2286	1,395156	7943	7	099	56
2	5 117 796,63372	11 114,28266	9736	0	3750,66617	0,52683	2286	1,387207	7956	7	155	56
3	5 128 911,01373	11 114,47736	9734	0	3750,11649	0,57255	2285	1,379245	7969	7	211	55
4	5 140 025,58843	11 114,67202	9735	0	3749,52110	0,61923	2285	1,371270	7982	6	266	54
5	5 151 140,35779	11 114,86670	9731	0	3748,88002	0,66395	2284	1,363282	7994	6	320	55
6	5 162 255,32179	11 115,15131	9728	0	3748,19324	0,70961	2284	1,355282	8007	6	375	53
7	5 173 370,48038	11 115,25585	9732	1	3747,46079	0,75530	2284	1,347270	8018	6	428	54
8	5 184 485,83353	11 115,45045	9727	1	3746,68266	0,80098	2283	1,339247	8029	6	482	52
9	5 195 601,38124	11 115,64497	9724	1	3745,85886	0,84663	2283	1,331213	8040	5	534	53
47,0	5 206 717,12344	11 115,83942	9723	1	3744,98941	0,89228	2282	1,323168	8050	5	0,000 0587	51
1	5 217 833,06008	11 116,03385	9722	1	3744,07431	0,93794	2281	1,315113	8060	5	638	51
2	5 228 949,19113	11 116,22826	9717	1	3743,11355	0,98354	2282	1,307048	8071	5	689	52
3	5 240 065,51655	11 116,42256	9719	1	3742,10720	1,02918	2280	1,298973	8080	4	741	50
4	5 251 182,03628	11 116,61690	9712	1	3741,05522	1,07479	2279	1,290889	8088	5	791	50
5	5 262 298,75029	11 116,81110	9712	1	3739,95764	1,12037	2280	1,282797	8097	4	841	49
6	5 273 415,65850	11 117,01031	9708	1	3738,81448	1,16597	2278	1,274696	8106	4	890	49
7	5 284 532,76088	11 117,19944	9705	1	3737,62573	1,21154	2278	1,266587	8112	4	939	48
8	5 295 650,05736	11 117,39351	9702	1	3736,39142	1,25710	2277	1,258471	8121	4	987	49
9	5 306 767,54788	11 117,58751	9700	1	3735,11156	1,30263	2276	1,250347	8128	3	0,000 1036	47
48,0	5 317 885,23238	11 117,78148	9695	1	3733,78617	1,34817	2275	1,242216	8134	3	0,000 1083	47
1	5 329 003,11080	11 117,97534	9694	1	3732,41525	1,39368	2274	1,234079	8140	3	130	47
2	5 340 121,18306	11 118,16918	9689	1	3730,99884	1,43917	2273	1,225936	8146	3	177	46
3	5 351 239,44911	11 118,36291	9687	1	3729,53694	1,48463	2273	1,217787	8153	3	223	45
4	5 362 357,90887	11 118,55660	9681	1	3728,02958	1,53010	2272	1,209632	8158	2	268	45
5	5 373 476,56227	11 118,75019	9678	1	3726,47676	1,57556	2271	1,201472	8162	2	313	45
6	5 384 595,40922	11 118,94369	9676	2	3724,87850	1,62097	2270	1,193308	8166	2	358	44
7	5 395 714,44965	11 119,13716	9670	1	3723,23483	1,66639	2269	1,185140	8170	2	402	43
8	5 406 833,68349	11 119,33051	9666	1	3721,54576	1,71177	2268	1,176968	8175	2	445	43
9	5 417 953,11064	11 119,52378	9662	2	3719,81132	1,75712	2267	1,168792	8178	1	488	43
49,0	5 429 072,73102	11 119,71699	9656	2	3718,03153	1,80248	2266	1,160613	8180	2	0,000 1531	42
1	5 440 192,54455	11 119,91005	9654	2	3716,20640	1,84779	2265	1,152432	8183	1	573	42
2	5 451 312,55112	11 120,10307	9649	2	3714,33596	1,89311	2263	1,144248	8185	1	615	41
3	5 462 432,75066	11 120,29600	9643	2	3712,42022	1,93838	2262	1,136062	8188	1	656	40
4	5 473 553,14307	11 120,48880	9639	2	3710,45922	1,98363	2261	1,127874	8189	1	696	40
5	5 484 673,72824				3708,45298			1,119685			736	

Besselsches Ell.

$$y = A_1 l - A_3 l^3 - A_5 l^5 - A_7 l^7$$

$\varphi$	$A_1$	$d_1$			$A_3$	$d_2$			$A_5$	$d_3$		$A_7$
		-	-	+		+	-	-		-	-	
46,0	21 5149,7534	387,5923	3300	2	2,809 561	0,289 916	556	1	0,030 6947	13	9	0,000 0154
1	21 4761,8313	388,2517	3295	2	3,098 920	0,288 802	559	1	0,030 6925	30	9	153
2	21 4373,2503	388,9101	3289	2	3,387 162	0,287 682	562	1	0,030 6885	48	9	152
3	21 3984,0115	389,5673	3283	2	3,674 281	0,286 554	563	1	0,030 6829	67	8	150
4	21 3595,1161	390,2233	3277	2	3,960 271	0,285 426	569	1	0,030 6754	82	9	148
5	21 3203,5653	390,8781	3272	2	4,245 127	0,284 285	570	1	0,030 6663	101	9	147
6	21 2812,3603	391,5318	3266	2	4,528 841	0,283 142	573	1	0,030 6554	118	9	145
7	21 2420,5022	392,1843	3260	2	4,811 409	0,281 994	577	1	0,030 6428	135	9	144
8	21 0279,9922	392,8356	3253	2	5,092 825	0,280 837	579	1	0,030 6285	152	9	142
9	21 1634,8315	393,4856	3248	2	5,373 082	0,279 677	584	1	0,030 6125	169	8	141
47,0	21 1241,0213	394,1345	3244	2	5,652 175	0,278 508	585	1	0,030 5948	184	9	0,000 0139
1	21 0846,5627	394,7826	3235	2	5,930 097	0,277 334	586	1	0,030 5755	202	8	138
2	21 0451,4568	395,4290	3230	2	6,206 844	0,276 159	592	1	0,030 5544	219	8	136
3	21 0055,7050	396,0744	3224	2	6,482 411	0,274 975	595	1	0,030 5317	235	9	135
4	20 9659,3084	396,7186	3219	2	6,756 790	0,273 782	595	1	0,030 5074	252	8	133
5	20 9262,2682	397,3616	3213	2	7,029 976	0,272 590	601	1	0,030 4814	268	9	132
6	20 8864,5855	398,0036	3206	2	7,301 965	0,271 387	602	1	0,030 4538	285	8	130
7	20 8466,2615	398,6443	3199	2	7,572 749	0,270 180	604	1	0,030 4245	302	8	129
8	20 8067,2975	399,2834	3196	2	7,842 324	0,268 969	607	1	0,030 3936	316	9	127
9	20 7667,6947	399,9220	3188	2	8,110 685	0,267 751	610	1	0,030 3612	334	8	126
48,0	20 7267,4541	400,5589	3183	2	8,377 826	0,266 528	612	1	0,030 3271	348	8	0,000 0124
1	20 6866,5771	401,1949	3176	2	8,643 741	0,265 302	617	1	0,030 2914	364	9	123
2	20 6465,0648	401,8294	3171	2	8,908 426	0,264 067	618	1	0,030 2542	382	7	121
3	20 6062,9185	402,4630	3164	2	9,171 874	0,262 828	620	1	0,030 2153	395	8	120
4	20 5660,1393	403,0950	3160	2	9,434 081	0,261 586	625	1	0,030 1750	411	8	118
5	20 5265,7285	403,7262	3153	2	9,695 041	0,260 335	626	1	0,030 1331	428	8	117
6	20 4852,6873	404,3560	3148	2	9,954 749	0,259 080	628	1	0,030 0896	443	7	115
7	20 4448,0168	404,9849	3140	2	10,213 200	0,257 822	632	1	0,030 0446	456	8	114
8	20 4042,7182	405,6122	3134	2	10,470 389	0,256 555	634	1	0,029 9981	473	8	112
9	20 3636,7929	406,2383	3127	2	10,726 310	0,255 286	636	1	0,029 9501	488	8	111
49,0	20 3230,2421	406,8630	3123	2	10,980 950	0,254 011	648	1	0,029 9006	503	8	0,000 0109
1	20 2823,0670	407,4869	3117	2	11,234 331	0,252 736	642	1	0,029 8496	518	8	108
2	20 2415,2686	408,1097	3110	2	11,486 421	0,251 448	645	1	0,029 7971	533	7	106
3	20 2006,8482	408,7309	3103	2	11,737 223	0,250 156	646	1	0,029 7431	547	8	105
4	20 1597,8072	409,3509	3097	2	11,986 732	0,248 862	648	1	0,029 6877	562	7	103
5	20 1188,1469				12,234 945				0,029 6308			102

Besselsches Ell.

$$\varphi = \varphi_1 - \bar{A}_2 Y^2 + \bar{A}_4 Y^4 - \bar{A}_6 Y^6 + \bar{A}_8 Y^8$$

X	$\varphi_1$	$d_1$	$d_2$	$\bar{A}_2$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$\bar{A}_4$	$d_1$	$d_2$	$\bar{A}_6$	$d_1$	$\bar{A}_8$
		+	-		+	+	+		+	+			
5 100	46 02 23,54552	323,91664	256	2628,90688	8,20701	1322	3	44,0048	2452	9	0,9152	84	0,023
110	07 47,45960	323,91152	255	2637,12714	8,23354	1331	3	44,2509	2470	10	0,9236	85	0,023
120	13 11,36857	323,90643	256	2645,37401	8,26024	1339	3	44,4988	2489	9	0,9321	86	0,024
130	18 35,27244	323,90131	255	2653,64766	8,28710	1348	3	44,7486	2506	10	0,9407	87	0,024
140	23 59,17120	323,89621	255	2661,94826	8,31414	1357	3	45,0002	2527	9	0,9494	88	0,024
150	29 23,06486	323,89112	256	2670,27599	8,34135	1366	3	45,2538	2545	10	0,9582	89	0,024
160	34 46,95341	323,88600	255	2678,63103	8,26876	1374	3	45,5092	2563	10	0,9671	90	0,025
170	40 10,83687	323,88090	255	2687,01356	8,39633	1383	3	45,7665	2583	10	0,9761	91	0,025
180	45 34,71522	323,87580	255	2695,42375	8,42408	1393	3	46,0258	2604	10	0,9852	92	0,026
190	50 58,58847	323,87072	256	2703,86178	8,45202	1402	3	46,2871	2622	10	0,9944	93	0,026
5 200	46 56 22,45663	323,86560	255	2712,32784	8,48014	1410	3	46,5503	2642	11	1,0037	94	0,026
210	47 01 46,31968	323,86051	255	2720,82211	8,50843	1420	3	46,8155	2663	10	1,0131	96	0,027
220	07 10,17764	323,85542	255	2729,34477	8,53692	1429	3	47,0828	2683	10	1,0227	97	0,027
230	12 34,03051	323,85032	255	2737,89601	8,56559	1439	3	47,3521	2702	11	1,0324	97	0,027
240	17 57,87828	323,84523	255	2746,47602	8,49446	1448	3	47,6234	2725	10	1,0421	99	0,028
250	23 21,72096	323,84012	254	2755,08499	8,62352	1457	3	47,8969	2744	11	1,0520	101	0,028
260	28 45,55854	323,83505	255	2763,72311	8,65275	1468	3	48,1724	2767	11	1,0621	101	0,028
270	34 09,39104	323,82995	254	2772,39057	8,68221	1476	4	48,4501	2787	12	1,0722	103	0,029
280	39 33,21845	323,82488	255	2781,08757	8,71182	1488	3	48,7299	2801	10	1,0825	103	0,029
290	44 57,04078	323,81979	255	2789,41430	8,74168	1495	4	49,0120	2829	12	1,0928	106	0,030
5 300	47 55 20,85802	323,81469	254	2798,57097	8,77168	1508	3	49,2961	2855	11	1,1034	106	0,030
310	55 44,67017	323,80963	255	2807,35776	8,80193	1517	3	49,5826	2874	12	1,1140	108	0,030
320	48 01 08,47725	323,80453	254	2816,17489	8,83237	1525	4	49,8712	2899	11	1,1248	109	0,031
330	06 32,27924	323,79946	254	2825,02255	8,86297	1539	3	50,1622	2921	12	1,1357	110	0,031
340	11 56,07616	323,79438	254	2833,90094	8,89385	1547	4	50,4554	2943	12	1,1467	112	0,032
350	17 19,86800	323,78931	254	2842,81029	8,92489	1558	4	50,7509	2967	12	1,1579	113	0,032
360	22 43,65477	323,78424	254	2851,75079	8,95615	1568	4	51,0488	2991	12	1,1692	114	0,033
370	28 07,43647	323,77915	253	2860,72265	8,98761	1579	4	51,3491	3014	12	1,1806	116	0,033
380	33 31,21309	323,77410	254	2869,72608	9,01928	1591	3	51,6517	3038	13	1,1922	118	0,034
390	38 54,98465	323,76902	253	2878,76130	9,05121	1599	4	51,9567	3063	13	1,2040	119	0,034
5 400	48 44 18,75114	323,76397	254	2887,82853	9,08329	1612	4	52,2642	3088	12	1,2159	120	0,035
410	49 42,51257	323,75889	253	2896,92797	9,11563	1622	4	52,5742	3111	13	1,2279	122	0,035
420	55 06,26893	323,75384	253	2906,05986	9,14818	1633	4	52,8866	3138	13	1,2401	123	0,036
430	49 00 30,02024	323,74878	253	2915,22440	9,18094	1645	4	53,2016	3162	13	1,2524	125	0,036
440	05 53,76649	323,74373	253	2924,42182	9,21395	1654	4	53,5191	3188	13	1,2649	126	0,037
450	11 17,50769	323,73866	252	2933,65235	9,24714	1669	3	53,8392	3214	14	1,2775	129	0,037
460	16 41,24383	323,73363	253	2942,91621	9,28063	1677	4	54,1619	3242	13	1,2904	129	0,038
470	22 04,97493	323,72856	252	2952,21365	9,31429	1690	4	54,4873	3265	14	1,3033	132	0,038
480	27 28,70097	323,72354	253	2961,54487	9,34818	1703	4	54,8152	3293	14	1,3165	133	0,039
490	49 32 52,42198			2970,91012				55,1459			1,3298		0,039

$$l = \bar{A}_1 y - \bar{A}_3 y^3 + \bar{A}_5 y^5 - \bar{A}_7 y^7$$

X	$\bar{A}_1$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$\bar{A}_3$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$\bar{A}_5$	$d_1$	$d_2$	$\bar{A}_7$	$d_1$
		+	+	+		+	+	+		+	+		+
5 100	46 512,67642	75,49938	17971	36	599,06212	3,53190	1457	7	14,6389	1487	9	0,434	6
110	588,35586	75,85990	18074	37	602,60865	3,56117	1486	4	14,7885	1504	10	0,440	6
120	644,39687	76,22247	18186	36	606,18471	3,59104	1490	6	14,9399	1525	9	0,446	7
130	740,80157	76,58729	18294	36	609,79070	3,62099	1510	5	15,0933	1542	10	0,453	6
140	817,57216	76,95428	18400	38	613,42684	3,65134	1527	5	15,2485	1563	10	0,459	7
150	894,71081	77,32339	18513	37	617,09349	3,68204	1537	6	15,4057	1581	10	0,466	7
160	972,21970	77,69476	18625	37	620,79096	3,71297	1555	7	15,5648	1601	10	0,473	7
170	47 050,10108	78,06839	18735	38	624,51954	3,74420	1583	4	15,7259	1621	11	0,480	7
180	128,35719	78,44423	18845	39	628,27960	3,77591	1586	6	15,8890	1642	10	0,487	7
190	206,99026	78,82227	18965	38	632,07143	3,80779	1608	5	16,0542	1661	11	0,494	7
5 200	47 286,00256	79,20275	19071	40	635,89535	3,84012	1621	6	16,2214	1684	11	0,501	7
210	365,39642	79,58534	19206	38	639,75173	3,87270	1639	6	16,3908	1705	11	0,508	8
220	445,17410	79,97044	19306	40	643,64088	3,90565	1658	6	16,5623	1725	12	0,516	7
230	525,33800	80,35775	19428	40	647,56316	3,93899	1671	7	16,7359	1748	11	0,523	8
240	605,89042	80,74751	19542	41	651,51892	3,97258	1693	6	16,9118	1770	11	0,531	8
250	686,83376	81,13956	19667	40	655,50849	4,00662	1710	6	17,0899	1791	12	0,539	8
260	768,17039	81,53330	19784	41	659,53226	4,04099	1726	6	17,2702	1816	12	0,547	8
270	849,90276	81,93102	19909	41	663,59057	4,07570	1744	7	17,4529	1839	12	0,555	9
280	932,03328	82,33044	20030	41	667,68377	4,11076	1765	6	17,6379	1861	13	0,564	8
290	48 014,56443	82,73231	20150	43	671,81224	4,14625	1782	7	17,8252	1886	12	0,572	9
5 300	48 097,49866	83,13489	20281	42	675,97637	4,18207	1803	6	18,0150	1910	13	0,581	8
310	180,83845	83,54345	20405	43	680,17653	4,21832	1821	6	18,2072	1933	12	0,589	9
320	264,58637	83,95285	20529	44	684,41312	4,25494	1838	7	18,4019	1958	14	0,598	9
330	348,74494	84,36471	20664	43	688,68651	4,29189	1862	6	18,5990	1986	13	0,607	9
340	433,31671	84,77929	20787	44	692,99708	4,32934	1877	8	18,7988	2010	14	0,616	10
350	518,30431	85,19636	20919	43	697,34526	4,36707	1904	6	19,0011	2037	13	0,626	9
360	603,71030	85,61606	21053	44	701,73143	4,40537	1917	8	19,2061	2062	14	0,635	10
370	689,53733	86,03847	21180	46	706,15604	4,44390	1945	6	19,4137	2091	14	0,645	10
380	775,78806	86,46344	21319	45	710,61945	4,48301	1959	8	19,6241	2117	14	0,655	10
390	862,46514	86,89117	21456	45	715,12213	4,52241	1985	7	19,8372	2145	14	0,665	10
5 400	48 949,57132	87,32166	21588	46	719,66446	4,56232	2006	7	20,0531	2173	15	0,675	10
410	49 037,10932	87,75483	21723	47	724,24691	4,60265	2028	7	20,2718	2201	15	0,685	11
420	125,08195	88,19071	21865	47	728,86991	4,64343	2049	8	20,4934	2232	15	0,696	10
430	213,49168	88,62940	22012	46	733,53390	4,68463	2072	8	20,7180	2260	15	0,706	11
440	302,34165	89,07108	22137	50	738,23932	4,72630	2093	8	20,9455	2290	16	0,717	11
450	391,63460	89,51526	22295	47	742,98663	4,76840	2117	8	21,1760	2321	16	0,728	12
460	481,37328	89,96262	22428	50	747,77628	4,81096	2145	7	21,4096	2352	16	0,740	11
470	571,56068	90,41266	22579	49	752,60876	4,85409	2164	8	21,6463	2382	17	0,751	12
480	662,19962	90,86573	22723	50	757,48456	4,89759	2187	8	21,8861	2415	16	0,763	12
490	49 753,29308				762,40410				22,1292			0,775	



