



Sonderheft 6
der **Österreichischen Zeitschrift**
für **Vermessungswesen**

**Entwicklung von Formeln zur
praktischen Anwendung der flächen-
treuen Abbildung kleiner Bereiche
des Rotationsellipsoids in die Ebene**

von

F. Hauer, Wien



Herausgeber, Eigentümer und Verleger:
Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen
Gruppe Vermessungswesen
Wien, VIII., Friedrich-Schmidt-Platz 3

WIEN 1949

Bisher sind folgende Sonderhefte erschienen:

Sonderheft 1: Festschrift Eduard Dolezal, 198 Seiten, Neuauflage 1948
Preis S 18.—

Sonderheft 2: Die Zentralisierung des Vermessungswesens in ihrer Bedeutung für die topographische Landesaufnahme, 40 Seiten, 1935
wird neu aufgelegt

Sonderheft 3: Ledersteger, Der schrittweise Aufbau des europäischen Lotabweichungssystems und sein bestanschließendes Ellipsoid
140 Seiten, 1948 Preis S 25.—

Sonderheft 4: Zaar, Zweimedienphotogrammetrie, 40 Seiten, 1948
Preis S 18.—

Sonderheft 5: Rinner, Abbildungsgesetz und Orientierungsaufgaben in der Zweimedienphotogrammetrie, 45 Seiten, 1948 Preis S 18.—

Sonderheft 6: Hauer, Entwicklung von Formeln zur praktischen Anwendung der flächentreuen Abbildung kleiner Bereiche des Rotationsellipsoids in die Ebene, 32 Seiten, 1949 Preis S 15.—

Sonderheft Ledersteger: Numerische Untersuchungen über die Perioden
7 u. 8: der Polbewegung, 59 Seiten,
Zur Analyse der Laplaceschen Widersprüche, 22 Seiten, 1949
Preis S 25.—

Weitere Publikationen:

Tachymetrische Hilfstafel für sexagesimale Kreisteilung, 20 Seiten
Normformat A 5 (148×210 mm) Preis S 10.—

Tabuliert sind die Werte für $\cos^2 \alpha$ und $\frac{1}{2} \sin^2 \alpha$ auf vier Dezimalstellen von 0° bis 45° von Minute zu Minute. Daher keine Interpolation erforderlich. Infolge des praktischen Taschenformates und der besonders widerstandsfähigen Ausstattung ist die Tafel auch im Gelände verwendbar.

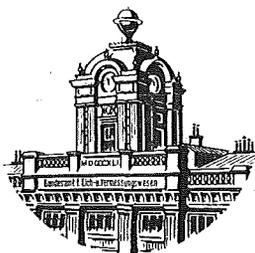
Sämtlich zu beziehen beim
Österr. Verein für Vermessungswesen, Wien, VIII., Friedrich-Schmidtplatz 3

Sonderheft 6
der **Österreichischen Zeitschrift**
für **Vermessungswesen**

**Entwicklung von Formeln zur
praktischen Anwendung der flächen-
treuen Abbildung kleiner Bereiche
des Rotationsellipsoids in die Ebene**

von

F. Hauer, Wien



Herausgeber, Eigentümer und Verleger:
Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen
Gruppe Vermessungswesen
Wien, VIII., Friedrich-Schmidt-Platz 3

WIEN 1949

Druck: Bundesamt für Eich- u. Vermessungswesen (Landesaufnahme), Wien

Entwicklung von Formeln
zur praktischen Anwendung der flächentreuen Abbildung kleiner Bereiche
des Rotationsellipsoids in die Ebene.

Von F. Hauer, Wien.

Ebenso wie jene nahezu winkeltreuen Abbildungen kleiner Bereiche des Rotationsellipsoids in die Ebene, von denen die Gaussische Meridianstreifenprojektion die bekannteste ist, dem Geodäten ein vorzügliches Hilfsmittel bei der Verarbeitung seiner Triangulationen bieten, sollen die fast flächentreuen Abbildungen kleiner Bereiche des Rotationsellipsoids allen jenen, die an äquivalenten Projektionen größeren Maßstabes interessiert sind, für ihre Zwecke wertvoll sein. Die allgemeinen Abbildungsgleichungen dieser Projektionssysteme geringster Streckenverzerrung sowie Formeln für die Untersuchung der bei diesen Abbildungen auftretenden Verzerrungen wurden in zwei vorangehenden Abhandlungen ¹⁾ entwickelt. Da es jedoch wahrscheinlich ist, daß manchem Interessenten diese Abhandlungen nicht mehr oder nur schwer zugänglich sind, sollen im Nachfolgenden die Gedankengänge bei den allgemeinen Entwicklungen für diese Abbildungen nochmals kurz zusammengefaßt werden, bevor auf den eigentlichen Zweck dieser Arbeit eingegangen wird, nämlich auf die Herleitung von Formeln der flächentreuen Abbildungen kleiner Bereiche des Rotationsellipsoids für den Gebrauch in der Praxis.

1. Die allgemeinen Abbildungsgleichungen.

Die Abbildung von Teilen des Erdellipsoids in die Ebene soll so erfolgen, daß, abgesehen vom Maßstab der Abbildung, die Flächenmaße möglichst unverändert in die Ebene übertragen werden. Die Abbildung muß also nicht streng flächentreu erfolgen; es wird vielmehr ausreichen, wenn die Flächenverzerrung so klein ist, daß sie bei der praktischen Anwendung der Karte vernachlässigt werden kann. Die Forderung nach möglichster Flächentreue hat aber, da ein Rotationsellipsoid in die Ebene nicht verbiegbar ist, Strecken- und Winkelverzerrungen im Gefolge. Aber auch diese Verzerrungen sollen möglichst klein gehalten werden und im Gesamtbereich der Karte ein gewisses Ausmaß nicht überschreiten. Diese letztere Forderung ist natürlich nur dann erfüllbar, wenn der abzubildende Bereich selbst gewisse Grenzen nicht überschreitet. Es wird sich also um die Herleitung aphyllaktischer Abbildungen handeln, die nahezu flächentreu sind und bei denen auch die Winkel- und Streckenverzerrungen durch Stellung entsprechender Forderungen an die Abbildungen innerhalb zulässiger Ausmaße bleiben.

Im Innern des abzubildenden Bereiches am Rotationsellipsoid werde ein Zentralpunkt Z gewählt; der Meridian durch ihn sei der Mittelmeridian,

¹⁾ Zeitschr. f. Vermessungsw., 70. Jgg. S. 194-215, 1941; F. Hauer, Flächentreue Abbildung kleiner Bereiche des Rotationsellipsoids in die Ebene durch Systeme geringster Streckenverzerrung; ebenda, 72. Jgg. S. 179-189, 1943; F. Hauer, Entwicklung der flächentreuen Abbildung kleiner Bereiche des Rotationsellipsoids in die Ebene bis einschließlich Glieder 4. Ordnung.

der Parallelkreis durch ihn der Mittelparallel des abzubildenden Bereiches. In der Karte soll dem Zentralpunkte Z am Ellipsoid der Ursprung O eines rechtwinkligen Koordinatensystems entsprechen. Die Ordinatenachse soll die Tangente an das Bild des Mittelmeridians im Zentralpunkte, die Abszissenachse die Normale zur Ordinatenachse im Ursprung sein.