$$x = B + A_2 l^2 + A_4 l^4 - A_6 l^6$$

$\varphi$	B	d <sub>1</sub>			A <sub>2</sub>	d <sub>2</sub>		A <sub>4</sub>	d <sub>4</sub>		A <sub>6</sub>	d <sub>6</sub>
		+	+	-		-	-		-	+		
46,0	5 096 182,30138	11 115,49760	9811	1	3752,25834	0,43532	2286	1,403401	7929	8	0,000 0042	57
1	5 107 297,89708	11 115,69380	9809	0	3751,80016	0,48104	2286	1,395465	7945	7	099	56
2	5 118 413,68896	11 115,88996	9808	0	3751,29626	0,52677	2285	1,387514	7958	7	155	56
3	5 129 529,67699	11 116,08609	9808	1	3750,74664	0,57247	2286	1,379550	7971	7	211	55
4	5 140 645,86115	11 116,28223	9805	1	3750,15132	0,61818	2286	1,371573	7984	6	266	54
5	5 151 762,24142	11 116,47831	9804	1	3749,51029	0,66391	2284	1,363583	7997	6	320	55
6	5 162 878,81776	11 116,67437	9802	1	3748,82355	0,70957	2285	1,355581	8007	6	375	55
7	5 173 995,59014	11 116,87038	9802	1	3748,09114	0,75526	2285	1,347568	8020	6	428	54
8	5 185 112,55853	11 117,06639	9799	1	3747,31304	0,80097	2282	1,339543	8031	5	482	52
9	5 196 229,72290	11 117,26234	9797	1	3746,48925	0,84660	2284	1,331507	8041	6	534	53
47,0	5 207 347,08320	11 117,45825	9795	1	3745,61982	0,89227	2283	1,323461	8052	5	0,000 0587	51
1	5 218 464,63939	11 117,65412	9793	1	3744,70472	0,93796	2280	1,315404	8062	5	638	51
2	5 229 582,39143	11 117,84995	9791	1	3743,74396	0,98354	2282	1,307337	8073	5	689	52
3	5 240 700,33928	11 118,04575	9787	1	3742,73760	1,02920	2281	1,299260	8082	4	741	50
4	5 251 818,48289	11 118,24146	9787	1	3741,68560	1,07482	2279	1,291174	8090	5	791	50
5	5 262 936,82220	11 118,43716	9782	1	3740,68799	1,12039	2280	1,283080	8100	4	841	49
6	5 274 055,35717	11 118,63276	9782	1	3739,64480	1,16600	2279	1,274977	8106	4	890	49
7	5 285 174,08773	11 118,82836	9776	1	3738,5601	1,21159	2278	1,266867	8114	4	939	49
8	5 296 293,01384	11 119,02384	9776	2	3737,42164	1,25714	2278	1,258749	8123	4	988	49
9	5 307 412,13542	11 119,21933	9769	1	3735,74173	1,30270	2277	1,250623	8130	3	0,000 1037	47
48,0	5 318 531,45243	11 119,41467	9770	2	3734,41627	1,34824	2275	1,242490	8136	3	0,000 1084	47
1	5 329 650,96478	11 119,61003	9764	1	3733,04528	1,39374	2275	1,234351	8142	3	131	47
2	5 340 770,67243	11 119,80526	9762	1	3731,62879	1,43926	2274	1,226206	8148	3	178	46
3	5 351 890,57529	11 120,00045	9758	1	3730,16680	1,48473	2273	1,218055	8155	2	224	45
4	5 363 010,67330	11 120,19556	9754	1	3728,65934	1,53019	2273	1,209898	8159	3	269	45
5	5 374 130,96638	11 120,39059	9749	1	3727,10642	1,57568	2271	1,201737	8164	2	314	45
6	5 385 251,45445	11 120,58553	9747	2	3725,50804	1,62109	2271	1,193571	8168	2	359	44
7	5 396 372,13743	11 120,78042	9742	1	3723,86425	1,66651	2269	1,185401	8173	2	403	43
8	5 407 493,01325	11 120,97520	9739	2	3722,27505	1,71191	2268	1,177227	8175	2	446	43
9	5 418 614,08782	11 121,16993	9733	2	3720,44047	1,75726	2268	1,169050	8180	1	489	43
49,0	5 429 735,35506	11 121,36454	9729	2	3718,66054	1,80262	2266	1,160869	8182	2	0,000 1532	42
1	5 440 856,81687	11 121,55907	9724	2	3716,83526	1,84795	2266	1,152686	8185	1	574	42
2	5 451 978,47316	11 121,75350	9720	2	3714,96466	1,89328	2264	1,144500	8187	1	616	41
3	5 463 100,32384	11 121,94784	9716	2	3713,04875	1,93856	2262	1,136312	8190	1	657	40
4	5 474 222,36882	11 122,14210	9710	2	3711,08757	1,98382	2261	1,128122	8191	1	697	40
5	5 485 344,60800				3709,08115			1,119931			0,000 1637	

$$y = A_1 l - A_3 l^3 - A_5 l^5 - A_7 l^7$$

$\varphi$	$A_1$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$A_3$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$A_5$	$d_1$	$d_2$	$A_7$
		-	-	+		+	-	-		-	-	
46,0	215 185,8791	387,6485	3299	2	2,809 072	0,289 973	556	1	0,030 7025	14	9	0,000 0154
1	214 797,9009	388,3077	3296	2	3,098 488	0,288 858	559	1	0,030 7003	30	9	153
2	214 409,2638	388,9663	3291	2	3,386 787	0,287 739	562	1	0,030 6964	48	9	152
3	214 019,9687	389,6238	3283	2	3,673 963	0,286 613	565	1	0,030 6907	67	9	150
4	213 630,0168	390,2798	3278	2	3,960 010	0,285 481	568	1	0,030 6832	84	9	148
5	213 239,4094	390,9348	3272	2	4,244 922	0,284 343	571	1	0,030 6740	101	9	147
6	212 848,1476	391,5886	3266	2	4,528 693	0,283 198	573	1	0,030 6631	118	9	145
7	212 456,2326	392,2413	3259	2	4,811 317	0,282 050	577	1	0,030 6505	135	9	144
8	212 063,6656	392,8925	3256	2	5,092 789	0,280 894	580	1	0,030 6362	152	9	142
9	211 670,4478	393,5430	3249	2	5,373 102	0,279 732	584	1	0,030 6202	169	8	141
47,0	211 276,5802	394,1921	3242	2	5,652 250	0,278 563	585	1	0,030 6025	184	9	0,000 0139
1	210 882,0641	394,8399	3237	2	5,930 227	0,277 389	586	1	0,030 5832	203	9	138
2	210 486,9007	395,4867	3232	2	6,207 029	0,276 214	591	1	0,030 5621	221	8	136
3	210 091,0911	396,1324	3224	2	6,482 651	0,275 030	595	1	0,030 5393	235	9	135
4	209 694,6365	396,7765	3219	2	6,757 085	0,273 837	597	1	0,030 5150	252	8	133
5	209 297,5383	397,4197	3214	2	7,030 325	0,272 641	598	1	0,030 4890	268	9	132
6	208 899,7974	398,0618	3207	2	7,302 367	0,271 442	603	1	0,030 4614	285	8	130
7	208 501,4151	398,7026	3201	2	7,573 206	0,270 235	605	1	0,030 4321	301	8	129
8	208 102,3926	399,3422	3195	2	7,842 835	0,269 022	607	1	0,030 4012	317	8	127
9	207 702,7311	399,9806	3189	2	8,111 249	0,267 806	611	1	0,030 3687	333	8	126
48,0	207 302,4318	400,6178	3182	2	8,378 443	0,266 581	612	1	0,030 3346	350	8	0,000 0124
1	206 901,4959	401,2537	3178	2	8,644 411	0,265 355	616	1	0,030 2989	364	9	123
2	206 499,9246	401,8888	3170	2	8,909 149	0,264 122	620	1	0,030 2617	382	8	121
3	206 097,7190	402,5222	3166	2	9,172 650	0,262 879	620	1	0,030 2228	397	8	120
4	205 694,8805	403,1547	3158	2	9,434 908	0,261 636	624	1	0,030 1824	411	8	118
5	205 291,4102	403,7856	3154	2	9,695 920	0,260 387	626	1	0,030 1405	428	8	117
6	204 887,3094	404,4157	3148	2	9,955 680	0,259 133	629	1	0,030 0970	443	8	115
7	204 482,5791	405,0448	3139	2	10,214 183	0,257 872	632	1	0,030 0520	458	8	114
8	204 077,2206	405,6719	3136	2	10,471 423	0,256 606	633	1	0,030 0055	472	8	112
9	203 671,2353	406,2966	3127	2	10,727 395	0,255 338	637	1	0,029 9575	489	7	111
49,0	203 264,6242	406,9234	3124	2	10,982 095	0,254 061	638	1	0,029 9079	503	8	0,000 0109
1	202 857,3887	407,5474	3117	2	11,235 517	0,252 782	642	1	0,029 8569	518	8	108
2	202 449,5298	408,1702	3111	2	11,487 657	0,251 496	643	1	0,029 8044	533	7	106
3	202 041,0488	408,7916	3105	2	11,738 509	0,250 207	646	1	0,029 7504	546	8	105
4	201 631,9470	409,4118	3098	2	11,988 069	0,248 912	649	1	0,029 6950	563	7	103
5	201 222,2257				12,236 331				0,029 6380			102

$$\varphi = \varphi_1 - \bar{A}_2 Y^2 + \bar{A}_4 Y^4 - \bar{A}_6 Y^6 + \bar{A}_8 Y^8$$

X	$\varphi_1$	$\bar{A}_2$		$\bar{A}_4$			$\bar{A}_6$	$\bar{A}_8$					
		$d_1$ +	$d_2$ -	$d_1$ +	$d_2$ +	$d_3$ +		$d_1$ +	$d_2$ +				
5 100	46 02 03,644247	323,870177	2571	2627,58196	8,20124	1321	3	43,9601	2449	9	0,9138	83	0,023
110	07 27,511853	323,865035	2571	2635,79643	8,10804	1329	3	44,2059	2467	9	0,9221	85	0,023
120	12 51,374317	323,859894	2571	2644,03748	8,25439	1338	3	44,4535	2484	10	0,9306	86	0,023
130	18 15,231640	323,854750	2569	2652,30528	8,27124	1347	3	44,7029	2506	9	0,9392	87	0,024
140	23 39,083821	323,849614	2570	2660,60001	8,30826	1354	3	44,9543	2521	10	0,9479	88	0,024
150	29 02,930865	323,844470	2569	2668,92184	8,33543	1365	3	45,2074	2542	10	0,9567	88	0,024
160	34 26,772770	323,839336	2569	2677,27094	8,36281	1373	3	45,4625	2560	10	0,9655	90	0,025
170	39 50,609537	323,834197	2567	2685,64750	8,39035	1382	3	45,7195	2581	10	0,9745	91	0,025
180	45 14,441167	323,829064	2568	2694,05169	8,41807	1390	3	45,9785	2600	10	0,9836	92	0,025
190	50 38,267663	323,823926	2566	2702,48369	8,44596	1400	3	46,2394	2618	11	0,9928	93	0,026
5 200	46 56 02,089023	323,818794	2566	2710,94368	8,47405	1409	3	46,5022	2639	10	1,0021	94	0,026
210	47 01 25,905251	323,813662	2566	2719,43185	8,50232	1418	3	46,7671	2659	10	1,0115	95	0,026
220	06 49,716347	323,808530	2565	2727,94838	8,53077	1428	3	47,0340	2679	11	1,0210	97	0,027
230	12 13,522312	323,803401	2565	2736,49346	8,55942	1437	3	47,3029	2700	11	1,0307	98	0,027
240	17 37,323148	323,798270	2563	2745,06728	8,58826	1445	4	47,5739	2721	11	1,0405	98	0,028
250	23 01,118855	323,793145	2563	2753,67002	8,61725	1457	3	47,8470	2742	11	1,0503	100	0,028
260	28 24,909437	323,788020	2564	2762,30187	8,64649	1465	4	48,1222	2763	11	1,0603	101	0,028
270	33 48,694893	323,782887	2559	2770,96304	8,67588	1477	3	48,3995	2783	12	1,0704	103	0,029
280	39 12,475226	323,777772	2561	2779,65371	8,70550	1485	3	48,6789	2807	11	1,0807	104	0,029
290	44 36,250437	323,772649	2559	2788,37409	8,73529	1496	3	48,9606	2827	11	1,0911	104	0,030
5 300	47 50 00,020527	323,767531	2559	2797,12436	8,76529	1504	4	49,2444	2849	12	1,1015	107	0,030
310	55 23,785499	323,762413	2558	2805,90472	8,79546	1516	3	49,5304	2872	10	1,1122	107	0,030
320	48 00 47,545354	323,757297	2557	2814,71537	8,82588	1525	4	49,8187	2894	12	1,1229	109	0,031
330	06 11,300094	323,752183	2556	2823,55653	8,85648	1535	4	50,1092	2916	12	1,1338	110	0,031
340	11 35,049721	323,747079	2555	2832,42839	8,88728	1546	4	50,4020	2941	11	1,1448	112	0,032
350	16 58,794236	323,741960	2554	2841,33116	8,91829	1557	3	50,6972	2962	13	1,1560	112	0,032
360	22 22,533642	323,736851	2553	2850,26505	8,94954	1564	4	50,9946	2988	12	1,1672	115	0,032
370	27 46,267940	323,731745	2552	2859,23027	8,98092	1580	3	51,2945	3010	12	1,1787	115	0,033
380	33 09,997133	323,726640	2551	2868,22701	9,01262	1586	4	51,5967	3034	13	1,1902	118	0,034
390	38 33,721222	323,721538	2550	2877,25552	9,04444	1599	4	51,9013	3059	12	1,2020	118	0,034
5 400	48 43 57,440210	323,716438	2549	2886,31598	9,07652	1609	4	52,2084	3083	13	1,2138	120	0,034
410	49 21,154099	323,711339	2547	2895,40863	9,10882	1620	4	52,5179	3108	13	1,2258	122	0,035
420	54 44,862891	323,706245	2547	2904,53368	9,14132	1632	4	52,8299	3132	13	1,2380	123	0,035
430	49 00 08,566589	323,701150	2545	2913,69135	9,17407	1641	4	53,1444	3158	13	1,2503	125	0,036
440	05 32,265194	323,696061	2545	2922,88187	9,20700	1654	4	53,4615	3185	13	1,2628	126	0,037
450	10 55,958710	323,690969	2542	2932,10545	9,24020	1665	4	53,7812	3209	14	1,2754	128	0,037
460	16 19,647137	323,685886	2542	2941,36233	9,27361	1676	4	54,1034	3236	13	1,2882	129	0,038
470	21 43,330481	323,680800	2540	2950,65273	9,30724	1688	4	54,4283	3262	14	1,3011	131	0,038
480	27 07,008741	323,675721	2541	2959,97688	9,34106	1704	4	54,7558	3289	14	1,3142	133	0,039
490	49 32 30,681921			2969,33502				55,0860			1,3275		0,039

$$\lambda = \bar{A}_1 Y - \bar{A}_3 Y^3 + \bar{A}_5 Y^5 - \bar{A}_7 Y^7$$

X	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_3$			$\bar{A}_5$			$\bar{A}_7$					
		$d_1$ +	$d_2$ +	$d_3$ +	$d_1$ +	$d_2$ +	$d_3$ +	$d_1$ +	$d_2$ +	$d_3$ +			
5 100	46 500,22993	75,45193	17958	35	598,54808	3,52767	1461	5	14,6176	1483	11	0,433	6
110	575,86179	75,81218	18059	37	602,09041	3,55684	1477	5	14,7669	1506	8	0,439	6
120	651,85492	76,17446	18167	37	605,66227	3,58673	1492	5	14,9181	1520	10	0,445	7
130	728,21142	76,53888	18283	35	609,26397	3,61673	1506	6	15,0711	1541	10	0,452	6
140	804,93348	76,90565	18382	38	612,89581	3,64699	1526	5	15,2261	1560	10	0,458	7
150	882,02332	77,27439	18499	37	616,55810	3,67766	1535	6	15,3830	1578	10	0,465	7
160	959,48306	77,64549	18605	38	620,25117	3,70851	1557	5	15,5418	1598	11	0,472	7
170	47 037,31497	78,01874	18720	34	623,97530	3,73981	1569	6	15,7026	1620	10	0,479	7
180	115,52125	78,39425	18830	39	627,73086	3,77136	1587	6	15,8655	1637	11	0,486	7
190	194,10418	78,77200	18945	39	631,51814	3,80326	1602	6	16,0303	1660	10	0,493	7
5 200	47 273,06601	79,15205	19061	39	635,33748	3,83547	1621	6	16,1973	1679	11	0,500	7
210	352,40905	79,53445	19171	40	639,18921	3,86806	1636	6	16,3663	1701	11	0,507	8
220	432,13561	79,91903	19298	38	643,07368	3,90094	1654	6	16,5375	1724	11	0,515	7
230	512,24800	80,30617	19406	40	646,99122	3,93419	1671	6	16,7109	1744	12	0,522	8
240	592,74863	80,69552	19523	41	650,94219	3,96783	1686	7	16,8864	1767	11	0,530	8
250	673,63979	81,08719	19652	40	654,92694	4,00173	1708	6	17,0642	1789	12	0,538	8
260	754,92389	81,48143	19767	41	658,94580	4,03606	1724	6	17,2442	1811	12	0,546	8
270	836,60340	81,87801	19888	42	662,99916	4,07073	1742	6	17,4265	1836	12	0,554	8
280	918,68070	82,27699	20014	41	667,08737	4,10575	1762	6	17,6112	1858	12	0,562	9
290	48 001,15824	82,67851	20136	42	671,21080	4,14118	1779	7	17,7982	1882	13	0,571	8
5 300	48 084,03853	83,08251	20258	43	675,36983	4,17694	1800	6	17,9876	1907	12	0,579	9
310	167,32404	83,48893	20388	42	679,56483	4,21312	1819	6	18,1795	1931	13	0,588	9
320	251,01727	83,89798	20510	44	683,79620	4,24970	1836	7	18,3738	1955	13	0,597	9
330	335,12079	84,30947	20646	42	688,06432	4,28660	1859	6	18,5706	1982	13	0,606	9
340	419,63714	84,72371	20766	45	692,36957	4,32398	1875	7	18,7700	2006	14	0,615	9
350	504,56895	85,14032	20906	43	696,71237	4,36167	1900	6	18,9719	2033	14	0,624	10
360	589,91876	85,55979	21025	46	701,09310	4,39988	1915	8	19,1765	2060	13	0,634	9
370	675,68926	85,98163	21170	44	705,51220	4,43838	1941	7	19,3838	2085	15	0,643	10
380	761,88302	86,40638	21294	46	709,97005	4,47741	1956	8	19,5937	2115	13	0,653	10
390	848,50280	86,83362	21436	45	714,46711	4,51678	1981	7	19,8065	2139	16	0,663	10
5 400	48 935,55123	87,26372	21568	46	719,00377	4,55662	2002	7	20,0219	2168	17	0,673	11
410	49 023,03109	87,69647	21706	47	723,58048	4,69688	2024	8	20,2404	2196	15	0,684	10
420	110,94509	88,13202	21843	48	728,19767	4,63758	2046	8	20,4615	2227	15	0,694	11
430	199,29601	88,57028	21989	47	732,85578	4,67870	2071	7	20,6856	2255	16	0,705	11
440	288,08664	89,01050	22221	49	737,55526	4,72039	2082	10	20,9126	2286	16	0,716	11
450	377,31983	89,45534	22274	47	742,29657	4,76225	2125	6	21,1427	2317	15	0,727	11
460	466,99837	89,90227	22407	50	747,08011	4,80497	2134	9	21,3759	2346	16	0,738	12
470	557,12520	90,35185	22562	48	751,90650	4,84790	2160	8	21,6121	2378	16	0,750	11
480	647,70314	90,80403	22752	48	756,77608	4,89134	2185	9	21,8515	2409	17	0,761	12
490	49 738,73517				761,68936				22,0941			0,773	

- e. Koeffizienten der Potenzreihen zur Berechnung der Meridiankonvergenz und des Abbildungsmaßstabes aus geographischen und Gauß-Krügerschen Koordinaten (Besselsches und Internationales Ellipsoid).

Die Meridiankonvergenz und der Abbildungsmaßstab der Gauß-Krügerschen Abbildung kann (nach II., (54) und (56)) aus Potenzreihen der Form

$$y = C_1 l + C_3 l^3 + C_5 l^5 + \dots$$

und

$$y = \bar{C}_1 y + \bar{C}_3 y^3 + \bar{C}_5 y^5 + \dots$$

$$m = 1 + M_2 l^2 + M_4 l^4 + \dots$$

$$m = 1 + \bar{M}_2 y^2 + \bar{M}_4 y^4 + \dots$$

aus den geographischen und den Gauß-Krügerschen Koordinaten berechnet werden.

In diesen Formeln bedeutet  $y$  die Meridiankonvergenz,  $m$  den Abbildungsmaßstab (Dichte der Gauß-Krügerschen Koordinatenlinien am Ellipsoid),  $l$  den Längenunterschied zum Grundmeridian und  $y$  die Gauß-Krügersche Ordinate. Das Vorzeichen des Längenunterschiedes (d.h. auch das der Ordinate) stimmt stets überein mit dem der Meridiankonvergenz; die Größe  $m$  ist stets positiv und für Punkte außerhalb des Grundmeridians größer als eins.

Die Koeffizienten  $C_1$ ,  $\bar{C}_1$  und  $M_1$ ,  $\bar{M}_1$  der angeschriebenen Potenzreihen sind Funktionen der geographischen Breite. Die Koeffizienten  $C_1$ ,  $M_1$  sind für die geographische Breite des Punktes zu nehmen, in dem aus den geographischen Koordinaten die Meridiankonvergenz und der Abbildungsmaßstab bestimmt werden soll; die quergestrichelten Koeffizienten  $\bar{C}_1$ ,  $\bar{M}_1$  der Potenzreihen zur Berechnung der Meridiankonvergenz und des Abbildungsmaßstabes aus den Gauß-Krügerschen Koordinaten sind hingegen für die Fußpunktsbreite des betrachteten Punktes zu nehmen, also für jene Breite, die dem Endpunkt der Abszisse  $x$  am Grundmeridian zukommt.

In den nachfolgenden Tafeln sind die Koeffizienten  $C_1$ ,  $M_1$  für geographische Breiten von  $\varphi = 46,0^\circ$  bis  $\varphi = 49,5^\circ$  mit Intervallen von  $0,1^\circ$  tabelliert; die Koeffizienten  $\bar{C}_1$ ,  $\bar{M}_1$  sind für jene Fußpunktsbreiten tabelliert, die den Abszissen von 5 100 km bis 5 490 km mit Intervallen von zehn Kilometern entsprechen. Der Interpolationsvorgang wurde in der Beschreibung der vorangegangenen Tafeln (S.179) erläutert und ist hier ebenso auszuführen; die Angabe eines Rechenbeispiels dürfte sich daher erübrigen.

Zur Berechnung der Meridiankonvergenz und des Abbildungsmaßstabes ist der Längenunterschied  $l$  zum Grundmeridian in Einheiten von  $10^5$  Sekunden, die Gauß-Krügersche Ordinate  $y$  in Einheiten von  $10^6$  Metern einzuführen; die Meridiankonvergenz ergibt sich in Sekunden.

Hinsichtlich der erreichbaren Genauigkeit in der Meridiankonvergenz und im Abbildungsmaßstab sei noch erwähnt, daß die nach Potenzen des Längenunterschiedes fortschreitenden Potenzreihen zur Berechnung dieser Größen etwas rascher konvergieren als die nach Potenzen der Gauß-Krügerschen Ordinate fortschreitenden Potenzreihen. Bei einem Längenunterschied von  $l = +6^\circ$  zum Grundmeridian wird beispielsweise die Meridiankonvergenz mit einer Unsicherheit von etwa einer Einheit der 4. Dezimalstelle der Sekunde, der Abbildungsmaßstab mit einer Unsicherheit von etwa zwei Einheiten der zehnten Dezimale erhalten, wenn diese Werte aus den erstgenannten Potenzreihen berechnet werden; bei der Berechnung aus den entsprechenden Gauß-Krügerschen Koordinaten sind Unsicherheiten vom etwa zehnfachen Betrag zu erwarten. Diese Unsicherheiten sinken mit dem Längenunterschied sehr rasch ab; wird die Meridiankonvergenz und der Abbildungsmaßstab im Bereich eines Meridianstreifens mit einer Längenausdehnung von drei Graden berechnet, so kann für beide Berechnungsfälle die fünfte Dezimale der Sekunde in der Meridiankonvergenz und die zehnte Dezimale im Abbildungsmaßstab als absolut sicher angesehen werden.

$$\gamma = C_1 l + C_3 l^3 + C_5 l^5$$

$$m = 1 + M_2 l^2 \pm M_4 l^4$$

$\varphi$	$C_1$	$C_3$			$C_5$			$M_2$			$M_4$									
		$d_1$ +	$d_2$ -	$d_3$ -	$d_1$ -	$d_2$ -	$d_3$ -	$d_1$ -	$d_2$ +	$d_3$ -	$d_1$ -	$d_2$ -	$d_3$ -							
46,0	7193,39799	12,12408	1096	1	2,746112	5396	20	0,000	5723	78	0,000	5689	4220	20	6319	15	0,000	0000	3531	188
1	7205,51111	12,10216	1098	1	2,740697	5435	20		5645	77		5668	7916	20	6294	20			3343	187
2	7217,60228	12,08017	1099	1	2,735243	5473	21		5568	78		5648	1642	20	6252	18			3156	185
3	7229,67146	12,05819	1103	0	2,729750	5515	20		5490	77		5627	5408	20	6319	20			2971	185
4	7241,71862	12,03612	1103	1	2,724216	5554	20		5413	77		5606	9209	20	6181	22			2786	183
5	7253,74371	12,01405	1105	1	2,718643	5593	19		5336	77		5586	3050	20	6139	23			2603	181
6	7265,74671	11,99194	1107	1	2,713031	5630	20		5259	77		5565	6934	20	6095	24			2422	180
7	7277,72758	11,96980	1109	1	2,707381	5671	19		5182	76		5545	0863	20	6049	25			2242	179
8	7289,68628	11,94760	1110	1	2,701691	5709	20		5106	76		5524	4839	20	6001	27			2063	178
9	7301,62277	11,92538	1112	1	2,695963	5749	19		5030	76		5503	8865	20	5949	28			1885	176
47,0	7313,53702	11,90312	1115	1	2,690196	5785	20	0,000	4954	76	0,000	5483	2944	20	5897	31	0,000	0000	1709	175
1	7325,42899	11,88082	1116	1	2,684392	5824	19		4878	76		5462	7078	20	5833	28			1534	173
2	7337,29864	11,85848	1117	1	2,678549	5863	18		4802	75		5442	1273	20	5779	30			1361	172
3	7349,14594	11,83612	1120	1	2,672668	5898	19		4727	75		5421	5524	20	5725	35			1189	171
4	7360,97086	11,81371	1120	1	2,666751	5937	19		4652	75		5400	9834	20	5655	34			1018	170
5	7372,77336	11,79130	1125	0	2,660796	5974	19		4577	75		5380	4213	20	5588	35			0848	168
6	7384,55341	11,76880	1125	1	2,654804	6011	18		4502	74		5359	8660	20	5519	36			0680	167
7	7396,31095	11,74627	1126	1	2,648775	6048	18		4428	74		5339	3177	20	5448	37			0513	166
8	7408,04596	11,72375	1130	0	2,642710	6081	19		4354	74		5318	7766	20	5378	41			0347	164
9	7419,75841	11,70114	1130	1	2,636610	6120	18		4280	74		5298	2429	20	5295	39			0183	163
48,0	7431,44825	11,67853	1132	1	2,630472	6157	18	0,000	4206	74	0,000	5277	7173	20	5221	42	0,000	0000	0020	161
1	7443,11546	11,65588	1134	1	2,624298	6192	18		4132	73		5257	1994	20	5139	43			- 0141	161
2	7454,76000	11,63320	1136	1	2,618089	6226	18		4059	73		5236	6898	20	5056	45			- 0302	159
3	7466,38183	11,61046	1138	1	2,611845	6263	18		3986	72		5216	1887	20	4966	44			- 0461	157
4	7477,98091	11,58769	1138	1	2,605565	6298	17		3914	72		5195	6965	20	4881	47			- 0618	156
5	7489,55721	11,56491	1142	0	2,599250	6332	18		3842	72		5175	2131	20	4787	47			- 0774	155
6	7501,11070	11,54206	1143	1	2,592901	6367	17		3770	72		5154	7391	20	4695	49			- 0929	154
7	7512,64133	11,51919	1143	1	2,586517	6401	17		3698	72		5134	2745	20	4598	50			- 1083	152
8	7524,14908	11,49631	1147	1	2,580099	6435	17		3626	71		5113	8197	20	4500	52			- 1235	151
9	7535,63392	11,47337	1148	1	2,573647	6470	17		3555	71		5093	3749	20	4397	52			- 1386	149
49,0	7547,09580	11,45039	1149	1	2,567161	6502	17	0,000	3484	70	0,000	5072	9404	20	4295	54	0,000	0000	1535	149
1	7558,53469	11,42739	1151	1	2,560642	6537	17		3414	71		5052	5163	20	4188	55			- 1684	147
2	7569,95056	11,40435	1153	1	2,554089	6570	17		3343	70		5032	1030	20	4081	57			- 1831	145
3	7581,34337	11,38127	1155	1	2,547503	6604	16		3273	69		5011	7006	20	3969	58			- 1976	144
4	7592,71308	11,35815	1157	1	2,540884	6635	16		3204	69		4991	3095	20	3855	59			- 2120	143
5	7604,05965				2,534234				3135			4970	9299						- 2263	

Besselsches Ell.