Es soll φ die geographische Breite des abzubildenden Punktes Q am Ellipsoid, λ seine vom Mittelmeridian aus positiv nach West hin zu zählende geographische Länge bedeuten; x und y seien die Koordinaten des Bildpunktes Q' in der Ebene, wobei y positiv gegen Nord und x positiv gegen West hin gezählt werden soll; weiters werde mit m die Länge des Meridianbogens am Ellipsoid zwischen den Breiten φ und φ_0 der Punkte Q und Z , mit p die Länge des Mittelparallels zwischen dem Mittelmeridian und dem Meridian der Länge λ bezeichnet; m soll positiv gegen Nord, p positiv nach West hin gezählt werden, beide ausgedrückt in Einheiten des Äquatorradius a am Rotationsellipsoid; schließlich sollen der Reihe nach $\mathcal{N}, Q, \mathcal{N}; \mathcal{N}_0, Q_0, \mathcal{N}_0$ der Parallelkreisradius, der Krümmungsradius der Meridianellipse und der Querkrümmungsradius des Ellipsoids in den Punkten Q bzw. Z sein.

Die Abbildung möge durch die Abbildungsgleichungen

$$x = x(m, p), y = y(m, p)$$

vollzogen werden, von denen zunächst nur gefordert wird, daß die Abbildungsfunktionen $x(m, p)$, $y(m, p)$ analytische Funktionen ihrer Argumente und daher in Umgebung des Kartenursprungs O durch konvergente Potenzreihen darstellbar seien.

Wählt man als kleinste, für die Abbildung in Betracht kommende Maßstabsgrenze $1 : 10^5$, so ergibt sich - wie aus den tieferstehenden Überlegungen zu entnehmen ist -, daß es sich bei der Anwendung dieser Abbildungen höchstens um Länder mittlerer Größe, wie etwa Deutschland, Frankreich, Spanien, oder um Teile von solchen handeln kann. Solche Länder haben größte Nord-Süd- bzw. Ost-West-Erstreckungen von rund 1000 km, so daß sich für die Größen m und p Maximalbeträge von rund 500 km ergeben, also ausgedrückt in Einheiten des Äquatorradius Größen von rund $1/13$. Es kann daher mit Sicherheit angenommen werden, daß sich die Koordinaten x, y jedes beliebigen Bildpunktes dieser Abbildung durch je eine nach Potenzen von m, p fortschreitende Reihe entwickeln lassen, deren Konvergenz außer Frage steht. Im Hinblick auf die großen Dimensionen einer solchen Karte - sie würde für das angeführte Beispiel ein Ausmaß von 10 mal 10 Meter haben - wird es sich empfehlen, immer nur Teile solcher Länder um einen geeignet gewählten Zentralpunkt abzubilden, wodurch nicht nur die Konvergenz der anzusetzenden Potenzreihen erhöht wird, sondern auch die Maximalbeträge der unvermeidlichen Winkel- und Streckenverzerrungen verkleinert werden.

Es können also für x und y Potenzreihen der Form

$$x = A_{00} + A_{10} m + A_{01} p + A_{20} m^2 + A_{11} m p + A_{02} p^2 + \dots,$$

$$y = B_{00} + B_{10} m + B_{01} p + B_{20} m^2 + B_{11} m p + B_{02} p^2 + \dots$$

angesetzt werden, in denen die Koeffizienten $A_{00}, A_{10}, A_{01}, \dots; B_{00}, B_{10}, B_{01}, \dots$ so zu bestimmen sind, daß die Abbildung die an sie gestellten Forderungen erfüllt.

Durch die Festsetzung, daß dem Zentralpunkte Z am Ellipsoid der Ursprung O des rechtwinkligen Koordinatensystems entsprechen soll, sind die in den beiden Reihen für x und y auftretenden koeffizientierten nullter Ordnung bestimmt. Soll nämlich in den voranstehenden Gleichungen für $m = 0$ und $p = 0$ auch $x = 0$ und $y = 0$ sein, so müssen diese Koeffizienten mit

$$A_{00} = 0; B_{00} = 0$$

gewählt werden.

Bezeichnet man nach Tissot²⁾ mit

$$h = \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial m} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial m} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

das Maß der Streckenverzerrung in der Richtung des Meridians und mit

$$k = \frac{1}{\lambda} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\lambda_0}{\lambda} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

das Maß der Streckenverzerrung in der Richtung des Parallelkreises, weiter mit

$$\sigma = \frac{1}{\rho \lambda} \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) = \frac{\lambda_0}{\lambda} \left(\frac{\partial x}{\partial \rho} \frac{\partial y}{\partial m} - \frac{\partial x}{\partial m} \frac{\partial y}{\partial \rho} \right)$$

das Maß der Flächenverzerrung und mit

$$\sin J = \frac{1}{\rho \lambda h k} \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) = \frac{1}{h k} \frac{\lambda_0}{\lambda} \left(\frac{\partial x}{\partial m} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial y}{\partial m} \frac{\partial y}{\partial \rho} \right)$$

den Sinus jenes Winkels, um den der im Urbild rechte Winkel zwischen den Meridianen und Parallelkreisen bei der Abbildung in die Ebene verzerrt wird, schließlich mit a und b die aus der Doppelgleichung

$$(a \pm b)^2 = h^2 + k^2 \pm 2\sigma$$

zu berechnenden Halbachsen der Tissotschen Indikatrix und mit δ die aus dem Ausdrücke

$$\sin \frac{1}{2} \delta = - \frac{a-b}{a+b}$$

zu bestimmende Maximalwinkelverzerrung, so können die Koeffizienten der Glieder erster Ordnung aus den Bedingungen

$$h=1, k=1,$$

d.h. aus den Forderungen bestimmt werden, daß die Abbildung in den Gliedern erster Ordnung streckentreu sei. Sie ergeben sich mit

²⁾ Man vgl. hierzu L. Driencourt - J. Laborde, *Traité des projections des cartes géographiques*, Paris 1932, Premier fascicule, p. 15-53.

$$A_{10} = 0, A_{01} = \frac{\lambda}{\lambda_0}; B_{10} = 1, B_{01} = 0. \text{ } ^3)$$

Die Koeffizienten der Glieder zweiter Ordnung erhält man aus den Forderungen, daß die Verzerrungen in den Bildpunkten symmetrisch zur x- und y-Achse gleich groß seien, daß $\bar{O} = 1$ und daß $J = 0$ sei mit

$$\begin{aligned} A_{20} &= 0, A_{11} = 0, A_{02} = 0; \\ B_{20} &= 0, B_{11} = 0, B_{02} = \frac{\sin \varphi_0}{2\lambda_0}. \end{aligned}$$

Sie erfüllen, außer den oben gestellten Bedingungen auch noch jene $h = 1$ und $k = 1$, d.h. die Abbildung ist bis Glieder zweiter Ordnung einschließlich streckentreu, wie leicht erprobt werden kann.