$$y = \bar{C}_1 y - \bar{C}_3 y^3 + \bar{C}_5 y^5$$

$$m = 1 + \bar{M}_2 y^2 + \bar{M}_4 y^4$$

X	$\bar{C}_1$	$\bar{C}_3$			$\bar{C}_5$	$\bar{M}_2$			$\bar{M}_4$				
		$d_1$ +	$d_2$ +	$d_3$ +		$d_1$ +	$d_2$ +	$d_3$ +					
5 100	33 430,8970	105,0497	1699	4	566,6121	3,6227	148	14,534	150	0,012 290 863	258	0,000 025 503	2
110	33 586,1170	105,3906	1712	4	570,2496	3,6523	149	14,684	152	290 605	258	501	2
120	33 691,6791	105,7341	1720	4	573,9167	3,6819	150	14,836	153	290 347	259	499	2
130	33 797,5856	106,0793	1734	4	577,6135	3,7115	152	14,989	156	290 088	258	497	2
140	33 903,8386	106,4272	1743	4	581,3402	3,7418	154	15,145	157	289 830	258	495	2
150	34 010,4405	106,7769	1757	4	585,0973	3,7724	155	15,302	159	289 572	258	493	2
160	34 117,3934	107,1294	1764	4	588,8851	3,8029	157	15,461	162	289 314	258	491	2
170	34 224,6997	107,4835	1780	4	592,7037	3,8343	158	15,623	163	289 056	258	489	2
180	34 332,3615	107,8406	1789	4	596,5537	3,8656	160	15,786	166	288 798	258	487	2
190	34 440,3814	108,1996	1802	4	600,4352	3,8972	162	15,952	168	288 540	258	485	2
5 200	34 548,7615	108,5611	1812	4	604,3486	3,9295	163	16,126	169	0,012 288 282	258	0,000 025 482	2
210	34 657,5042	108,9247	1825	4	608,2944	3,9620	165	16,289	172	288 024	258	480	2
220	34 766,6118	109,2909	1837	4	612,2728	3,9947	167	16,461	174	287 766	257	479	2
230	34 876,0868	109,6595	1849	4	616,2841	4,0279	168	16,635	176	287 509	258	476	2
240	34 985,9316	110,0306	1860	4	620,3287	4,0611	170	16,811	179	287 251	258	474	2
250	35 096,1486	110,4038	1875	4	624,4068	4,0948	173	16,990	180	286 993	257	472	2
260	35 206,7402	110,7800	1884	5	628,5189	4,1293	174	17,170	183	286 736	257	470	2
270	35 317,7090	111,1580	1899	4	632,6656	4,1640	175	17,353	186	286 479	258	467	2
280	35 429,0573	111,5391	1910	4	636,8471	4,1989	177	17,539	187	286 221	257	465	2
290	35 540,7978	111,9224	1923	4	641,0636	4,2339	180	17,726	190	285 964	257	463	2
5 300	35 652,9029	112,3082	1937	4	645,3154	4,2695	182	19,916	193	0,012 285 707	258	0,000 025 461	2
310	35 765,4052	112,6970	1947	5	649,6031	4,3058	183	18,109	195	285 449	257	459	2
320	35 878,2973	113,0876	1963	4	653,9272	4,3422	185	18,304	197	285 192	256	457	2
330	35 991,5816	113,4815	1975	5	658,2879	4,3790	188	18,501	201	284 936	257	455	2
340	36 105,2610	113,8777	1989	4	662,6856	4,4164	189	18,702	202	284 679	257	453	2
350	36 219,3381	114,2768	2001	5	667,1208	4,4537	192	18,904	205	284 422	257	451	2
360	36 333,8154	114,6783	2015	5	671,5937	4,4920	193	19,109	208	284 165	256	448	2
370	36 448,6956	115,0826	2028	5	676,1050	4,5304	195	19,317	211	283 909	257	446	2
380	36 563,9815	115,4896	2043	4	680,6549	4,5691	198	19,528	213	283 652	256	444	2
390	36 796,6758	115,8996	2054	5	685,2438	4,6086	200	19,741	216	283 396	256	442	2
5 400	36 795,7813	116,3118	2070	5	689,8723	4,6483	202	19,957	219	0,012 283 140	256	0,000 025 440	2
410	36 912,3006	116,7272	2084	5	694,5407	4,6883	205	20,176	222	282 884	256	438	2
420	37 029,2367	117,1454	2098	5	699,2494	4,7289	207	20,398	225	282 628	256	436	2
430	37 146,5924	117,5645	2111	5	703,9990	4,7702	209	20,623	228	282 372	256	434	2
440	37 264,3705	117,9902	2127	5	708,7900	4,8116	211	20,851	230	282 116	255	431	2
450	37 382,5738	118,4169	2141	5	713,6227	4,8536	213	21,081	235	281 861	256	429	2
460	37 501,2053	118,8466	2155	5	718,4976	4,8960	215	21,316	237	281 605	255	427	2
470	37 620,2679	119,2791	2171	5	723,4151	4,9388	218	21,553	240	281 350	256	425	2
480	37 739,7645	119,7147	2186	5	728,3756	4,9820	220	21,793	243	281 094	255	423	2
490	37 859,6982				733,3796			22,036		280 839		421	

Besselsches Ell.

$$\gamma = C_1 l + C_2 l^3 + C_3 l^5$$

$$m = 1 + M_2 l^2 \pm M_3 l^4$$

$\varphi$	$C_1$	$C_2$			$C_3$			$C_5$	$M_2$	$M_3$		$M_4$	$d_1$		
		$d_1$ +	$d_2$ -	$d_3$ -	$d_1$ -	$d_2$ -	$d_1$ -			$d_2$ +					
46,0	7193,39799	12,12408	1096	1	2,746306	5397	20	0,000 5723	78	0,000 5689	5560	20 6329	15	0,000 0000 3529	188
1	7205,51111	12,10216	1098	1	2,740890	5435	20	5645	77	5668	9246	20 6305	21	3341	187
2	7217,60228	12,08017	1099	1	2,735435	5475	20	5568	78	5648	2962	20 6260	17	3154	185
3	7229,67146	12,05819	1103	0	2,729940	5516	20	5490	77	5627	6719	20 6230	21	2969	185
4	7241,71862	12,03612	1103	1	2,724405	5555	20	5413	77	5607	0510	20 6189	21	2784	183
5	7253,74371	12,01405	1105	1	2,718831	5594	19	5336	77	5586	4342	20 6149	23	2601	181
6	7265,74671	11,99194	1107	1	2,713218	5631	20	5259	77	5565	8216	20 6103	23	2420	180
7	7277,72758	11,96980	1109	1	2,707567	5672	20	5182	76	5545	2136	20 6060	26	2240	179
8	7289,68628	11,94760	1110	1	2,701876	5711	19	5106	76	5524	6102	20 6020	27	2061	178
9	7301,62277	11,92538	1112	1	2,696146	5750	19	5030	76	5504	0119	20 5977	27	1883	176
47,0	7313,53702	11,90312	1115	1	2,690378	5786	19	0,000 4954	76	0,000 5483	4189	20 5907	31	0,000 0000 1707	175
1	7325,42899	11,88082	1116	1	2,684573	5824	19	4878	76	5462	8313	20 5842	28	1532	173
2	7337,29864	11,85848	1117	1	2,678730	5862	19	4802	75	5442	2499	20 5788	30	1359	172
3	7349,14594	11,83612	1120	1	2,672849	5900	19	4727	75	5421	6741	20 5733	34	1187	171
4	7360,97086	11,81371	1120	1	2,666930	5939	18	4652	75	5401	1042	20 5666	35	1016	170
5	7372,77336	11,79130	1125	0	2,660973	5975	19	4577	75	5380	5411	20 5597	35	0846	168
6	7384,55341	11,76880	1125	1	2,654980	6012	18	4502	74	5359	9849	20 5528	36	0678	167
7	7396,31095	11,74627	1126	1	2,648950	6048	18	4428	74	5339	4357	20 5457	37	0511	166
8	7408,04596	11,72375	1130	0	2,642884	6084	18	4354	74	5318	8937	20 5387	41	0345	164
9	7419,75841	11,70114	1130	1	2,636782	6120	19	4280	74	5298	3591	20 5304	39	0181	163
48,0	7431,44825	11,67853	1132	1	2,630644	6158	18	0,000 4206	74	0,000 5277	8326	20 5230	42	0,000 0000 0018	161
1	7443,11546	11,65588	1134	1	2,624469	6193	18	4132	73	5257	3138	20 5148	43	- 0143	161
2	7454,76000	11,63320	1136	1	2,618259	6227	18	4059	73	5236	8033	20 5063	44	- 0304	159
3	7466,38183	11,61046	1138	1	2,612014	6264	18	3986	72	5216	3014	20 4975	44	- 0463	157
4	7477,98091	11,58769	1138	1	2,605733	6299	17	3914	72	5195	8083	20 4890	47	- 0620	156
5	7489,55721	11,56491	1142	0	2,599417	6333	18	3842	72	5175	3240	20 4797	48	- 0776	155
6	7501,11070	11,54206	1143	1	2,593067	6368	17	3770	72	5154	8491	20 4703	49	- 0931	154
7	7512,64133	11,51919	1143	1	2,586682	6402	17	3698	72	5134	3837	20 4607	50	- 1085	152
8	7524,14908	11,49631	1147	1	2,580263	6436	17	3626	71	5113	9280	20 4509	52	- 1237	151
9	7535,63392	11,47337	1148	1	2,573810	6471	17	3555	71	5093	4823	20 4405	52	- 1388	149
49,0	7547,09580	11,45039	1149	1	2,567323	6503	17	0,000 3484	70	0,000 5073	0470	20 4305	55	0,000 0000 1537	149
1	7558,53469	11,42739	1151	1	2,560803	6538	17	3414	71	5052	6220	20 4195	54	- 1686	147
2	7569,95056	11,40435	1153	1	2,554249	6571	17	3343	70	5032	2079	20 4090	57	- 1833	145
3	7581,34337	11,38127	1155	1	2,547662	6604	16	3273	69	5011	8046	20 3976	57	- 1978	144
4	7592,71308	11,35815	1157	1	2,541042	6636	16	3204	69	4991	4127	20 3863	58	- 2122	143
5	7604,05965				2,534390			3135		4971	0322			- 2265	



$$y = \bar{C}_1 y - \bar{C}_3 y^3 + \bar{C}_5 y^5$$

$$m = 1 + \bar{M}_2 y^2 + \bar{M}_4 y^4$$

X	$\bar{C}_1$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$\bar{C}_3$	$d_1$	$d_2$	$\bar{C}_5$	$d_1$	$\bar{M}_2$	$d_1$	$\bar{M}_4$	$d_1$
		+	+	+		+	+		+		-		-
5 100	33 468,8232	104,9947	1698	4	566,0977	3,6187	147	14,512	150	0,012 287 042	261	0,000 025 490	2
110	33 573,9881	105,3355	1709	4	569,7311	3,6480	149	14,662	152	286 781	260	488	2
120	33 679,4948	105,6783	1721	4	573,3939	3,6776	150	14,814	154	286 521	260	486	2
130	33 785,3455	106,1955	1732	4	577,0864	3,7073	152	14,968	154	286 261	260	484	2
140	33 891,5425	106,3710	1742	4	580,8088	3,7374	153	15,122	157	286 001	260	482	2
150	33 998,0880	106,7204	1755	4	584,5615	3,7679	155	15,279	159	285 741	260	480	2
160	34 104,9842	107,0725	1764	4	588,3448	3,7986	156	15,438	162	285 481	260	477	3
170	34 212,2335	107,4264	1778	4	592,1590	3,8297	158	15,599	164	285 221	259	475	2
180	34 319,8380	107,7832	1786	4	596,0044	3,8610	160	15,763	166	284 962	260	473	2
190	34 427,8002	108,1415	1801	4	599,8813	3,8927	161	15,929	166	284 702	260	471	2
5 200	34 536,1222	108,5029	1812	4	603,7901	3,9249	163	16,095	169	0,012 284 442	259	0,000 025 459	2
210	34 644,8066	108,8665	1821	5	607,7312	3,9572	165	16,264	171	284 183	260	467	2
220	34 753,8556	109,2318	1837	4	611,7048	3,9899	167	16,435	175	283 923	259	464	3
230	34 863,2715	109,6004	1847	4	615,7113	4,0229	169	16,610	176	283 664	260	462	2
240	34 973,0570	109,9711	1858	5	619,7511	4,0566	170	16,786	178	283 404	259	460	2
250	35 083,2143	110,3438	1873	4	623,8246	4,0904	171	16,964	180	283 145	259	458	2
260	35 193,7458	110,7196	1884	4	627,9320	4,1242	174	17,144	182	282 886	259	456	2
270	35 304,6542	111,0977	1895	5	632,0735	4,1586	176	17,326	186	282 627	260	454	2
280	35 415,9418	111,4779	1911	4	636,2497	4,1937	178	17,512	187	282 367	259	452	2
290	35 527,6111	111,8613	1920	5	640,4611	4,2291	179	17,699	190	282 108	259	450	2
5 300	35 639,6648	112,2486	1934	5	644,7080	4,2646	181	17,889	192	0,012 281 849	258	0,000 025 447	3
310	35 752,1052	112,6346	1949	4	648,9906	4,3004	184	18,081	195	281 591	259	445	2
320	35 864,9350	113,0255	1959	5	653,3093	4,3369	185	18,276	197	281 332	259	443	2
330	35 978,1569	113,4186	1974	4	657,6647	4,3738	187	18,473	199	281 073	258	441	2
340	36 091,7733	113,8148	1985	5	662,0571	4,4109	189	18,672	203	280 815	259	439	2
350	36 205,7870	114,2130	2001	4	666,4868	4,4482	192	18,875	205	280 556	258	437	2
360	36 320,2005	114,6145	2012	5	670,9542	4,4864	193	19,080	207	280 298	259	435	2
370	36 435,0167	115,0183	2026	5	675,4599	4,5248	195	19,287	211	280 039	258	432	3
380	36 550,2381	115,5249	2041	5	680,0042	4,5637	197	19,497	213	279 781	258	430	2
390	36 665,8675	115,8344	2054	5	684,5876	4,6029	199	19,710	216	279 523	258	428	2
5 400	36 781,9077	116,2465	2067	5	689,2104	4,6425	202	19,926	219	0,012 279 265	258	0,000 025 426	2
410	36 898,3614	116,6613	2083	5	693,8730	4,6825	204	20,145	221	279 007	257	424	2
420	37 015,2314	117,0793	2094	5	698,5759	4,7231	207	20,366	225	278 750	258	422	2
430	37 132,5206	117,4995	2112	4	703,3196	4,7642	208	20,591	227	278 492	257	420	2
440	37 250,2317	117,9234	2122	5	708,1046	4,8056	211	20,818	230	278 235	258	418	2
450	37 368,3678	118,3492	2140	5	712,9312	4,8474	213	21,048	234	277 977	257	415	3
460	37 486,9315	118,7787	2153	5	717,7999	4,8898	216	21,282	236	277 720	257	413	2
470	37 605,9260	119,2108	2169	5	722,7112	4,9327	218	21,518	239	277 463	257	411	2
480	37 725,3541	119,6460	2183	5	727,6656	4,9759	220	21,757	243	277 206	257	409	2
490	37 845,2189				732,6635			22,000		276 949		407	

f. Tafeln zur Berechnung der Richtungs- und Entfernungsreduktionen für die Gauß-Krügersche Abbildung.

Die Größen  $\psi_{12}$  und  $\Delta\sigma \doteq \Delta s$ , die Beträge der Richtungs- und Streckenreduktionen, können aus Potenzreihen berechnet werden; es ist

$$\psi_{12} = a\Delta x_{12} + b\Delta y_{12} + c\Delta x_{12}\Delta y_{12} + d\Delta x_{12}^2 + e\Delta y_{12}^2 \quad \text{und} \quad \Delta\sigma = \sigma[ky_1^2 + a\Delta x_{12} + b\Delta y_{12} + c\Delta x_{12}^2 + d\Delta y_{12}^2 + e\Delta x_{12}\Delta y_{12}].$$

Die auf den Anfangspunkt  $P_1$  der betrachteten geodätischen Strecke bezogenen Koeffizienten  $a, b, c, d, e$  dieser Formeln - es sind dies in beiden Formeln verschiedene Werte - sind in den nachstehenden Tafeln zusammengefaßt, wobei als Eingangswerte die Abszissen in Intervallen von 100 km, die Ordinaten in Intervallen von 10 km aufeinander folgen.

Sollen die Koeffizienten für beliebige Werte  $x_1, y_1$  des Anfangspunktes entnommen werden, so ist für das jeweilige Hauptglied ( $a$  bei  $\psi$ ,  $b$  bei  $\Delta\sigma$ ) zur Interpolation die Newtonsche Interpolationsformel anzuwenden, wobei man sich im vorliegenden Fall ohne Einbuße an Genauigkeit auf den Ausdruck

$$a = a_0 + \Delta a_x n_x + \Delta a_y n_y + \Delta a_{xy} n_x n_y,$$

beschränken kann. Die Tafelintervalle in Richtung der beiden Eingangswerte sind voneinander verschieden (siehe oben); dieser Umstand wurde in der Angabe der Tafeldifferenzen bereits berücksichtigt, so daß für die obige Formel gilt

$$n_x = X - X_0, \quad n_y = Y - Y_0$$

in Einheiten von 10 km (Tafelintervall von  $y$ ). Die Vorzeichen der Tafeldifferenzen, die im einzelnen Fall notwendige Gliederzahl u.s.w. entnimmt man den Tafeln.

Mit einer für Zwecke der praktischen Geodäsie durchaus zu vernachlässigenden Einbuße an Genauigkeit können die für das Besselsche Ellipsoid berechneten Tafeln auch für die Gauß-Krügersche Abbildung des Internationalen Ellipsoids benützt werden; lediglich der bei der Berechnung der Streckenreduktion auftretende Koeffizient  $k$  ist für dieses Ellipsoid gesondert zu berechnen und ist dieser daher in der Tafel für das Internationale Ellipsoid ebenfalls angegeben.

Beispiel. Gegeben seien die Gauß-Krügerschen Koordinaten eines Punktes  $P_1$  am Besselschen Ellipsoid mit

$$x_1 = 5\,243\,506,392 \quad y_1 = +102\,806,961$$

sowie die Länge einer geodätischen Strecke  $P_1P_2$  und ihr geodätischer Richtungswinkel im Punkte  $P_1$  mit

$$\sigma = 82\,206,061 \text{ m} \quad \tau_{12} = 22^\circ 31' 58",7616.$$

Die Gauß-Krügerschen Koordinaten des Punktes  $P_2$  sind in der Bildebene zu berechnen.

Zur Ermittlung der in den Formeln für  $\psi$  und  $\Delta\sigma$  enthaltenen Koordinatendifferenzen berechnen wir, auf Meter abgerundet, Näherungswerte von  $\Delta x_{12}$  und  $\Delta y_{12}$ . Es ist

$$\Delta x_{12} \doteq \sigma \cos \tau_{12} = 75\,931 \text{ m}, \quad \Delta y_{12} \doteq \sigma \sin \tau_{12} = 31\,503 \text{ m}.$$

Ausgedrückt in Einheiten von 10 km erhalten wir

$$\Delta x_{12} = +7,5931 \quad \Delta y_{12} = +3,1503 \quad \Delta x_{12}^2 = 57,655 \quad \Delta y_{12}^2 = 9,924 \quad \Delta x_{12}\Delta y_{12} = +23,921$$

Ferner benötigen wir noch  $y_1^2 \doteq 105,693$ . Für die Berechnung beider Reduktionen sind die nächst niedrigen Eingangswerte  $x_0 = 5\,200\,000$  und  $y_0 = 100\,000$ . Wir bilden  $n_x = (x_1 - x_0)$  und  $n_y = (y_1 - y_0)$  in Einheiten von 10 Kilometern, erhalten also  $n_x = 4,3506$ ,  $n_y = 0,2807$  und  $n_x n_y = 1,22$ .