Werden den bis Glieder zweiter Ordnung einschließlich entwickelten Abbildungsgleichungen die noch unbestimmten Glieder dritter Ordnung angefügt, so erhält man

$$\begin{aligned} x &= \frac{\lambda}{\lambda_0} p + A_{30} m^3 + A_{21} m^2 p + A_{12} m p^2 + A_{03} p^3, \\ y &= m + \frac{\sin \varphi_0}{2\lambda_0} p^2 + B_{30} m^3 + B_{21} m^2 p + B_{12} m p^2 + B_{03} p^3. \end{aligned}$$

Durch die Forderungen, daß bis einschließlich Glieder dritter Ordnung die Abbildung flächentreu und ihr Netz rechtschnittig sei sowie daß in zum Mittelmeridian und Mittelparallel symmetrisch gelegenen Punkten gleiche Streckenverzerrung herrsche, bestimmen sich die sieben Koeffizienten $A_{30}, A_{21}, A_{12}, A_{03}; B_{21}, B_{12}, B_{03}$ mit

$$\begin{aligned} A_{30} &= 0, A_{21} = -3B_{30}, A_{12} = 0, & A_{03} &= -\frac{1}{3} \left(3B_{30} + \frac{1}{2 \cos^2 \varphi_0} \right); \\ B_{21} &= 0, & B_{12} &= 3B_{30} + \frac{\cos 2 \varphi_0}{2 \cos^2 \varphi_0}, B_{03} = 0, \end{aligned}$$

so daß die Abbildungsgleichungen nun die Form

$$\begin{aligned} x &= \frac{\lambda}{\lambda_0} p - 3B_{30} m^2 p - \frac{1}{3} \left(3B_{30} + \frac{1}{2 \cos^2 \varphi_0} \right) p^3, \\ y &= m + \frac{\sin \varphi_0}{2\lambda_0} p^2 + B_{30} m^3 + \left(3B_{30} + \frac{\cos 2 \varphi_0}{2 \cos^2 \varphi_0} \right) m p^2 \end{aligned}$$

annehmen; in ihnen ist nur mehr der Koeffizient B_{30} unbestimmt. Seine Bestimmung kann aus einer allgemeinen Forderung an die Abbildung nicht mehr vorgenommen werden. Dieser restliche Koeffizient kann nur durch gewisse Annahmen über die Gestalt des zur Abbildung gelangenden Landes bzw. Landesteiles geeignet festgelegt werden.

³⁾ Die Bedingungen $h = 1, k = 1$ wären auch bei einer Vertauschung der Werte der Koeffizienten mit gleichen Indizes, nämlich für

$$A_{10} = 1, A_{01} = 0; B_{10} = 0, B_{01} = \frac{\lambda}{\lambda_0}$$

erfüllt. Diese Ansätze würden jedoch ein negatives Vorzeichen im Werte für \bar{O} ergeben und, da dies einer Umlegung der Winkel entspricht, zu kartographisch unbrauchbaren Abbildungen führen.

2. Die Projektionssysteme geringster Streckenverzerrung.

Berechnet man aus den voranstehenden Abbildungsgleichungen mit Hilfe der Formeln für h und k die Streckenverzerrung im Meridian und im Parallel, so ergibt sich

$$h = 1 + 3B_{30}m^2 + (3B_{30} + \frac{1}{2})p^2,$$

$$k = 1 - 3B_{30}m^2 - (3B_{30} + \frac{1}{2})p^2.$$

Diesen Gleichungen entnimmt man zunächst, daß die Forderung nach Symmetrie der Abbildung zum Mittelmeridian und zum Mittelparallel erfüllt ist; denn es ändern sich weder h noch k , wenn $+m$ mit $-m$ und wenn $+p$ mit $-p$ vertauscht wird. Sie sind aber auch zur Bestimmung des noch fehlenden Koeffizienten B_{30} vorzüglich geeignet.

a) Sphäroidische Kalotte.

Erstreckt sich der abzubildende Bereich am Ellipsoid von einem in seinem Innern gelegenen Punkte nach allen Richtungen ungefähr gleich weit, besitzt er also die Form einer sphäroidischen Kalotte, so wird man diesen Punkt zum Zentralpunkt der Projektion wählen; Mittelmeridian und Mittelparallel werden den Bereich symmetrisch teilen. Die Beträge, die dann die Werte von m und p im Maximum erreichen, werden ungefähr gleich groß sein. Man wird daher den Koeffizienten B_{30} so wählen, daß die Beträge m^2 und p^2 mit gleichen Faktoren aber mit entgegengesetztem Vorzeichen in die Gleichungen für h und k eingehen, da nur dann diese Werte möglichst wenig von der Einheit abweichen. Man wird also

$$B_{30} = -\frac{1}{12}$$

setzen, womit die Abbildungsgleichungen die Gestalt

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\lambda}{\lambda_0} p + \frac{1}{4} m^2 p - \frac{1}{12} (1 + 2 \tan^2 \varphi_0) p^3, \\ y &= m + \frac{\sin \varphi_0}{2 \lambda_0} p^2 - \frac{1}{12} m^3 + \frac{1}{4} (1 - 2 \tan^2 \varphi_0) m p^2 \end{aligned} \right\} (1)$$

annehmen. Aus ihnen ergibt sich, wenn in den Verzerrungsgrößen Glieder dritter Ordnung vernachlässigt werden, wie es sein muß,

$$\sigma = 1, \quad J = 0$$

sowie

$$\left. \begin{aligned} h &= 1 - \frac{1}{4} (m^2 - p^2), \quad k = 1 + \frac{1}{4} (m^2 - p^2) \\ \text{und} \\ \sin \frac{1}{2} \delta &= \pm \frac{1}{4} (m^2 - p^2). \end{aligned} \right\} (1a)$$

Hierbei gilt das obere Vorzeichen für $h > k$, das untere für $h < k$, wie ohne Schwierigkeit ersehen werden kann.

b) Meridianstreifen.

Dehnt sich der vom Ellipsoid in die Ebene abzubildende Bereich hauptsächlich in der Nord-Süd-Richtung, also in der Richtung eines Meridians aus, so wird, wenn der Zentralpunkt wieder in seiner Mitte gewählt wird, nun der Maximalbetrag von m ein Vielfaches desjenigen von p betragen; es wird daher gut sein, den Koeffizienten B_{30} so zu wählen, daß die Streckenverzerrung in h und k von der Meridianerstreckung unabhängig wird, somit nicht von m , sondern nur von p abhängt; denn nur dann werden h und k im Gesamtbereich der Abbildung wenig von der Einheit abweichen. Man wird also

$$B_{30} = 0$$

setzen. Damit nehmen die Abbildungsgleichungen die Gestalt

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\lambda}{\lambda_0} p - \frac{1}{6} (1 + \tan^2 \varphi_0) p^3, \\ y &= m + \frac{\sin \varphi_0}{2\lambda_0} p^2 + \frac{1}{2} (1 - \tan^2 \varphi_0) m p^2 \end{aligned} \right\} (2)$$

an. Ihre partiellen Ableitungen führen bei Vernachlässigung von Größen dritter Ordnung zu den Verzerrungsgrößen

$$\sigma = 1, J = 0$$

sowie

$$\left. \begin{aligned} h &= 1 + \frac{1}{2} p^2, & k &= 1 - \frac{1}{2} p^2 \end{aligned} \right\} (2a)$$

und

$$\sin \frac{1}{2} \delta = -\frac{1}{2} p^2.$$

c) Parallelstreifen.

Geht schließlich die Hauptausdehnung des abzubildenden Landes von Ost nach West, besitzt es also die Form eines Parallelstreifens, so wird man den Symmetriepunkt des Bereiches wieder als Zentralpunkt wählen. Der Maximalbetrag von p übertrifft dann weit denjenigen von m . Es liegt daher nahe, den Koeffizienten B_{30} so zu wählen, daß die Streckenverzerrung von der Erstreckung des Bereiches im Parallelkreis unabhängig wird, somit nicht von p , sondern nur von m abhängt; denn dies ist die Voraussetzung für Werte h und k , die nur wenig von der Einheit abweichen sollen. Man wird daher

$$B_{30} = -\frac{1}{6}$$

setzen. Aus dieser Annahme folgen die Abbildungsgleichungen mit

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\lambda}{\lambda_0} p + \frac{1}{2} m^2 p - \frac{1}{6} \tan^2 \varphi_0 p^3, \\ y &= m + \frac{\sin \varphi_0}{2\lambda_0} p^2 - \frac{1}{6} m^3 - \frac{1}{2} \tan^2 \varphi_0 m p^2. \end{aligned} \right\} (3)$$

Werden Glieder dritter Ordnung in den Verzerrungsgrößen vernachlässigt, so erhält man ohne Schwierigkeit

$$\sigma = 1, J = 0$$

sowie

$$h = 1 - \frac{1}{2}m^2, \quad k = 1 + \frac{1}{2}m^2$$

und

$$\sin \frac{1}{2}\delta = -\frac{1}{2}m^2.$$

} (3a)

Die Anwendung der voranstehend hergeleiteten drei Formelgruppen zur Berechnung eines Kartennetzes und seiner Verzerrungen erfordert jedoch, daß die Koordinaten m, p der abzubildenden Ellipsoidpunkte vorgegeben sind. Diese Voraussetzung ist aber im allgemeinen nicht erfüllt, da in der Praxis die Lage eines Punktes am Ellipsoid in der Regel mit Hilfe der geographischen Koordinaten φ, λ bestimmt wird. Die weitere Aufgabe wird also darin bestehen, die Werte von m, p in Funktion der geographischen Koordinaten φ, λ darzustellen.

3. Geographische Koordinaten φ, λ und sphäroidische Koordinaten ξ, η .

Die Länge des Meridianbogens m zwischen den Breiten φ und φ_0 wird bekanntlich durch das Integral

$$m = \int_{\varphi_0}^{\varphi} Q d\varphi$$

gegeben. Die Integration läßt sich nach Entwicklung des Meridiankrümmungsradius Q in eine Potenzreihe auf elementare Weise ausführen und ergibt

$$m = a(1 - e^2) \left[C_0(\varphi - \varphi_0) - C_2 \cos(\varphi + \varphi_0) \sin(\varphi - \varphi_0) + \frac{C_4}{2} \cos 2(\varphi + \varphi_0) \sin 2(\varphi - \varphi_0) - \dots \right]. \quad (4)$$

Die Koeffizienten c stellen hierbei die Summen von nach geraden Potenzen der numerischen Exzentrizität e fortschreitenden Reihen dar; ihr Index gibt die jeweilige Potenz des ersten Gliedes dieser Reihen an.

Andererseits ergibt der auf die Mittelbreite $\varphi_m = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi_0)$ angewendete und in eine Potenzreihe entwickelte Meridiankrümmungsradius Q_m nach Multiplikation mit dem Breitenunterschied $\varphi - \varphi_0$ des Integrationsbereiches

$$Q_m(\varphi - \varphi_0) = a(1 - e^2) \left[C_0(\varphi - \varphi_0) - C_2 \cos(\varphi + \varphi_0) \cdot (\varphi - \varphi_0) + C_4 \cos 2(\varphi + \varphi_0) \cdot (\varphi - \varphi_0) - \dots \right]. \quad (5)$$

Die beiden Gleichungen (4) und (5) unterscheiden sich nur um Glieder fünfter Ordnung, wenn der Breitenunterschied $\varphi - \varphi_0$ klein von erster Ordnung gewählt wird. Es kann also bis Glieder vierter Ordnung einschließlich

$$m = Q_m(\varphi - \varphi_0) \quad (6)$$

gesetzt werden.

Für die Länge des Parallelbogens p zwischen den Längen λ_0 und λ folgt in voller Strenge

$$p = N_0(\lambda - \lambda_0) = N_0 \cos \varphi_0(\lambda - \lambda_0). \quad (7)$$

Auf den ersten Blick scheint es nun am vorteilhaftesten, durch Eintragen der Gleichungen (6) und (7) in die für jedes System geringster Streckenverzerrung gewonnenen Abbildungsgleichungen die Darstellung der ebenen rechtwinkligen Koordinaten x, y in Funktion der geographischen Koordinaten φ, λ zu gewinnen. Das Ergebnis würde jedoch nicht die einfachsten und für die praktische Anwendung geeignetsten Formeln liefern. Es ist vielmehr besser, sich zur Herleitung der ebenen, rechtwinkligen Koordinaten x, y der sphäroidischen Koordinaten ξ, η zu bedienen. Man erhält hiedurch einerseits verhältnismäßig einfache Formeln, die außer dem Hauptgliede erster Ordnung nur Glieder dritter Ordnung aufweisen, andererseits ist die Darstellung der sphäroidischen Koordinaten ξ, η in Funktion der geographischen Koordinaten φ, λ und umgekehrt schon lange bekannt.