Zur Berechnung der Richtungs- und Streckenreduktion entnehmen wir den Tafeln:

Richtungsreduktion				Streckenreduktion			
$a = 2,534\,43$	$b = 0,000\,28$	$d = 0,000\,018$	$k_B = 12,2886$	$a = 0,014$	$c = 0,0003$		
- 23	$c = 0,084\,450$	$e = 0,000\,018$	- 11	$b = 122,888$	$d = 4,0958$		
+ 71 13	- 8		$k_B = 12,2875$	+ 11	- 4		
- 1	- 2			+ 3,450	$d = 4,0954$		
$a = 2,605\,32$	$c = 0,084\,440$			- 0	$c = 0,0018$		
				$b = 126,327$			

Wir bilden nun die einzelnen Terme, deren Vorzeichen wir den Vorzeichentafeln entnehmen, und summieren. Es ergibt sich

$\psi_{12} = a\Delta x$	- 19,7825	$k \cdot y_1^2$	= + 1298,70
+ $b\Delta y$	- 0,0009	$a\Delta x$	= - 0,11
+ $c\Delta x\Delta y$	- 2,0199	$b\Delta y$	= + 397,97
+ $d\Delta x^2$	+ 0,0010	$c\Delta x^2$	= + 0,02
+ $e\Delta y^2$	- 0,0002	$d\Delta y^2$	= + 40,64
		$e\Delta x\Delta y$	= - 0,04
$\psi_{12}'' = - 21",8025$		$\Sigma$	= + 1737,18
		$\Delta\sigma = \sigma \cdot \Sigma$	= + 14 280,7 mm

Aus  $\hat{t}_{12} = \tau_{12} + \psi_{12}$  erhalten wir den Richtungswinkel der Sehne mit

$$\begin{aligned} \hat{t}_{12} &= 22^\circ 31' 58",7616 \\ \psi_{12} &= - 21",8025 \\ \underline{\hat{t}_{12}} &= 22^\circ 31' 36",9591 \end{aligned}$$

Aus  $s = \sigma + \Delta\sigma$  folgt die Länge der Sehne der Bildkurve mit

$$\begin{aligned} \sigma &= 82\,206,061 \\ \Delta\sigma &= + 14,281 \\ \underline{s} &= 82\,220,342 \text{ m} \end{aligned}$$

Nun berechnen wir mit den Formeln der ersten Hauptaufgabe der ebenen Koordinatenrechnung die Koordinaten des Endpunktes  $P_2$ ; es ist

$$x_2 = x_1 + s_{12} \cos t_{12} = 5\,319\,453,284 \text{ m}, \quad y_2 = y_1 + s_{12} \sin t_{12} = +134\,307,028 \text{ m}.$$

Zur Kontrolle haben wir die gleiche Rechnung in geographischen Koordinaten in der Bezugsfläche ausgeführt und das Ergebnis mit den schon mitgeteilten Interpolations tafeln in Gauß-Krügersche Koordinaten transformiert; beide Koordinatenwerte erhielten wir um 1 mm kleiner als vorstehend angegeben. Diese - belanglose - Unstimmigkeit wird man jedoch zum größten Teil der Unsicherheit in der Koordinatentransformation mit Hilfe der Interpolations tafeln (siehe diese) zuschreiben müssen.

Richtungsreduktion für Gauss-Krügersche Abbildung

$$t_{12} = \tau_{12} + \psi_{12}$$

		a						b					
Y	X = 5100	X = 5200	X = 5300	X = 5400	X = 5500	la <sub>av</sub>     la <sub>av</sub>     la <sub>av</sub>	la <sub>av</sub>     la <sub>av</sub>     la <sub>av</sub>	la <sub>av</sub>     la <sub>av</sub>     la <sub>av</sub>	X = 5500	la <sub>av</sub>	Y		
0	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00	253 46 0,0	253 41 0,0	253 36 0,0	0,000 00	253 31	0,000 00		
10	0,253 52	0,253 46	0,253 41	0,253 36	0,253 31	253 47 0,5	253 41 0,5	253 35 0,5	0,253 31	253 30	0,000 00		
20	0,507 03	0,506 93	0,506 82	0,506 71	0,506 61	253 46 1,0	253 41 1,1	253 36 1,0	0,506 61	253 30	0,000 01		
30	0,760 55	0,760 39	0,760 23	0,760 07	0,759 91	253 45 1,5	253 40 1,6	253 35 1,5	0,759 91	253 30	0,000 02		
40	1,014 06	1,013 84	1,013 63	1,013 42	1,013 21	253 45 2,0	253 40 2,1	253 34 2,0	1,013 21	253 29	0,000 04		
50	1,267 56	1,267 29	1,267 03	1,266 76	1,266 50	253 45 2,5	253 39 2,7	253 34 2,6	1,266 50	253 29	0,000 07		
60	1,521 06	1,520 74	1,520 42	1,520 10	1,519 79	253 44 3,0	253 39 3,2	253 33 3,1	1,519 79	253 28	0,000 10		
70	1,774 55	1,774 18	1,773 81	1,773 43	1,773 07	253 43 3,5	253 37 3,8	253 32 3,6	1,773 07	253 27	0,000 13		
80	2,028 03	2,027 61	2,027 18	2,026 76	2,026 34	253 42 4,0	253 37 4,2	253 31 4,0	2,026 34	253 26	0,000 17		
90	2,281 50	2,281 03	2,280 55	2,280 07	2,279 60	253 40 4,5	253 35 4,8	253 30 4,7	2,279 60	253 25	0,000 22		
100	2,534 97	2,534 43	2,533 90	2,533 37	2,532 85	253 40 5,0	253 35 5,3	253 29 5,2	2,532 85	253 23	0,000 27		
110	2,788 42	2,787 83	2,787 25	2,786 66	2,786 08	253 38 5,5	253 32 5,9	253 28 5,8	2,786 08	253 23	0,000 32		
120	3,041 85	3,041 21	3,040 57	3,039 94	3,039 31	253 37 6,0	253 32 6,3	253 26 6,3	3,039 31	253 21	0,000 38		
130	3,295 27	3,294 58	3,293 89	3,293 20	3,292 52	253 35 6,5	253 30 6,9	253 24 6,8	3,292 52	253 19	0,000 45		
140	3,548 68	3,547 93	3,547 19	3,546 44	3,545 71	253 33 7,0	253 28 7,5	253 22 7,3	3,545 71	253 17	0,000 52		
150	3,802 06	3,801 26	3,800 47	3,799 67	3,798 88	253 32 7,5	253 27 8,0	253 21 7,9	3,798 88	253 15	0,000 60		

		<b>C</b>						<b>d = e</b>		
Y	X = 5100	$\Delta C_x$	X = 5200	$\Delta C_x$	X = 5300	$\Delta C_x$	X = 5400	$\Delta C_x$	X = 5500	Y
0	0,084 506	- 1.8	0,084 488	- 1.8	0,084 470	- 1.7	0,084 453	- 1.3	0,084 435	0
10	505	1.7	488	1.8	470	1.8	452	1.7	435	10
20	504	1.8	486	1.7	459	1.8	451	1.7	434	20
30	502	1.7	485	1.8	457	1.8	449	1.7	432	30
40	500	1.8	482	1.3	464	1.8	447	1.8	429	40
50	496	1.8	479	1.7	451	1.7	443	1.7	426	50
60	492	1.8	474	1.7	457	1.8	439	1.8	421	60
70	487	1.8	469	1.7	452	1.3	434	1.8	416	70
80	481	1.7	464	1.8	446	1.8	428	1.7	411	80
90	475	1.8	457	1.7	440	1.8	422	1.8	404	90
100	468	1.8	450	1.8	432	1.7	415	1.8	397	100
110	460	1.8	442	1.8	424	1.8	407	1.8	389	110
120	451	1.8	433	1.7	416	1.7	398	1.8	380	120
130	441	1.7	424	1.8	406	1.8	388	1.7	371	130
140	431	1.8	413	1.7	396	1.8	378	1.7	361	140
150	420	1.8	402	1.7	385	1.8	367	1.7	350	150

Die Richtungsreduktion wird berechnet aus :		Unsicherheit für $\Delta x = \Delta y = 50 \text{ km}$	Stellenzahl der Koeffizienten
1	$\psi = a\Delta X_x + c\Delta X_y$	0,04"	a:2 c:3
2	$\psi = a\Delta X_x + b\Delta Y_x + c\Delta X_y$	0,002"	a,b:4 c:5
3	$\psi = a\Delta X_x + b\Delta Y_x + c\Delta X_y + d\Delta X_x^2 + e\Delta Y_x^2$	0,0001"	vollständig
$\Delta X, \Delta Y, n_x, n_y$ in Einheiten von 10 km, $\psi$ in "		$a = a_e - n_x \Delta a_x + n_y \Delta a_y - n_x n_y \Delta a_{xy}$	

	Y : +			Y : -		
	a	b	c	a	b	c
$\Delta Y_x$	+	-	-	+	-	-
$\Delta X_x$	+	-	-	+	-	-
a	+	-	-	+	-	-
b	-	+	+	-	+	+
c	-	+	+	-	+	+
d	+	+	+	-	-	-
e	-	-	-	+	+	+

Streckenreduktion für Gauss-Krügersche Abbildung

$$S_{rz} = \sigma_{rz} + \Delta\sigma$$

		b										a
Y	X=5100	$\frac{ ab_x }{ ab_y }$	X=5200	$\frac{ ab_x }{ ab_y }$	X=5300	$\frac{ ab_x }{ ab_y }$	X=5400	$\frac{ ab_x }{ ab_y }$	X=5500	$\frac{ ab_x }{ ab_y }$	lab	Y
0	0,000	12 291	0,000	12 288	0,000	12 286	0,000	12 283	0,000	12 281	0	
10	0,000	12 291	12,288	12 289	12,286	12 285	12,283	12 283	12,281	12 280	10	
20	0,001	12 291	24,577	12 288	24,571	12 286	24,566	12 284	24,561	12 281	20	
30	0,001	12 291	36,865	12 288	36,857	12 286	36,850	12 283	36,842	12 280	30	
40	0,002	12 291	49,164	12 289	49,143	12 286	49,133	12 283	49,122	12 281	40	
50	0,003	12 291	61,455	12 289	61,442	12 286	61,416	12 284	61,403	12 281	50	
60	0,005	12 292	73,746	12 289	73,731	12 287	73,700	12 284	73,684	12 281	60	
70	0,006	12 292	86,038	12 289	86,020	12 286	85,994	12 284	85,965	12 282	70	
80	0,008	12 291	98,330	12 289	98,309	12 287	98,268	12 284	98,247	12 281	80	
90	0,011	12 293	110,621	12 290	110,598	12 287	110,552	12 284	110,528	12 282	90	
100	0,013	12 292	122,914	12 290	122,888	12 287	122,836	12 285	122,810	12 283	100	
110	0,016	12 293	135,206	12 290	135,178	12 288	135,121	12 285	135,093	12 282	110	
120	0,019	12 295	147,499	12 291	147,468	12 288	147,406	12 286	147,375	12 283	120	
130	0,022	12 294	159,792	12 291	159,759	12 289	159,725	12 285	159,658	12 283	130	
140	0,025	12 294	172,086	12 291	172,050	12 289	171,977	12 287	171,941	12 284	140	
150	0,029	12 294	184,380	12 291	184,341	12 289	184,264	12 287	184,225	12 284	150	

Y	c			d			e		
	X = 5100	$\Delta d_x$	X = 5200	$\Delta d_x$	X = 5300	$\Delta d_x$	X = 5400	$\Delta d_x$	X = 5500
0	4,0970	-0,9	4,0961	-0,9	4,0952	-0,8	4,0944	-0,9	4,0935
10	4,0970	0,9	4,0961	0,9	4,0952	0,8	4,0944	0,9	4,0935
20	4,0969	0,8	4,0961	0,9	4,0952	0,8	4,0944	0,9	4,0935
30	4,0969	0,8	4,0961	0,9	4,0952	0,9	4,0943	0,8	4,0935
40	4,0969	0,9	4,0960	0,8	4,0952	0,9	4,0943	0,9	4,0934
50	4,0969	0,9	4,0960	0,9	4,0951	0,8	4,0943	0,9	4,0934
60	4,0968	0,8	4,0960	0,9	4,0951	0,8	4,0943	0,9	4,0934
70	4,0968	0,9	4,0959	0,8	4,0951	0,9	4,0942	0,8	4,0934
80	4,0967	0,8	4,0959	0,9	4,0950	0,8	4,0942	0,9	4,0933
90	4,0967	0,9	4,0958	0,8	4,0950	0,9	4,0941	0,8	4,0932
100	4,0966	0,8	4,0958	0,9	4,0949	0,9	4,0940	0,8	4,0932
110	4,0966	0,9	4,0957	0,9	4,0948	0,8	4,0940	0,9	4,0931
120	4,0965	0,9	4,0956	0,9	4,0947	0,8	4,0939	0,9	4,0930
130	4,0964	0,9	4,0955	0,8	4,0947	0,9	4,0938	0,9	4,0929
140	4,0963	0,9	4,0954	0,8	4,0946	0,9	4,0937	0,8	4,0929
150	4,0962	0,9	4,0953	0,8	4,0945	0,9	4,0936	0,8	4,0928

Y	K <sub>Basalesches Ellipsoid</sub>		
	X = 5100	$\Delta K_x$	X = 5200
0 < Y ≤ 130 km	12,2912	-2,6	12,2886
130 < Y ≤ 150 km	12,2914	-2,6	12,2888

Y	K <sub>Internationales Ellipsoid</sub>		
	X = 5100	$\Delta K_x$	X = 5200
0 < Y ≤ 130 km	12,2861	-2,6	12,2835
130 < Y ≤ 150 km	12,2862	-2,6	12,2836

Die Streckenreduktion wird berechnet aus :

1	$\Delta \sigma = \sigma [kY^2 + b\Delta Y_x + d\Delta Y_x^2]$	Unsicherheit	Stellenzahl
		$\Delta X, \Delta Y, n_x, n_y$ in Einheiten von 10 km, $\Delta \sigma$ in mm	$\Delta X, \Delta Y, n_x, n_y$ in Einheiten von 10 km, $\Delta \sigma$ in mm
2	$\Delta \sigma = \sigma [kY^2 + a\Delta X_x + b\Delta Y_x + d\Delta Y_x^2]$	4 mm	b,2, Kd:3
3	$\Delta \sigma = \sigma [kY^2 + a\Delta X_x + b\Delta Y_x + c\Delta X_x^2 + d\Delta Y_x^2 + e\Delta X_x\Delta Y_x]$	1 mm	a,b,d:3, K:4
		0,3 mm	vollständig
		$b = b_0 - n_x \cdot \text{tab } j + n_y \cdot \text{tab } j - n_x \cdot n_y \cdot \text{tab } j$	

Y	Y : +			Y : -		
	$\Delta X_x$	$\Delta Y_x$	$\Delta Z_x$	$\Delta X_x$	$\Delta Y_x$	$\Delta Z_x$
a	+	+	+	-	-	-
b	+	+	+	-	-	-
c	+	+	+	-	-	-
d	+	+	+	-	-	-
e	+	+	+	-	-	-

3. Koeffizienten der Potenzreihen der konformen Kegelprojektion, der stereographischen und der querachsigen konformen Abbildung (Besselsches und Internationales Ellipsoid).

In den Formeln (59) und (60) des ersten Teiles haben wir jene Potenzreihen entwickelt, die den Übergang von den Parametern  $\varphi, \lambda$  (geographische Koordinaten) in beliebige thermische Parameter  $x, y$  und umgekehrt für den Fall vermitteln, daß für das isotherme Netz krummer Koordinatenlinien Symmetrie hinsichtlich der Parameterkurve  $\ell = 0$  ( $y=0$ ), d.h. des Grundmeridians, besteht. Diese Gleichungen sind bekanntlich die Abbildungsgleichungen für konforme Abbildungen, wenn wir die Werte der thermischen Parameter mit ebenen cartesischen Koordinaten identifizieren. Unter der gleichen Voraussetzung haben wir in den Formeln (82) und (83) Potenzreihen zur Berechnung der Meridiankonvergenz und der Dichte der Koordinatenlinien oder, bezogen auf die Abbildung, des Abbildungsmaßstabes angegeben.