Unter η die Abszisse und unter ξ die im Fußpunkte der Breite φ_1 auftreffende Ordinate sphäroidischer, rechtwinkliger Koordinaten verstanden, wobei η positiv nach Nord und ξ positiv nach West hin gezählt werden soll, bestehen mit Beibehaltung der bisher angewendeten Bezeichnungen zwischen ihnen und den geographischen Koordinaten für das Rotationsellipsoid die Beziehungen⁴⁾

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0 + \frac{\eta}{Q_m}, \\ \varphi &= \varphi_1 - \frac{1}{2} \frac{\xi^2}{N_1 Q_1} \tan \varphi_1, \\ \lambda - \lambda_0 &= \begin{cases} \frac{\xi}{N_1} \sec \varphi_1 - \frac{1}{3} \frac{\xi^3}{N_1^3} \tan^2 \varphi_1 \sec \varphi_1, \\ \frac{\xi}{N_1} \sec \varphi + \frac{1}{6} \frac{\xi^3}{N_1^3} \tan^2 \varphi \sec \varphi \end{cases} \end{aligned} \right\} (8)$$

und umgekehrt

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi + \frac{1}{2} \frac{N}{Q} (\lambda - \lambda_0)^2 \sin \varphi \cos \varphi, \\ \eta &= Q_m (\varphi_1 - \varphi_0), \\ \xi &= \begin{cases} (\lambda - \lambda_0) N \cos \varphi - \frac{1}{6} (\lambda - \lambda_0)^3 N \sin^2 \varphi \cos \varphi, \\ (\lambda - \lambda_0) N_1 \cos \varphi_1 + \frac{1}{3} (\lambda - \lambda_0)^3 N_1 \sin^2 \varphi_1 \cos \varphi_1. \end{cases} \end{aligned} \right\} (9)$$

Nun lassen sich Meridianbogen und Parallelbogen in Funktion von ξ und η darstellen. Die Eintragung der zweiten Gleichung (8) mit Beachtung der ersten Gleichung dieser Gruppe in die Formel (6) führt zu

$$m = \eta - \frac{1}{2} \frac{Q_m}{Q_1} \frac{\xi^2}{N_1} \tan \varphi_1,$$

wobei noch ohne Herabsetzung der Genauigkeit $\frac{Q_m}{Q_1} = 1, N_1 = N$ und $\varphi_1 = \varphi$ gesetzt werden kann, so daß sich

⁴⁾Jordan-Eggert, Handbuch der Vermessungskunde III, Stuttgart 1923, S. 312 ff., unter Verwendung der entsprechenden Bezeichnungen und der Beziehung $\frac{N}{Q} = V^2 = \frac{W^2}{7e^2}$.

$$m = \eta^{-\frac{1}{2}} \frac{\xi^2}{N} \tan \varphi \quad (10)$$

ergibt. Die Einsetzung der vierten Gleichung (8) in die Formel (7) liefert zunächst

$$p = \frac{\xi}{N_0} \frac{N_0 \cos \varphi_0}{N_1 \cos \varphi} + \frac{1}{6} \frac{\xi^3}{N_1^2} \frac{N_0 \cos \varphi_0}{N_1 \cos \varphi} \tan^2 \varphi;$$

im ersten Gliede rechter Hand kann $N_1 = N$ gesetzt werden, was nur Fehler fünfter Ordnung im Gefolge hat; im zweiten Gliede kann mit gleicher Schärfe

$N_1^2 = N_0^2$ und mit Fehlern vierter Ordnung $\frac{N_0 \cos \varphi_0}{N_1 \cos \varphi} = 1$ gesetzt werden, so daß der Parallelbogen mit

$$p = \frac{\xi}{N} \frac{N_0 \cos \varphi_0}{\cos \varphi} + \frac{1}{6} \frac{\xi^3}{N_0^2} \tan^2 \varphi \quad (11)$$

folgt.

4. Abbildung des Rotationsellipsoids in die Ebene und zurück.

a) Sphäroidische Kalotte.

In Funktion der Werte m , p sind die Abbildungsgleichungen für eine sphäroidische Kalotte sowie die zugehörigen Ausdrücke für die Strecken- und Winkelverzerrung in Formelgruppe (1) dargestellt. Der Einfachheit der Entwicklungen halber wurden bisher die Größen m , p und damit auch die Längen X , y , N , N_0 , ... als in Einheiten des Äquatorradius a des vorgegebenen Rotationsellipsoids ausgedrückt angenommen. Es ist daher zur praktischen Anwendung den Formeln noch die Umstellung auf ein gebräuchliches Längenmaß notwendig; sie führt zu den Abbildungsgleichungen

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{N \cos \varphi}{N_0 \cos \varphi_0} p + \frac{1}{4} \frac{m^2 p}{a^2} - \frac{1}{12} (1 + 2 \tan^2 \varphi_0) \frac{p^3}{a^2}, \\ y &= m + \frac{\tan \varphi_0}{2 N_0} p^2 - \frac{1}{12} \frac{m^3}{a^2} + \frac{1}{4} (1 - 2 \tan^2 \varphi_0) \frac{m p^2}{a^2} \end{aligned} \right\} (12)$$

und zu den Verzerrungsgrößen

$$\left. \begin{aligned} h &= 1 - \frac{1}{4} \frac{m^2 - p^2}{a^2}, & k &= 1 + \frac{1}{4} \frac{m^2 - p^2}{a^2}, \\ \sin \frac{1}{2} \delta &= \pm \frac{1}{4} \frac{m^2 - p^2}{a^2}. \end{aligned} \right\} (12a)$$

Unter Verwendung der Formeln (10) und (11) können nun die Gleichungen (12) und (12a) in Funktion von ξ , η dargestellt werden. Hierbei empfiehlt es sich, im Hinblick auf gewisse Vorteile bei den vorzunehmenden Entwicklungen, von nun an die y -Koordinate der x -Koordinate voranzusetzen.

Für y ergibt sich zunächst

$$y = \eta - \frac{1}{2} \frac{\xi^2}{N} \tan \varphi + \frac{\tan \varphi_0}{2 N_0} \xi^2 \frac{N_0^2 \cos^2 \varphi_0}{N^2 \cos^2 \varphi} - \frac{1}{12} \frac{\eta^3}{\sigma^2} + \frac{1}{4} (1 - 2 \tan^2 \varphi_0) \frac{\xi^2 \eta}{\alpha^2} \frac{N_0^2 \cos^2 \varphi_0}{N^2 \cos^2 \varphi}.$$

Ohne Minderung der Genauigkeit kann im zweiten Gliede rechter Hand $\tan \varphi$ folgendermaßen transformiert werden:

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= \tan \left(\varphi_0 + \frac{\eta}{Q_m} \right) \\ &= \frac{\tan \varphi_0 + \tan \frac{\eta}{Q_m}}{1 - \tan \varphi_0 \tan \frac{\eta}{Q_m}} \\ &= \left(\tan \varphi_0 + \frac{\eta}{Q_m} \right) \left(1 + \frac{\eta}{Q_m} \tan \varphi_0 \right), \end{aligned}$$

d. i.

$$\tan \varphi = \tan \varphi_0 + \frac{\eta}{Q_m} + \frac{\eta}{Q_m} \tan^2 \varphi_0; \quad (13)$$

im dritten Gliede läßt sich $\frac{1}{\cos^2 \varphi}$ unter Verwendung des Ergebnisses (13) entsprechend umwandeln:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2 \varphi} &= 1 + \tan^2 \varphi \\ &= 1 + \tan^2 \left(\varphi_0 + \frac{\eta}{Q_m} \right) \\ &= 1 + \tan^2 \varphi_0 + 2 \frac{\eta}{Q_m} \tan \varphi_0 + 2 \frac{\eta}{Q_m} \tan^3 \varphi_0, \end{aligned}$$

d. i.

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} = \frac{1}{\cos^2 \varphi_0} + 2 \frac{\eta}{Q_m} \frac{\tan \varphi_0}{\cos^2 \varphi_0}, \quad (14)$$

womit sich

$$\begin{aligned} y &= \eta - \frac{1}{2} \frac{\xi^2}{N} \tan \varphi_0 - \frac{1}{2} \frac{\xi^2 \eta}{N Q_m} - \frac{1}{2} \frac{\xi^2 \eta}{N Q_m} \tan^2 \varphi_0 + \frac{\tan \varphi_0}{2 N_0} \xi^2 \frac{N_0^2}{N^2} + \\ &+ \frac{\tan \varphi_0}{2 N_0} \xi^2 2 \frac{\eta}{Q_m} \frac{N_0^2}{N^2} \tan \varphi_0 - \frac{1}{12} \frac{\eta^3}{\alpha^2} + \frac{1}{4} (1 - 2 \tan^2 \varphi_0) \frac{\xi^2 \eta}{\alpha^2} \frac{N_0^2 \cos^2 \varphi_0}{N^2 \cos^2 \varphi} \end{aligned}$$

ergibt und hieraus - wenn in den Gliedern zweiter Ordnung $N = N_0$, in den Gliedern dritter Ordnung $N = N_0$, $\varphi = \varphi_0$, $N = Q_m = \sigma = R_0$ gesetzt wird, was ohne Herabsetzung der Genauigkeit zulässig ist -

$$y = \eta - \frac{1}{4} \frac{\xi^2 \eta}{R_0^2} - \frac{1}{12} \frac{\eta^3}{R_0^2}. \quad (15)$$

Für x erhält man vorerst

$$x = \frac{N \cos \varphi}{N_0 \cos \varphi_0} \xi \frac{N_0 \cos \varphi_0}{N \cos \varphi} + \frac{1}{6} \frac{N \cos \varphi}{N_0 \cos \varphi_0} \frac{\xi^3}{N_0^2} \tan^2 \varphi + \frac{1}{4} \frac{\xi \eta^2}{\alpha^2} \frac{N_0 \cos \varphi_0}{N \cos \varphi} - \frac{1}{12} (1 + 2 \tan^2 \varphi_0) \frac{\xi^3}{\alpha^2} \frac{N_0^3 \cos^3 \varphi_0}{N^3 \cos^3 \varphi}$$

und mit teilweiser Verwendung der bei der Darstellung von y angegebenen Vereinfachungen

$$x = \frac{\xi}{5} + \frac{1}{4} \frac{\xi \eta^2}{R_0^2} - \frac{1}{12} \frac{\xi^3}{R_0^2}. \quad (15a)$$

Für h und k und $\sin \frac{1}{2} \delta$ ergibt sich mit Vernachlässigung von Gliedern dritter Ordnung

$$\left. \begin{aligned} h &= 1 - \frac{1}{4} \frac{\eta^2 - \xi^2}{R_0^2}, & k &= 1 + \frac{1}{4} \frac{\eta^2 - \xi^2}{R_0^2}, \\ \sin \frac{1}{2} \delta &= \pm \frac{\eta^2 - \xi^2}{R_0^2}. \end{aligned} \right\} (15b)$$

Die Gleichungen (15), (15a) und (15b) geben die Abbildungsgleichungen und die Verzerrungsgrößen für eine sphäroidische kalotte in Funktion von rechtwinkligen, sphäroidischen koordinaten. Ihre Darstellung in geographischen Koordinaten ist nun durch Eintragung der Reihen (9) in die voranstehende Gleichungsgruppe leicht ausführbar. Für y ergibt sich

$$y = Q_m (\varphi_1 - \varphi_0) - \frac{1}{4} \frac{Q_m (\varphi_1 - \varphi_0)}{R_0^2} (\lambda - \lambda_0)^2 N^2 \cos^2 \varphi - \frac{1}{12} \frac{Q_m^3 (\varphi_1 - \varphi_0)^3}{R_0^2}$$

und daraus mit gleicher Genauigkeit

$$y = Q_m (\varphi_1 - \varphi_0) \left[1 - \frac{1}{4} (\lambda - \lambda_0)^2 \cos^2 \varphi - \frac{1}{12} (\varphi_1 - \varphi_0)^2 \right]; \quad (16)$$

für x folgt

$$x = (\lambda - \lambda_0) N \cos \varphi - \frac{1}{6} (\lambda - \lambda_0)^3 N \sin^2 \varphi \cos \varphi + \frac{1}{4} \frac{Q_m^2 (\varphi_1 - \varphi_0)^2}{R_0^2} (\lambda - \lambda_0) N \cos \varphi - \frac{1}{12} \frac{(\lambda - \lambda_0)^3}{R_0^2} N^3 \cos^3 \varphi$$

und daraus

$$x = (\lambda - \lambda_0) N \cos \varphi \left[1 - \frac{1}{12} (\lambda - \lambda_0)^2 (1 + \sin^2 \varphi) + \frac{1}{4} (\varphi_1 - \varphi_0)^2 \right] \quad (16a)$$

bzw. zur Erprobung

$$x = (\lambda - \lambda_0) N_1 \cos \varphi + \frac{1}{3} (\lambda - \lambda_0)^3 N_1 \cos \varphi \sin^2 \varphi + \frac{1}{4} \frac{Q_m^2 (\varphi_1 - \varphi_0)^2}{R_0^2} (\lambda - \lambda_0) N_1 \cos \varphi - \frac{1}{12} \frac{(\lambda - \lambda_0)^3}{R_0^2} N_1^3 \cos^3 \varphi,$$

und daraus

$$x = (\lambda - \lambda_0) N_1 \cos \varphi \left[1 - \frac{1}{12} (\lambda - \lambda_0)^2 (1 - 5 \sin^2 \varphi) + \frac{1}{4} (\varphi_1 - \varphi_0)^2 \right]. \quad (16b)$$