Für die speziellen Fälle der konformen Kegelprojektion, der stereographischen und der querachsigen konformen Abbildung haben wir diese Formeln im Teil II in den Formelsystemen (22-25), (65-68) und (86-89) angegeben. Mit allgemeiner Anschreibung der Koeffizienten wird eine zum Grundmeridian symmetrische konforme Abbildung durch die nachstehenden Potenzreihen innerhalb des Konvergenzbereiches derselben bestimmt durch

$$x = A_{10} \Delta\varphi + A_{20} \Delta\varphi^2 + A_{20} \ell^2 + A_{30} \Delta\varphi^3 + A_{12} \Delta\varphi \ell^2 + \dots$$

$$y = A_{01} \ell + A_{11} \Delta\varphi \ell + A_{21} \Delta\varphi^2 \ell + A_{03} \ell^3 + \dots$$

$$\Delta\varphi = \bar{A}_{10} x + \bar{A}_{20} x^2 + \bar{A}_{02} y^2 + \bar{A}_{30} x^3 + \bar{A}_{12} xy^2 + \dots$$

$$\ell = \bar{A}_{01} y + \bar{A}_{11} xy + \bar{A}_{21} x^2 y + \bar{A}_{03} y^3 + \dots$$

$$y = C_{01} \ell + C_{11} \Delta\varphi \ell + C_{21} \Delta\varphi^2 \ell + C_{03} \ell^3 + \dots$$

$$y = \bar{C}_{01} y + \bar{C}_{11} xy + \bar{C}_{21} x^2 y + \bar{C}_{03} y^3 + \dots$$

$$m = 1 + M_{10} \Delta\varphi + M_{20} \Delta\varphi^2 + M_{02} \ell^2 + M_{30} \Delta\varphi^3 + M_{12} \Delta\varphi \ell^2 + \dots$$

$$m = 1 + \bar{M}_{10} x + \bar{M}_{20} x^2 + \bar{M}_{02} y^2 + \bar{M}_{30} x^3 + \bar{M}_{12} xy^2 + \dots$$

Hierin bedeutet:  $\Delta\varphi, \ell$  die Differenzen der geographischen Koordinaten eines abzubildenden Punktes gegen die geographischen Koordinaten des Anfangspunktes  $P_0$  der Abbildung;  $x$  und  $y$  die von  $P_0$  aus gezählten Werte der thermischen Parameter oder, in der Bildebene, die vom Bildpunkt des Anfangspunktes aus gezählten ebenen cartesischen Koordinaten. Unter  $y'$  und  $m$  haben wir, wie üblich, die Meridiankonvergenz und den Abbildungsmaßstab zu verstehen. Die Bedeutung der mit  $A_{ijk}, \bar{A}_{ijk}, C_{ijk}, \bar{C}_{ijk}, M_{ijk}, \bar{M}_{ijk}$  bezeichneten Koeffizienten entnehmen wir den im Teil II entwickelten, schon erwähnten Potenzreihen für die einzelnen Abbildungen. Alle diese Koeffizienten sind Funktionen der geographischen Breite des Anfangspunktes  $P_0$ ; nach der Festlegung desselben können sie durch konstante Zahlenwerte angegeben werden.

In den nachfolgenden Tafeln sind die Werte dieser Koeffizienten für die konforme Kegelprojektion, für die stereographische und die querachsige konforme Abbildung sowohl des Besselschen als auch des Internationalen Ellipsoids für die Anfangspunkte  $P_0$  mit den Breiten  $\varphi_0 = 47^\circ, 48^\circ, 49^\circ$  angegeben. Beigefügt sind noch die Koeffizienten der konformen Kegelprojektion mit zwei längentreu abgebildeten Parallelkreisen mit dem Anfangspunkt  $P_0$  in der Breite  $\varphi_0 = 48^\circ$  und den längentreu abgebildeten Parallelkreisen  $\varphi_1 = 47^\circ, \varphi_2 = 49^\circ$ .

Um eine bequemere Rechnung zu ermöglichen, wurden alle Koeffizienten mit entsprechenden Zehnerpotenzen so multipliziert, daß man die Koordinatendifferenzen  $\Delta\varphi, \ell$  in Einheiten von  $10^4$  Sekunden (alter Teilung), die Koordinaten  $x, y$  hingegen in Einheiten von  $10^5$  Metern einführen muß, um im Ergebnis die Koordinaten  $x, y$  in Metern, die Koordinatenunterschiede  $\Delta\varphi, \ell$  sowie die Meridiankonvergenz  $y'$  in Sekunden zu erhalten; mit denselben Einheiten ist in die Potenzreihen zur Berechnung des Abbildungsmaßstabes einzugehen. Die Vorzeichen der Koeffizienten und die zugehörigen Faktoren sind jeweils über den Zahlenwerten angeschrieben.

Konforme Kegelprojektion  
Besselsches Ellipsoid

X

$\varphi$	$\Delta\varphi$	$\Delta\varphi^2$	$l^2$	$\Delta\varphi^2$	$\Delta\varphi l^2$	$\Delta\varphi^3$	$\Delta\varphi l^3$	$l^4$	$\Delta\varphi^4$	$\Delta\varphi^2 l^2$	$\Delta\varphi l^4$
	+	+	+	+	-	-	-	-	+	-	+
47°	308 773,3174	75,0206	3 744,9894	120,4330	194,0950	1,5722	0,0475	0,3924	0,1205	0,0775	0,0204
48°	308 827,2631	74,8136	3 733,7802	120,3834	200,4390	1,6285	0,0489	0,4039	0,1241	0,0788	0,0218
49°	308 881,0270	74,5152	3 718,0315	120,3339	200,4390	1,6871	0,0502	0,4148	0,1279	0,0812	0,0231

Y

$\varphi$	$l$	$\Delta\varphi l$	$\Delta\varphi^2 l$	$l^3$	$\Delta\varphi^2 l^2$	$\Delta\varphi l^3$	$\Delta\varphi^2 l^3$	$l^4$
	+	-	-	-	-	+	-	+
47°	211 241,0213	10 948,1842	2,6600	44,2621	4,2693	2,2940	0,0559	0,0028
48°	207 267,4541	11 126,6380	2,6954	44,8411	4,3364	2,4071	0,0589	0,0029
49°	203 230,2421	11 301,7569	2,7265	45,3468	4,4020	2,5217	0,0619	0,0030

$\Delta\varphi$

$\varphi$	x	x <sup>2</sup>	y <sup>2</sup>	x <sup>2</sup>	xy <sup>2</sup>	x <sup>3</sup>	x <sup>2</sup> y <sup>2</sup>	y <sup>3</sup>	x <sup>3</sup>	x <sup>2</sup> y <sup>3</sup>	xy <sup>3</sup>
	+	-	-	-	-	-	-	+	+	-	+
47°	3238,621 811	0,254 836	27,180 304	0,132 451	0,451 947	0,000 5082	0,004 2508	0,001 8957	0,000 0025	0,000 0539	0,000 0682
48°	3238,056 092	0,254 000	28,143 077	0,132 304	0,484 787	0,000 5280	0,004 9771	0,002 1067	0,000 0021	0,000 0677	0,000 0807
49°	3237,492 474	0,252 855	29,143 732	0,132 158	0,520 148	0,000 5486	0,005 7954	0,002 3413	0,000 0017	0,000 0842	0,000 0952

l

$\varphi$	y	xy	x <sup>2</sup> y	y <sup>3</sup>	x <sup>3</sup> y	xy <sup>3</sup>	x <sup>2</sup> y <sup>2</sup>	x <sup>3</sup> y <sup>2</sup>	y <sup>4</sup>
	+	+	+	-	+	-	+	-	+
47°	4733,929 017	79,459 497	1,333 736	0,444 579	0,022 3869	0,022 3869	0,000 3758	0,000 7515	0,000 0752
48°	4824,684 148	83,866 033	1,457 818	0,485 939	0,025 3403	0,025 3403	0,000 4405	0,000 8810	0,000 0881
49°	4920,527 525	88,588 645	1,594 940	0,531 647	0,028 7152	0,028 7152	0,000 5170	0,001 0340	0,000 1034

m

$\varphi$	1	$\Delta\varphi^3$	$\Delta\varphi^4$	$\Delta\varphi^5$	$\Delta\varphi^6$
	+	+	+	+	+
47°	1	0,001 171 560	0,000 020 556	0,000 001 941	0,000 000 083
48°	1	0,001 171 697	0,000 021 282	0,000 001 999	0,000 000 089
49°	1	0,001 171 833	0,000 022 036	0,000 002 061	0,000 000 095

m

$\varphi$	1	x <sup>2</sup>	x <sup>3</sup>	xy <sup>2</sup>	x <sup>3</sup>	x <sup>2</sup> y <sup>2</sup>	y <sup>3</sup>	x <sup>3</sup>	x <sup>2</sup> y <sup>3</sup>	xy <sup>3</sup>
	+	+	+	-	+	-	+	+	-	+
47°	1	0,000 122 8811	0,000 000 67893	0,000 002 06259	0,000 000 01114	0,000 000 05171	0,000 000 00966	0,000 000 00017	0,000 000 00125	0,000 000 00058
48°	1	0,000 122 8525	0,000 000 70327	0,000 002 13553	0,000 000 01177	0,000 000 05546	0,000 000 00928	0,000 000 00018	0,000 000 00138	0,000 000 00065
49°	1	0,000 122 8240	0,000 000 72858	0,000 002 21133	0,000 000 01244	0,000 000 05949	0,000 000 00995	0,000 000 00020	0,000 000 00153	0,000 000 00072

γ

$\varphi$	-l
	+
47°	7313,5370
48°	7431,4483
49°	7547,0958

γ

$\varphi$	y	xy	x <sup>2</sup> y	y <sup>3</sup>	x <sup>3</sup> y	xy <sup>3</sup>	x <sup>2</sup> y <sup>2</sup>	x <sup>3</sup> y <sup>2</sup>	y <sup>4</sup>
	+	+	+	-	+	-	+	-	+
47°	3462,1765	58,11300	0,97543	0,32514	0,01637	0,01637	0,00027	0,00055	0,00005
48°	3585,4391	62,32461	1,08337	0,36112	0,01883	0,01883	0,00033	0,00065	0,00007
49°	3713,5693	66,85870	1,20372	0,40124	0,02167	0,02167	0,00039	0,00078	0,00008



Konforme Kegelprojektion  
Internation. Ellipsoid

X

φ.	Δφ		L'		Δφ <sup>2</sup>		L''		Δφ <sup>3</sup>		ΔφL'	
	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
47°	308 818,2849	75,5764	3 745,6198	120,4469	194,1233	1,5724	0,0478	0,3924	0,1205	0,0753	0,0204	
48°	308 872,6304	75,3680	3 734,4163	120,3969	200,4683	1,6288	0,0492	0,4040	0,1241	0,0788	0,0218	
49°	308 926,7927	75,0676	3 718,6605	120,3470	206,7926	1,6874	0,0505	0,4149	0,1280	0,0813	0,0231	

Y

φ.	l		Δφ.l		L'		Δφ <sup>2</sup> .l		Δφ.L'		L''	
	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
47°	211 276,5802	10 949,7786	2,4797	44,2695	4,2698	2,2943	0,0559	0,0028				
48°	207 302,4318	11 128,2725	2,7154	44,8487	4,3368	2,4075	0,0589	0,0029				
49°	203 264,6242	11 303,4315	2,7467	45,3545	4,4025	2,5221	0,0619	0,0030				

Δφ

φ.	x		x <sup>2</sup>		y <sup>2</sup>		x <sup>3</sup>		xy <sup>2</sup>		x <sup>2</sup> y		x <sup>2</sup> y <sup>2</sup>		xy <sup>3</sup>	
	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
47°	3238,150 229	0,256 612	27,171 773	0,132 388	0,451 698	0,000 5076	0,004 2477	0,001 8951	0,000 0025	0,000 0538	0,000 0982					
48°	3237,580 483	0,255 770	28,134 196	0,132 241	0,484 521	0,000 5273	0,004 9730	0,002 1053	0,000 0021	0,000 0677	0,000 0806					
49°	3237,012 857	0,254 616	29,134 486	0,132 093	0,519 862	0,000 5479	0,005 7911	0,002 3395	0,000 0017	0,000 0841	0,000 0951					

l

φ.	y		xy		x <sup>2</sup> y		y <sup>3</sup>		x <sup>2</sup> y <sup>2</sup>		xy <sup>3</sup>		y <sup>4</sup>	
	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
47°	4733,132 272	79,432 753	1,333 063	0,444 354	0,022 3719	0,022 3719	0,000 3755	0,000 7509	0,000 0751					
48°	4823,870 088	83,837 734	1,457 080	0,485 693	0,025 3237	0,025 3237	0,000 4401	0,000 8802	0,000 0880					
49°	4919,695 220	88,598 678	1,594 131	0,531 377	0,028 6957	0,028 6957	0,000 5166	0,001 0331	0,000 1033					

m

φ.	l	Δφ <sup>2</sup>		Δφ <sup>3</sup>		Δφ <sup>4</sup>		Δφ <sup>5</sup>	
		+	+	+	+	+	+	+	+
47°	1	0,001 171 534	0,000 026 557	0,000 001 941	0,000 000 083				
48°	1	0,001 171 671	0,000 021 283	0,000 001 999	0,000 000 089				
49°	1	0,001 171 808	0,000 022 038	0,000 002 061	0,000 000 095				

m

φ.	l	x <sup>2</sup>		x <sup>3</sup>		xy <sup>2</sup>		x <sup>2</sup> y		x <sup>2</sup> y <sup>2</sup>		xy <sup>3</sup>	
		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
47°	1	0,000 122 8425	0,000 000 67854	0,000 002 05160	0,000 000 01113	0,000 000 05168	0,000 000 00865	0,000 000 00017	0,000 000 00125	0,000 000 00058			
48°	1	0,000 122 8137	0,000 000 70287	0,000 002 13449	0,000 000 01176	0,000 000 05542	0,000 000 00927	0,000 000 00018	0,000 000 00138	0,000 000 00065			
49°	1	0,000 122 7850	0,000 000 72816	0,000 002 21026	0,000 000 01243	0,000 000 05945	0,000 000 00995	0,000 000 00020	0,000 000 00153	0,000 000 00072			

γ

φ.	l	
	+	+
47°	7313,5370	
48°	7431,4483	
49°	7547,0958	

γ

φ.	y		xy		x <sup>2</sup> y		y <sup>3</sup>		x <sup>2</sup> y <sup>2</sup>		xy <sup>3</sup>		y <sup>4</sup>	
	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
47°	3461,5938	58,09344	0,97494	0,32498	0,01636	0,01636	0,00027	0,00055	0,00005					
48°	3584,8341	62,30358	1,08282	0,36094	0,01882	0,01882	0,00033	0,00065	0,00007					
49°	3712,9411	66,89368	1,20311	0,40104	0,02166	0,02166	0,00039	0,00078	0,00008					

Konforme Kegelprojektion mit 2 Längentreuen Parallelkreisen  
Mittelparallel: 48° Längentreue Parallelkreise: 47° u 49°

## Bessel'sches Ellipsoid

$$\begin{array}{r}
 + 308\,780,3666 \Delta\varphi \\
 + 74,3742 \Delta\varphi^2 \\
 + 3\,733,4110 l^1 \\
 + 120,3574 \Delta\varphi^3 \\
 - 200,4292 \Delta\varphi l^1 \\
 + 1,6277 \Delta\varphi^4 \\
 - 0,0485 \Delta\varphi^2 l^1 \\
 - 0,4039 l^2 \\
 + 0,1240 \Delta\varphi^5 \\
 - 0,0788 \Delta\varphi^3 l^1 \\
 + 0,0218 \Delta\varphi l^2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 y = + 207\,235,9800 l \\
 - 11\,125,5204 \Delta\varphi l \\
 - 2,6797 \Delta\varphi^2 l \\
 - 44,8389 l^2 \\
 + 2,4071 \Delta\varphi l^3 \\
 - 4,3357 \Delta\varphi^2 l \\
 - 0,0588 \Delta\varphi^3 l \\
 + 0,0029 l^4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \Delta\varphi = + 3\,238,547\,875 x \\
 - 0,252\,631 x^2 \\
 - 28,153\,073 y^2 \\
 - 0,132\,356 x^3 \\
 - 0,485\,084 xy^2 \\
 - 0,000\,528 x^2 \\
 - 0,004\,982 x^2 y^2 \\
 + 0,002\,109 y^3 \\
 + 0,000\,002 x^4 \\
 - 0,000\,068 x^3 y^2 \\
 + 0,000\,081 xy^3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 l = + 4\,825,416\,900 y \\
 + 83,895\,820 xy \\
 + 1,458\,632 x^2 y \\
 - 0,486\,211 y^3 \\
 + 0,025\,360 x^2 y \\
 - 0,025\,360 xy^2 \\
 + 0,000\,441 x^2 y \\
 - 0,000\,882 x^2 y^2 \\
 + 0,000\,088 y^3
 \end{array}$$

$$f = + 7\,431,8302 l$$

$$\begin{array}{r}
 f = + 3\,586,1679 y \\
 + 62,3410 xy \\
 + 1,0840 x^2 y \\
 - 0,3613 y^3 \\
 + 0,0188 x^2 y \\
 - 0,0188 xy^2 \\
 + 0,0003 x^2 y \\
 - 0,0007 x^2 y^2 \\
 + 0,0001 y^3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 m = + 0,999\,8481\,472 \\
 - 0,000\,0027\,583 \Delta\varphi \\
 + 0,001\,1714\,440 \Delta\varphi^2 \\
 + 0,000\,0212\,718 \Delta\varphi^3 \\
 + 0,000\,0019\,982 \Delta\varphi^4 \\
 + 0,000\,0000\,887 \Delta\varphi^5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 m = + 0,999\,8481\,472 \\
 - 0,000\,0008\,933 x \\
 + 0,000\,1228\,634 x^2 \\
 + 0,000\,0000\,078 y^2 \\
 + 0,000\,0007\,034 x^2 \\
 - 0,000\,0021\,360 xy^2 \\
 + 0,000\,0000\,118 x^3 \\
 - 0,000\,0000\,555 x^2 y^2 \\
 + 0,000\,0000\,093 x^4
 \end{array}$$