Für die Strecken- und Winkelverzerrung wird

$$\left. \begin{aligned} h &= 1 - \frac{1}{4} [(\varphi_1 - \varphi_0)^2 - (\lambda - \lambda_0)^2 \cos^2 \varphi], \\ k &= 1 + \frac{1}{4} [(\varphi_1 - \varphi_0)^2 - (\lambda - \lambda_0)^2 \cos^2 \varphi], \\ \sin \frac{1}{2} \delta &= \pm \frac{1}{4} [(\varphi_1 - \varphi_0)^2 - (\lambda - \lambda_0)^2 \cos^2 \varphi] \\ \delta &= \pm \frac{1}{2} [(\varphi_1 - \varphi_0)^2 - (\lambda - \lambda_0)^2 \cos^2 \varphi] \end{aligned} \right\} (16c)$$

bzw.

erhalten. Mit Hinzunahme der ersten Formel (9)

$$\varphi_1 = \varphi + \frac{1}{2} \frac{N}{Q} (\lambda - \lambda_0)^2 \sin \varphi \cos \varphi \quad (16d)$$

ist somit durch die Formelgruppe (16) die Abbildung einer sphäroidischen Kalotte des Rotationsellipsoids in die Ebene durch geographische Koordinaten vollzogen.

Die Abbildung der Ebene auf das Ellipsoid kann nun auf einfache Weise ausgeführt werden. Aus den Gleichungen (15) und (15a) erhält man

$$\begin{aligned} \eta &= y + \frac{1}{4} \frac{\xi^2 \eta}{R_0^2} + \frac{1}{12} \frac{\eta^3}{R_0^2}, \\ \xi &= x - \frac{1}{4} \frac{\xi \eta^2}{R_0^2} + \frac{1}{12} \frac{\xi^3}{R_0^2}. \end{aligned}$$

In erster Näherung kann $\eta = y$, $\xi = x$ gesetzt werden. Die Einführung dieser Ansätze in die obigen Gleichungen gibt bis Glieder dritter Ordnung einschließlic

$$\left. \begin{aligned} \eta &= y + \frac{1}{4} \frac{x^2 y}{R_0^2} + \frac{1}{12} \frac{y^3}{R_0^2}, \\ \xi &= x - \frac{1}{4} \frac{x y^2}{R_0^2} + \frac{1}{12} \frac{x^3}{R_0^2} \end{aligned} \right\} (17)$$

und aus den Gleichungen (15b) die Strecken- und Winkelverzerrung mit

$$\left. \begin{aligned} h &= 1 - \frac{1}{4} \frac{y^2 - x^2}{R_0^2}, \quad k = 1 + \frac{1}{4} \frac{y^2 - x^2}{R_0^2}, \\ \sin \frac{1}{2} \delta &= \pm \frac{1}{4} \frac{y^2 - x^2}{R_0^2} \text{ bzw. } \delta = \pm \frac{1}{2} \frac{y^2 - x^2}{R_0^2} \end{aligned} \right\} (17a)$$

Werden nun die Gleichungen (17) in die Formelgruppe (8) eingesetzt, so ergibt sich bis einschließlic Glieder dritter Ordnung

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0 + \frac{y}{Q_m} + \frac{1}{4} \frac{x^2 y}{R_0^3} + \frac{1}{12} \frac{y^3}{R_0^3}, \\ \varphi &= \varphi_1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{N_1 Q_1} \tan \varphi_1 \end{aligned} \right\} (18)$$

und

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{x}{N_1 \cos \varphi_1} - \frac{1}{4} \frac{x y^2}{R_0^2 N_1 \cos \varphi_1} + \frac{1}{12} \frac{x^3}{R_0^2 N_1 \cos \varphi_1} - \frac{1}{6} \frac{x^3 \tan^2 \varphi_1}{N_1^3 \cos \varphi_1},$$

d. i.

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{x}{N_1 \cos \varphi_1} - \frac{1}{4} \frac{x y^2}{N_1^3 \cos \varphi_1} + \frac{1}{12} \frac{x^3}{N_1^3 \cos \varphi_1} (1 - 4 \tan^2 \varphi_1) \quad (18a)$$

bzw. zur Probe

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{x}{N_1 \cos \varphi} - \frac{1}{4} \frac{x y^2}{R_0^2 N_1 \cos \varphi} + \frac{1}{12} \frac{x^3}{R_0^2 N_1 \cos \varphi} + \frac{1}{6} \frac{x^3 \tan^2 \varphi}{N_1^3 \cos \varphi},$$

d. i.

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{x}{N_1 \cos \varphi} - \frac{1}{4} \frac{x y^2}{N_1^3 \cos \varphi} + \frac{1}{12} \frac{x^3}{N_1^3 \cos \varphi} (1 + 2 \tan^2 \varphi). \quad (18b)$$

Damit ist die Abbildung der Ebene auf das Rotationsellipsoid durch eine sphäroidische Kalotte vollzogen.

b) Meridianstreifen.

Die Abbildungsgleichungen für einen Meridianstreifen in Funktion von m , p sowie die Ausdrücke für die Strecken- und Winkelverzerrung werden durch die Formelgruppe (2) gegeben. Wieder vom Äquatorradius a des Rotationsellipsoids als Einheit auf ein in der Praxis gebräuchliches Längenmaß übergehend, ergeben sich die Abbildungsgleichungen

$$\begin{aligned} x &= \frac{N \cos \varphi}{N_0 \cos \varphi_0} p - \frac{1}{6} (1 + \tan^2 \varphi_0) \frac{p^3}{a^2}, \\ y &= m + \frac{\tan \varphi_0}{2 N_0} p^2 + \frac{1}{2} (1 - \tan^2 \varphi_0) \frac{m p^2}{a^2} \end{aligned} \quad (19)$$

und die Verzerrungsgrößen

$$\begin{aligned} h &= 1 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{a^2}, \quad k = 1 - \frac{1}{2} \frac{p^2}{a^2}, \\ \sin \frac{1}{2} \delta &= -\frac{1}{2} \frac{p^2}{a^2}. \end{aligned} \quad (19a)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (10) und (11) geht die in Funktion von m , p dargestellte Gruppe (19) in Funktion von ξ , η über. Es wird zunächst

$$y = \eta - \frac{1}{2} \frac{\xi^2}{N} \tan \varphi + \frac{\tan \varphi_0}{2 N_0} \xi^2 \frac{N_0^2 \cos^2 \varphi_0}{N^2 \cos^2 \varphi} + \frac{1}{2} (1 - \tan^2 \varphi_0) \frac{\xi^2 \eta}{a^2} \frac{N_0^2 \cos^2 \varphi_0}{N^2 \cos^2 \varphi}$$

und daraus mit Beachtung der Ergebnisse (13) und (14)