## Internationales Ellipsoid

$$\begin{array}{r}
 x = + 308\,825,7281 \Delta\varphi \\
 + 74,9285 \Delta\varphi^2 \\
 + 3\,734,0411 l^1 \\
 + 120,3709 \Delta\varphi^3 \\
 - 200,4587 \Delta\varphi l^1 \\
 + 1,6279 \Delta\varphi^4 \\
 - 0,0487 \Delta\varphi^2 l^1 \\
 - 0,4040 l^2 \\
 + 0,1240 \Delta\varphi^5 \\
 - 0,0803 \Delta\varphi^3 l^1 \\
 + 0,0209 \Delta\varphi l^2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 y = + 207\,270,9530 l \\
 - 11\,127,1545 \Delta\varphi l \\
 - 2,6997 \Delta\varphi^2 l \\
 - 44,8465 l^2 \\
 + 2,4075 \Delta\varphi l^3 \\
 - 4,3362 \Delta\varphi^2 l \\
 - 0,0586 \Delta\varphi^3 l \\
 + 0,0029 l^4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \Delta\varphi = + 3\,238,072\,183 x \\
 - 0,254\,401 x^2 \\
 - 28,144\,188 y^2 \\
 - 0,132\,293 x^3 \\
 - 0,484\,817 xy^2 \\
 - 0,000\,528 x^2 \\
 - 0,004\,978 x^2 y^2 \\
 + 0,002\,107 y^3 \\
 + 0,000\,002 x^4 \\
 - 0,000\,068 x^3 y^2 \\
 + 0,000\,081 xy^3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 l = + 4\,824,602\,699 y \\
 + 83,867\,511 xy \\
 + 1,457\,894 x^2 y \\
 - 0,485\,975 y^3 \\
 + 0,025\,343 x^2 y \\
 - 0,025\,343 xy^2 \\
 + 0,000\,440 x^2 y \\
 - 0,000\,880 x^2 y^2 \\
 + 0,000\,088 y^3
 \end{array}$$

$$f = + 7\,431,8302 l$$

$$\begin{array}{r}
 f = + 3\,585,5236 y \\
 + 62,3275 xy \\
 + 1,0834 x^2 y \\
 - 0,3611 y^3 \\
 + 0,0188 x^2 y \\
 - 0,0188 xy^2 \\
 + 0,0003 x^2 y \\
 - 0,0007 x^2 y^2 \\
 + 0,0001 y^3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 m = + 0,999\,8481\,506 \\
 - 0,000\,0027\,585 \Delta\varphi \\
 + 0,001\,1714\,184 \Delta\varphi^2 \\
 + 0,000\,0212\,732 \Delta\varphi^3 \\
 + 0,000\,0019\,981 \Delta\varphi^4 \\
 + 0,000\,0000\,887 \Delta\varphi^5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 m = + 0,999\,8481\,506 \\
 - 0,000\,0008\,932 x \\
 + 0,000\,1228\,248 x^2 \\
 + 0,000\,0000\,078 y^2 \\
 + 0,000\,0007\,030 x^2 \\
 - 0,000\,0021\,350 xy^2 \\
 + 0,000\,0000\,117 x^3 \\
 - 0,000\,0000\,555 x^2 y^2 \\
 + 0,000\,0000\,093 x^4
 \end{array}$$

*Stereographische Abbildung  
Besselsches Ellipsoid*

X

$\varphi$	$\Delta\varphi$	$\Delta\varphi^2$	$L^2$	$\Delta\varphi^2$	$\Delta\varphi L^2$	$\Delta\varphi^2$	$\Delta\varphi L^2$	$L^2$	$\Delta\varphi^2$	$\Delta\varphi L^2$	$\Delta\varphi L^2$
	+	+	+	+	-	-	-	+	+	-	-
47°	308 773,3174	75,0206	3 744,9894	60,1420	109,4403	0,0148	6,6630	0,2964	0,0143	0,0713	0,0617
48°	308 827,2531	74,8136	3 733,7862	60,0748	118,8439	0,0147	6,6441	0,2569	0,0143	0,0713	0,0609
49°	308 881,0270	74,5152	3 718,0315	60,0078	128,4153	0,0147	6,6171	0,2175	0,0143	0,0713	0,0598

Y

$\varphi$	$L$	$\Delta\varphi L$	$\Delta\varphi^2 L$	$L^3$	$\Delta\varphi^2 L$	$\Delta\varphi L^2$	$\Delta\varphi^2 L$	$L^2$
	+	-	-	-	-	-	-	+
47°	211 241,0213	10 948,1842	126,4007	24,9571	2,1384	1,7332	0,0486	0,1368
48°	207 267,4541	11 126,6380	124,1227	26,6094	2,1701	1,5313	0,0477	0,1417
49°	203 230,2421	11 301,7569	121,8023	28,1659	2,2012	1,3226	0,0468	0,1463

$\Delta\varphi$

$\varphi$	x	x²	y²	x²	xy²	x³	x²y²	y³	x³	x²y²	xy³
	+	-	-	-	-	-	+	±	+	-	+
47°	3238,621 811	0,254 836	27,180 304	0,066 123	0,650 929	0,000 0311	0,010 8582	0,003 5596	0,000 0024	0,000 2117	0,000 1918
48°	3238,056 092	0,254 000	28,143 077	0,066 004	0,683 689	0,000 0310	0,011 8194	0,003 8286	0,000 0024	0,000 2370	0,000 2123
49°	3237,492 474	0,252 855	29,143 732	0,065 884	0,718 969	0,000 0309	0,012 8824	0,004 1241	0,000 0024	0,000 2658	0,000 2354

L

$\varphi$	y	xy	x²y	y³	x²y	xy²	x³y	x²y²	y³
	+	+	+	-	+	-	+	-	+
47°	4733,929 017	79,459 497	1,624 591	0,541 530	0,032 1104	0,032 1104	0,000 6386	0,001 2772	0,000 1277
48°	4824,684 148	83,866 033	1,754 180	0,584 727	0,035 6028	0,035 6028	0,000 7264	0,001 4529	0,000 1453
49°	4920,527 525	88,588 645	1,897 120	0,632 373	0,039 5541	0,039 5541	0,000 8284	0,001 6569	0,000 1657

m

$\varphi$	1	$\Delta\varphi$	$L^2$	$\Delta\varphi^2$	$\Delta\varphi L^2$	$\Delta\varphi^2$	$\Delta\varphi L^2$	$L^2$
	+	+	+	+	-	+	+	+
47°	1	0,000 585 780	0,000 274 165	0,000 000 285	0,000 014 565	0,000 000 228	0,000 000 035	0,000 000 018
48°	1	0,000 585 848	0,000 263 886	0,000 000 284	0,000 014 507	0,000 000 228	0,000 000 035	0,000 000 014
49°	1	0,000 585 916	0,000 253 647	0,000 000 283	0,000 014 432	0,000 000 228	0,000 000 035	0,000 000 011

m

$\varphi$	1	x²	y²	xy²	x²y²	y³
	+	+	+	-	+	+
47°	1	0,000 061 4405	0,000 061 4405	0,000 000 02578	0,000 000 00003	0,000 000 00003
48°	1	0,000 061 4262	0,000 061 4262	0,000 000 02570	0,000 000 00004	0,000 000 00003
49°	1	0,000 061 4120	0,000 061 4120	0,000 000 02558	0,000 000 00006	0,000 000 00003

γ

$\varphi$	L	$\Delta\varphi L$	$\Delta\varphi^2 L$	$L^3$	$\Delta\varphi^2 L$	$\Delta\varphi L^2$
	+	+	-	+	+	-
47°	7315,5370	155,3211	0,067	0,685	0,032	0,020
48°	7431,4483	162,2019	0,066	0,669	0,032	0,021
49°	7547,0958	159,0332	0,064	0,653	0,031	0,022

γ

$\varphi$	y	xy	x²y	y³	x²y	xy²
	+	+	+	-	+	-
47°	3462,1765	83,45904	1,60829	0,53610	0,03216	0,03216
48°	3585,4391	87,66475	1,73881	0,57960	0,03565	0,03565
49°	3713,5693	92,19296	1,88263	0,62754	0,03959	0,03959

*Stereographische Abbildung  
Internation. Ellipsoid*

X

$\varphi_0$	$\Delta\varphi$	$\Delta\varphi^2$	$l^2$	$\Delta\varphi^2$	$\Delta\varphi l^2$	$\Delta\varphi^3$	$\Delta\varphi^2 l^2$	$l^4$	$\Delta\varphi^4$	$\Delta\varphi^3 l^2$	$\Delta\varphi l^4$
	+	+	+	+	-	-	-	+	+	+	-
47°	308 818,2849	75,5764	3 745,6198	60,1485	109,4543	0,0149	6,6646	0,2965	0,0143	0,0713	0,0617
48°	308 872,6304	75,3680	3 734,4163	60,0808	118,9601	0,0149	6,6457	0,2570	0,0143	0,0713	0,0609
49°	308 926,7927	75,0676	3 718,6605	60,0127	128,4326	0,0148	6,6186	0,2176	0,0143	0,0713	0,0598

Y

$\varphi_0$	$l$	$\Delta\varphi l$	$\Delta\varphi^2 l$	$l^3$	$\Delta\varphi^3 l$	$\Delta\varphi l^3$	$\Delta\varphi^2 l^2$	$\Delta\varphi^3 l^2$	$l^4$
	+	-	-	-	-	-	+	-	-
47°	211 276,5802	10 949,7796	126,4384	24,9609	2,1387	1,7337	0,0486	0,1369	0,0084
48°	207 302,4318	11 128,2725	124,1605	26,1136	2,1704	1,5318	0,0477	0,1418	0,0082
49°	203 264,6242	11 303,4315	121,8401	28,1683	2,2015	1,3230	0,0468	0,1463	0,0079

$\Delta\varphi$

$\varphi_0$	x	x <sup>2</sup>	y <sup>2</sup>	x <sup>3</sup>	xy <sup>2</sup>	x <sup>4</sup>	x <sup>2</sup> y <sup>2</sup>	y <sup>4</sup>	x <sup>5</sup>	x <sup>3</sup> y <sup>2</sup>	xy <sup>4</sup>
	+	-	-	-	-	+	-	+	+	-	+
47°	3238,150 229	0,256 612	27,171 773	0,066 091	0,650 589	0,000 0313	0,010 8502	0,003 5571	0,000 0024	0,000 2115	0,000 1916
48°	3237,580 483	0,255 770	28,134 196	0,065 971	0,683 330	0,000 0312	0,011 8107	0,003 8260	0,000 0024	0,000 2368	0,000 2121
49°	3237,012 857	0,254 616	29,134 486	0,065 851	0,718 590	0,000 0311	0,012 8730	0,004 1213	0,000 0024	0,000 2555	0,000 2352

l

$\varphi_0$	y	xy	x <sup>2</sup> y	y <sup>3</sup>	x <sup>2</sup> y <sup>2</sup>	xy <sup>3</sup>	x <sup>4</sup> y	x <sup>2</sup> y <sup>4</sup>	y <sup>5</sup>
	+	+	+	-	+	-	+	-	+
47°	4733,132 272	79,432 753	1,623 778	0,541 259	0,032 0887	0,032 0887	0,000 6386	0,001 2761	0,000 1276
48°	4823,870 088	83,837 734	1,753 299	0,584 433	0,035 5787	0,035 5787	0,000 7258	0,001 4516	0,000 1452
49°	4919,695 220	88,558 678	1,896 163	0,632 054	0,039 5273	0,039 5273	0,000 8277	0,001 6555	0,000 1655

m

$\varphi_0$	1	$\Delta\varphi^2$	$l^2$	$\Delta\varphi^4$	$\Delta\varphi l^2$	$\Delta\varphi^6$	$\Delta\varphi^3 l^2$	$l^4$
	+	+	+	+	-	+	+	+
47°	1	0,000 585 767	0,000 274 171	0,000 000 287	0,000 014 567	0,000 000 228	0,000 000 035	0,000 000 018
48°	1	0,000 585 835	0,000 263 892	0,000 000 286	0,000 014 509	0,000 000 228	0,000 000 035	0,000 000 014
49°	1	0,000 585 904	0,000 253 652	0,000 000 285	0,000 014 434	0,000 000 228	0,000 000 035	0,000 000 011

m

$\varphi_0$	1	x <sup>4</sup>	y <sup>4</sup>	xy <sup>4</sup>	x <sup>2</sup> y <sup>2</sup>	y <sup>6</sup>
	+	+	+	-	+	+
47°	1	0,000 061 4213	0,000 061 4213	0,000 000 02596	0,000 000 00003	0,000 000 00003
48°	1	0,000 061 4069	0,000 061 4069	0,000 000 02587	0,000 000 00004	0,000 000 00003
49°	1	0,000 061 3925	0,000 061 3925	0,000 000 02575	0,000 000 00004	0,000 000 00003

γ

$\varphi_0$	$l$	$\Delta\varphi l$	$\Delta\varphi^2 l$	$l^3$	$\Delta\varphi^3 l$	$\Delta\varphi l^3$
	+	+	-	+	+	-
47°	7313,5370	165,3211	0,058	0,485	0,032	0,020
48°	7431,4483	152,2019	0,066	0,669	0,032	0,021
49°	7547,0958	159,0332	0,065	0,653	0,031	0,022

γ

$\varphi_0$	y	xy	x <sup>2</sup> y	y <sup>3</sup>	x <sup>2</sup> y <sup>2</sup>	xy <sup>4</sup>
	+	+	+	-	+	-
47°	3461,5938	83,43152	1,60745	0,53582	0,03214	0,03214
48°	3584,8341	87,63573	1,73790	0,57930	0,03562	0,03562
49°	3712,9411	92,16231	1,88165	0,62722	0,03957	0,03957

Querachsige konforme Abbildung  
Besselsches Ellipsoid

X

$\varphi$	$\Delta\varphi$	$\Delta\varphi^2$	$\varphi^2$	$\Delta\varphi^3$	$\Delta\varphi^2$	$\Delta\varphi^2$	$\Delta\varphi^2$	$\varphi^2$	$\Delta\varphi^2$	$\Delta\varphi^2$	$\Delta\varphi^2$
	+	+	+	+	-	+	+	-	+	-	+
47°	308 775,3174	75,0206	3 744,9894	120,4330	194,0950	0,0093	4,3403	0,7345	0,0713	0,3814	0,1446
48°	308 827,2631	74,8136	3 733,7852	120,3834	200,4390	0,0092	4,3263	0,7323	0,0713	0,3938	0,1452
49°	308 881,0270	74,5152	3 718,0315	120,3339	206,7620	0,0091	4,3070	0,7292	0,0713	0,4062	0,1455

Y

$\varphi$	$\varphi$	$\Delta\varphi^2$	$\Delta\varphi^2$	$\varphi^2$	$\Delta\varphi^2$	$\Delta\varphi^2$	$\Delta\varphi^2$	$\Delta\varphi^2$	$\varphi^2$
	+	-	-	-	-	+	-	-	+
47°	211 241,0213	10 948,1842	2,6600	44,2621	8,5457	4,2951	0,0021	0,3121	0,0197
48°	207 267,4541	11 126,6380	2,6954	44,8411	8,6829	4,3646	0,0021	0,3122	0,0194
49°	203 230,2421	11 301,7569	2,7253	45,3468	8,8175	4,4329	0,0021	0,3198	0,0191

$\Delta\varphi$

$\varphi$	x	x <sup>2</sup>	y <sup>2</sup>	x <sup>3</sup>	xy <sup>2</sup>	x <sup>4</sup>	x <sup>2</sup> y <sup>2</sup>	y <sup>4</sup>	x <sup>4</sup>	x <sup>2</sup> y <sup>2</sup>	xy <sup>4</sup>
	+	-	-	-	-	+	-	+	+	-	+
47°	3238,521 811	0,254 836	27,180 304	0,132 451	0,451 947	0,000 0490	0,007 5911	0,002 4531	0,000 0094	0,000 1467	0,000 1332
48°	3238,056 092	0,254 000	28,143 077	0,132 304	0,484 787	0,000 0489	0,008 4346	0,002 6830	0,000 0094	0,000 1673	0,000 1504
49°	3237,492 474	0,252 855	29,143 732	0,132 158	0,520 148	0,000 0487	0,009 3752	0,002 9378	0,000 0094	0,000 1910	0,000 1699

l

$\varphi$	y	xy	x <sup>2</sup> y	y <sup>3</sup>	x <sup>2</sup> y	xy <sup>3</sup>	x <sup>2</sup> y	x <sup>2</sup> y <sup>2</sup>	y <sup>4</sup>
	+	+	+	-	+	-	+	-	+
47°	4733,929 017	79,459 497	1,333 736	0,444 579	0,025 6416	0,025 6416	0,000 4847	0,000 9694	0,000 0969
48°	4824,684 148	83,866 033	1,457 818	0,485 939	0,028 7752	0,028 7752	0,000 5595	0,001 1191	0,000 1119
49°	4920,527 525	88,588 645	1,594 940	0,531 647	0,032 3421	0,032 3421	0,000 6472	0,001 2944	0,000 1294

m

$\varphi$	1	$\Delta\varphi^2$	$\Delta\varphi^3$	$\Delta\varphi^2$	$\Delta\varphi^2$	$\varphi^2$
	+	+	+	+	-	+
47°	1	0,001 171 560	0,000 000 316	0,000 028 419	0,000 001 146	0,000 000 173
48°	1	0,001 171 697	0,000 000 315	0,000 028 332	0,000 001 146	0,000 000 172
49°	1	0,001 171 833	0,000 000 314	0,000 028 211	0,000 001 146	0,000 000 170

m

$\varphi$	1	x <sup>2</sup>	x <sup>2</sup>	x <sup>2</sup>	x <sup>2</sup> y <sup>2</sup>
	+	+	-	+	-
47°	1	0,000 122 8911	0,000 000 00859	0,000 000 00256	0,000 000 00022
48°	1	0,000 122 8525	0,000 000 00857	0,000 000 00256	0,000 000 00022
49°	1	0,000 122 8240	0,000 000 00853	0,000 000 00256	0,000 000 00023

γ

$\varphi$	l	$\Delta\varphi^2$	$\varphi^2$	$\Delta\varphi^2$
	+	+	-	+
47°	7313,5370	8,568	1,337	0,210
48°	7431,4483	8,707	1,307	0,212
49°	7547,0958	8,844	1,276	0,215

γ

$\varphi$	y	xy	x <sup>2</sup> y	y <sup>3</sup>	x <sup>2</sup> y	xy <sup>3</sup>
	+	+	+	-	+	-
47°	3462,1755	58,11300	1,40087	0,46696	0,02583	0,02583
48°	3585,4391	62,32461	1,52385	0,50795	0,02898	0,02898
49°	3713,5693	66,85870	1,65983	0,55328	0,03256	0,03256

Querachsige konforme Abbildung  
Internation. Ellipsoid

X

$\varphi_0$	$\Delta\varphi$	$\Delta\varphi^2$	$l^2$	$\Delta\varphi^3$	$\Delta\varphi l^2$	$\Delta\varphi^4$	$\Delta\varphi^2 l^2$	$l^4$	$\Delta\varphi^5$	$\Delta\varphi^3 l^2$	$\Delta\varphi l^4$
	+	+	+	+	-	+	+	-	+	-	+
47°	308 818,2849	75,5754	3 745,6198	120,4469	194,1233	0,0093	4,3407	0,7347	0,0713	0,3814	0,1446
48°	308 872,6304	75,3680	3 734,4153	120,3969	200,4685	0,0093	4,3266	0,7325	0,0713	0,3939	0,1452
49°	308 926,7927	75,0676	3 718,6605	120,3470	206,7926	0,0092	4,3073	0,7293	0,0713	0,4062	0,1455

Y

$\varphi_0$	$l$	$\Delta\varphi l$	$\Delta\varphi^2 l$	$l^3$	$\Delta\varphi^3 l$	$\Delta\varphi l^3$	$\Delta\varphi^2 l^2$	$\Delta\varphi^2 l^2$	$l^4$
	+	-	-	-	+	+	-	-	+
47°	211 276,5802	10 949,7786	2,6797	44,2695	8,5457	4,2958	0,0021	0,3122	0,0197
48°	207 302,4318	11 128,2725	2,7154	44,8487	8,6840	4,3653	0,0021	0,3162	0,0194
49°	203 264,6242	11 303,4315	2,7467	45,3545	8,8186	4,4336	0,0021	0,3198	0,0191

$\Delta\varphi$

$\varphi_0$	x	$x^2$	$y^2$	$x^3$	$xy^2$	$x^4$	$x^2 y^2$	$y^4$	$x^5$	$x^3 y^2$	$xy^4$
	+	-	-	-	-	+	-	+	+	-	+
47°	3238,150 229	0,256 612	27,171 773	0,132 388	0,451 698	0,000 0493	0,007 5857	0,002 4514	0,000 0094	0,000 1466	0,000 1331
48°	3237,580 483	0,255 770	28,134 196	0,132 241	0,484 521	0,000 0492	0,008 4286	0,002 6811	0,000 0094	0,000 1672	0,000 1502
49°	3237,012 957	0,254 616	29,134 486	0,132 093	0,519 862	0,000 0490	0,009 3685	0,002 9356	0,000 0094	0,000 1908	0,000 1698

l

$\varphi_0$	y	xy	$x^2 y$	$y^3$	$x^3 y$	$xy^3$	$x^4 y$	$x^2 y^3$	$y^5$
	+	+	+	-	+	-	+	-	+
47°	4733,132 272	79,432 753	1,333 063	0,444 354	0,025 6244	0,025 6244	0,000 4843	0,000 2686	0,000 0969
48°	4823,870 088	83,837 734	1,457 080	0,485 693	0,028 7559	0,028 7559	0,000 5591	0,001 1181	0,000 1118
49°	4919,695 220	88,558 678	1,594 131	0,531 377	0,032 3203	0,032 3203	0,000 5467	0,001 2933	0,000 1293

m

$\varphi_0$	1	$\Delta\varphi^2$	$\Delta\varphi^3$	$\Delta\varphi l^2$	$\Delta\varphi^4$	$\Delta\varphi^2 l^2$	$l^4$
	+	+	+	+	+	-	+
47°	1	0,001 171 534	0,000 000 319	0,000 028 419	0,000 001 146	0,000 001 484	0,000 000 173
48°	1	0,001 171 671	0,000 000 318	0,000 028 332	0,000 001 146	0,000 001 532	0,000 000 172
49°	1	0,001 171 808	0,000 000 316	0,000 028 211	0,000 001 146	0,000 001 580	0,000 000 170

m

$\varphi_0$	1	$x^2$	$x^3$	$x^4$	$x^2 y^2$
	+	+	-	+	-
47°	1	0,000 122 8425	0,000 000 00865	0,000 000 00256	0,000 000 00022
48°	1	0,000 122 8137	0,000 000 00862	0,000 000 00256	0,000 000 00022
49°	1	0,000 122 7850	0,000 000 00858	0,000 000 00256	0,000 000 00023

$\gamma$

$\varphi_0$	$l$	$\Delta\varphi l$	$l^3$	$\Delta\varphi l^3$
	+	+	-	+
47°	7313,5370	8,568	1,337	0,210
48°	7431,4483	8,707	1,307	0,212
49°	7547,0958	8,844	1,276	0,215

$\gamma$

$\varphi_0$	y	xy	$x^2 y$	$y^3$	$x^3 y$	$xy^3$
	+	+	+	-	+	-
47°	3461,5938	58,09344	1,40017	0,46672	0,02582	0,02582
48°	3584,8341	62,30358	1,52309	0,50770	0,02896	0,02896
49°	3712,9411	66,83608	1,65900	0,55300	0,03254	0,03254

(n)

n	000		-001		002		003		004		005		006		007		008		009		n	
	000	009	008	007	006	005	004	003	002	001	000	009	008	007	006	005	004	003	002	001		000
0,00	0,000 00	50	000 50	50	001 00	50	001 50	49	001 99	50	002 49	49	002 98	50	003 48	49	003 97	49	004 46	49	004 95	0,99
0,01	004 95	49	005 44	49	005 33	49	006 42	48	006 90	49	007 39	48	007 87	49	008 36	48	008 84	48	009 32	48	009 80	0,98
0,02	009 80	48	010 28	48	010 76	47	011 23	48	011 71	47	012 18	48	012 66	48	013 14	47	013 61	47	014 08	47	014 55	0,97
0,03	014 55	47	015 02	47	015 49	46	015 95	47	016 42	47	016 89	46	017 35	47	017 82	46	018 28	46	018 74	46	019 20	0,96
0,04	019 20	46	019 66	46	020 12	46	020 58	45	021 03	46	021 49	45	021 94	46	022 40	45	022 85	45	023 30	45	023 75	0,95
0,05	023 75	45	024 20	45	024 65	45	025 10	44	025 54	45	025 99	44	026 43	44	026 87	45	027 32	44	027 76	44	028 20	0,94
0,06	028 20	44	028 64	44	029 08	44	029 52	43	029 95	44	030 39	43	030 82	44	031 26	43	031 69	43	032 12	43	032 55	0,93
0,07	032 55	43	032 98	43	033 41	43	033 84	42	034 26	43	034 69	42	035 11	43	035 54	42	035 96	42	036 38	42	036 80	0,92
0,08	036 80	42	037 22	42	037 64	42	038 06	41	038 47	42	038 89	41	039 30	42	039 72	41	040 13	41	040 54	41	040 95	0,91
0,09	040 95	41	041 36	41	041 77	41	042 18	40	042 58	41	042 99	40	043 39	41	043 80	40	044 20	40	044 60	40	0,045 00	0,90
0,10	0,045 00	40	045 40	40	045 80	40	046 20	39	046 59	40	046 99	39	047 38	39	047 77	40	048 17	39	048 56	39	048 95	0,89
0,11	048 95	39	049 34	39	049 73	39	050 12	38	050 50	39	050 89	38	051 27	39	051 66	38	052 04	38	052 42	38	052 80	0,88
0,12	052 80	38	053 18	38	053 56	38	053 94	37	054 31	38	054 69	37	055 06	38	055 44	37	055 81	37	056 18	37	056 55	0,87
0,13	056 55	37	056 92	37	057 29	37	057 66	36	058 02	37	058 39	36	058 75	37	059 12	36	059 48	36	059 84	36	060 20	0,86
0,14	060 20	36	060 56	36	060 92	36	061 28	35	061 63	36	061 99	35	062 34	36	062 70	35	063 05	35	063 40	35	063 75	0,85
0,15	063 75	35	064 10	35	064 45	35	064 80	34	065 14	35	065 49	34	065 83	35	066 18	34	066 52	34	066 86	34	067 20	0,84
0,16	067 20	34	067 54	34	067 88	34	068 22	33	068 56	34	068 89	33	069 22	34	069 56	33	069 89	33	070 22	33	070 55	0,83
0,17	070 55	33	070 88	33	071 21	33	071 54	32	071 86	33	072 19	32	072 51	33	072 84	32	073 16	32	073 48	32	073 80	0,82
0,18	073 80	32	074 12	32	074 44	32	074 76	31	075 07	32	075 39	31	075 70	32	076 02	31	076 33	31	076 64	31	076 95	0,81
0,19	076 95	31	077 26	31	077 57	31	077 88	30	078 18	31	078 49	30	078 79	31	079 10	30	079 40	30	079 70	30	0,080 00	0,80
0,20	0,080 00	30	080 30	30	080 60	30	080 90	29	081 19	30	081 49	29	081 78	30	082 08	29	082 37	29	082 66	29	082 95	0,79
0,21	082 95	29	083 24	29	083 53	29	083 82	28	084 10	29	084 39	28	084 67	29	084 96	28	085 24	28	085 52	28	085 80	0,78
0,22	085 80	28	086 08	28	086 36	28	086 64	27	086 91	28	087 19	27	087 46	28	087 74	27	088 01	27	088 28	27	088 55	0,77
0,23	088 55	27	088 82	27	089 09	27	089 36	26	089 62	27	089 89	26	090 15	27	090 42	26	090 68	26	090 94	26	091 20	0,76
0,24	091 20	26	091 46	26	091 72	26	091 98	25	092 23	26	092 49	25	092 74	26	093 00	25	093 25	25	093 50	25	093 75	0,75
0,25	093 75	25	094 00	25	094 25	25	094 50	24	094 74	25	094 99	24	095 23	25	095 48	24	095 72	24	095 96	24	096 20	0,74
0,26	096 20	24	096 44	24	096 68	24	096 92	23	097 15	24	097 39	23	097 62	24	097 86	23	098 09	23	098 32	23	098 55	0,73
0,27	098 55	23	098 78	23	099 01	23	099 24	22	099 46	23	099 69	22	099 91	23	100 14	22	100 36	22	100 58	22	100 80	0,72
0,28	100 80	22	101 02	22	101 24	22	101 46	21	101 67	22	101 89	21	102 10	22	102 32	21	102 53	21	102 74	21	102 95	0,71
0,29	102 95	21	103 16	21	103 37	21	103 58	20	103 78	21	103 99	20	104 19	21	104 40	20	104 60	20	104 80	20	0,105 00	0,70
0,30	0,105 00	20	105 20	20	105 40	20	105 60	19	105 79	20	105 99	19	106 18	20	106 38	19	106 57	19	106 76	19	106 95	0,69
0,31	106 95	19	107 14	19	107 33	19	107 52	18	107 70	19	107 89	18	108 07	19	108 26	18	108 44	18	108 62	18	108 80	0,68
0,32	108 80	18	108 98	18	109 16	18	109 34	17	109 51	18	109 69	17	109 86	18	110 04	17	110 21	17	110 38	17	110 55	0,67
0,33	110 55	17	110 72	17	110 89	17	111 06	16	111 22	17	111 39	16	111 55	17	111 72	16	111 88	16	112 04	16	112 20	0,66
0,34	112 20	16	112 36	16	112 52	16	112 68	15	112 83	16	112 99	15	113 14	16	113 30	15	113 45	15	113 60	15	113 75	0,65
0,35	113 75	15	113 90	15	114 05	15	114 20	14	114 34	15	114 49	14	114 63	15	114 78	14	114 92	14	115 06	14	115 20	0,64
0,36	115 20	14	115 34	14	115 48	14	115 62	13	115 75	14	115 89	13	116 02	14	116 16	13	116 29	13	116 42	13	116 55	0,63
0,37	116 55	13	116 68	13	116 81	13	116 94	12	117 06	13	117 19	12	117 31	13	117 44	12	117 56	12	117 68	12	117 80	0,62
0,38	117 80	12	117 92	12	118 04	12	118 16	11	118 27	12	118 39	11	118 50	12	118 62	11	118 73	11	118 84	11	118 95	0,61
0,39	118 95	11	119 06	11	119 17	11	119 28	10	119 38	11	119 49	10	119 59	11	119 70	10	119 80	10	119 90	10	0,120 00	0,60
0,40	0,120 00	10	120 10	10	120 20	10	120 30	9	120 39	10	120 49	9	120 58	10	120 68	9	120 77	9	120 86	9	120 95	0,59
0,41	120 95	9	121 04	9	121 13	9	121 22	8	121 30	9	121 39	8	121 47	9	121 56	8	121 64	8	121 72	8	121 80	0,58
0,42	121 80	8	121 88	8	121 96	8	122 04	7	122 11	8	122 19	7	122 26	8	122 34	7	122 41	7	122 48	7	122 55	0,57
0,43	122 55	7	122 62	7	122 69	7	122 76	6	122 82	7	122 89	6	122 95	7	123 02	6	123 09	6	123 16	6	123 23	0,56
0,44	123 20	6	123 26	6	123 32	6	123 38	5	123 43	6	123 49	5	123 54	6	123 60	5	123 65	5	123 70	5	123 75	0,55
0,45	123 75	5	123 80	5	123 85	5	123 90	4	123 94	5	123 99	4	124 03	5	124 08	4	124 12	4	124 16	4	124 20	0,54
0,46	124 20	4	124 24	4	124 28	4	124 32	3	124 35	4	124 39	3	124 42	4	124 46	3	124 49	3	124 52	3	124 55	0,53
0,47	124 55	3	124 58	3	124 61	3	124 64	2	124 66	3	124 69	2	124 71	3	124 74	2	124 76	2	124 78	2	124 80	0,52
0,48	124 80	2	124 82	2	124 84	2	124 86	1	124 87	2	124 89	1	124 90	2	124 92	1	124 93	1	124 94	1	124 95	0,51
0,49	124 95	1	124 96	1	124 97	1	124 98	0	124 98	1	124 99	0	124 99	1	125 00	0	125 00	0	125 00	0	0,125 00	0,50

Weitere Publikationen:

I. Der Österreichische Grundkataster, 66 Seiten, 1948      Preis S 10.—  
zu beziehen im Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen,  
Wien, VIII., Krotenthallergasse 3

II. Behelf zur Prüfung für den höheren technischen Vermessungsdienst:

Heft 1: Fortführung 1. Teil, 55 Seiten, 1949      Preis S 10.—  
Heft 2: Fortführung 2. Teil, Bodenschätzung, 46 Seiten, 1949      Preis S 10.—  
Heft 3: Höhere Geodäsie, 81 Seiten, 1949      Preis S 10.—  
Heft 4: Triangulierung, 46 Seiten, 1949      Preis S 7.—  
Heft 5: Neuvermessung, Nivellement und topographische Landesaufnahme,  
104 Seiten, 1949      Preis S 16.—  
Heft 6: Photogrammetrie und Kartographie      Preis S 10.—

III. Dienstvorschriften des Bundesvermessungsdienstes:

Heft 1: Benennungen, Zeichen und Abkürzungen im Österr. Vermessungs-  
dienst, 38 Seiten, Prov. Ausg. 1947      Preis S 5.—  
Heft 2: Allg. Bestimmungen über Dienstvorschriften, Rechentafeln, Muster  
und sonstige Drucksorten, 50 Seiten, Prov. Ausg. 1947      Preis S 6.50  
Heft 8: Die österreichischen Meridianstreifen, 62 Seiten, 3. Aufl. 1949  
Preis S 8.—  
Heft 14: Fehlergrenzen und Hilfstabellen für Neuvermessungen, 16 Seiten,  
2. Aufl. 1937      Preis S 2.50  
Heft 15: Hilfstabellen für Neuvermessungen, 36 Seiten, 1. Aufl. 1949  
Preis S 5.—  
Heft 48: Behelfe für die Anlage von Oleaten bei der Neuaufnahme und  
Kartenrevision, 17 Seiten, 4. Aufl. 1948      Preis S 12.—

II. und III. zu beziehen in der Amtsbücherei des  
Bundesamtes für Eich- u. Vermessungswesen, Wien, I., Hohenstaufengasse 17