$$\begin{aligned} y &= \eta - \frac{1}{2} \frac{\xi^2}{N} \tan \varphi - \frac{1}{2} \frac{\xi^2 \eta}{N Q_m} - \frac{1}{2} \frac{\xi^2 \eta}{N Q_m} \tan^2 \varphi_0 + \frac{\tan \varphi_0}{2 N_0} \xi^2 \frac{N_0^2}{N^2} + \\ &+ \frac{\tan \varphi_0}{2 N_0} \xi^2 \frac{N_0^2}{N^2} 2 \frac{\eta}{Q_m} \tan \varphi_0 + \frac{1}{2} (1 - \tan^2 \varphi_0) \frac{\xi^2 \eta}{a^2} \frac{N_0^2 \cos^2 \varphi_0}{N^2 \cos^2 \varphi}. \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf die übrigen - bei der Abbildung durch eine sphäroidische Kalotte angegebenen - zulässigen Vereinfachungen ergibt sich für y das einfache Resultat

$$y = \eta. \quad (20)$$

Für x folgt

$$x = \frac{N \cos \varphi}{N_0 \cos \varphi_0} \xi \frac{N_0 \cos \varphi_0}{N \cos \varphi} + \frac{N \cos \varphi}{N_0 \cos \varphi_0} \frac{1}{6} \frac{\xi^3}{N_0^2} \tan^2 \varphi - \frac{1}{6} (1 + \tan^2 \varphi_0) \frac{\xi^3}{a^2} \frac{N_0^3 \cos^3 \varphi_0}{N^3 \cos^3 \varphi}$$

und mit Bedachtnahme auf die bekannten zulässigen Vereinfachungen

$$X = \xi - \frac{1}{6} \frac{\xi^3}{R_0^2}. \quad (20a)$$

Für h und k und $\sin \frac{1}{2}\delta$ erhält man mit Vernachlässigung von Gliedern dritter Ordnung

$$\left. \begin{aligned} h &= 1 + \frac{1}{2} \frac{\xi^2}{R_0^2}, & k &= 1 - \frac{1}{2} \frac{\xi^2}{R_0^2}, \\ \sin \frac{1}{2}\delta &= -\frac{1}{2} \frac{\xi^2}{R_0^2}. \end{aligned} \right\} (20b)$$

Damit sind die Abbildungsgleichungen für einen Meridianstreifen in Funktion von ξ, η gefunden. Durch Eintragen der Formelgruppe (9) in die Gleichungen (20) ergibt sich für y

$$y = Q_m (\varphi_1 - \varphi_0); \quad (21)$$

für x folgt

$$X = (\lambda - \lambda_0) N \cos \varphi - \frac{1}{6} (\lambda - \lambda_0)^3 N \sin^2 \varphi \cos \varphi - \frac{1}{6} (\lambda - \lambda_0)^3 \frac{N^3}{R_0^2} \cos^3 \varphi$$

und daraus

$$X = (\lambda - \lambda_0) N \cos \varphi \left[1 - \frac{1}{6} (\lambda - \lambda_0)^2 \right] \quad (21a)$$

bzw. zur Erprobung

$$X = (\lambda - \lambda_0) N_1 \cos \varphi_1 + \frac{1}{3} (\lambda - \lambda_0)^3 N_1 \sin^2 \varphi_1 \cos \varphi_1 - \frac{1}{6} (\lambda - \lambda_0)^3 \frac{N_1^3}{R_0^2} \cos^3 \varphi_1$$

und daraus

$$X = (\lambda - \lambda_0) N_1 \cos \varphi_1 \left[1 - \frac{1}{6} (\lambda - \lambda_0)^2 (1 - 3 \sin^2 \varphi_1) \right]. \quad (21b)$$

Für die Strecken- und Winkelverzerrung erhält man

$$\left. \begin{aligned} h &= 1 + \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0)^2 \cos^2 \varphi, \\ k &= 1 - \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0)^2 \cos^2 \varphi, \\ \sin \frac{1}{2}\delta &= -\frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0)^2 \cos^2 \varphi \\ \delta &= -(\lambda - \lambda_0)^2 \cos^2 \varphi. \end{aligned} \right\} (21c)$$

Wird noch die erste Formel (9)

$$\varphi_1 = \varphi + \frac{1}{2} \frac{N}{Q} (\lambda - \lambda_0)^2 \sin \varphi \cos \varphi \quad (21d)$$

angefügt, so ist durch die Gleichungsgruppe (21) die Abbildung eines meridianstreifens des Rotationsellipsoids in die Ebene aus geographischen Koordinaten gegeben.

Die Abbildung der Ebene auf das Ellipsoid ergibt sich nun durch Umkehrung der Formelgruppe (20) und ihre Einführung in die Gleichungsgruppe (8). Man erhält

$$\eta = y, \quad (22)$$

$$\xi = X + \frac{1}{6} \frac{\xi^3}{R_0^2}.$$

Mit Vernachlässigung von Gliedern dritter Ordnung ist $\xi = X$, so daß sich bis Glieder dritter Ordnung einschließlich

$$\xi = X + \frac{1}{6} \frac{X^3}{R_0^2} \quad (22a)$$

ergibt. Die Ausdrücke für die Strecken- und Winkelverzerrung führen zu

$$\left. \begin{aligned} h &= 1 + \frac{1}{2} \frac{X^2}{R_0^2}, & k &= 1 - \frac{1}{2} \frac{X^2}{R_0^2}, \\ \sin \frac{1}{2} \delta &= -\frac{1}{2} \frac{X^2}{R_0^2} \text{ bzw. } \delta &= -\frac{X^2}{R_0^2}. \end{aligned} \right\} (22b)$$

Die Eintragung der Formelgruppe (22) in die Gleichungen (8) liefert - immer bis Glieder dritter Ordnung einschließlich -

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0 + \frac{y}{Q_m}, \\ \varphi &= \varphi_1 - \frac{1}{2} \frac{X^2}{N_1 Q_1} \tan \varphi_1 \end{aligned} \right\} (23)$$

und

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{X}{N_1 \cos \varphi_1} + \frac{1}{6} \frac{X^3}{R_0^2} \frac{1}{N_1 \cos \varphi_1} - \frac{1}{3} \frac{X^3}{N_1^3} \frac{\tan^2 \varphi_1}{\cos \varphi_1},$$

d. i.

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{X}{N_1 \cos \varphi_1} + \frac{1}{6} \frac{X^3}{N_1^3 \cos \varphi_1} (1 - 2 \tan^2 \varphi_1) \quad (23a)$$

bzw. zur Probe

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{X}{N_1 \cos \varphi} + \frac{1}{6} \frac{X^3}{R_0^2} \frac{1}{N_1 \cos \varphi} + \frac{1}{6} \frac{X^3}{N_1^3} \frac{\tan^2 \varphi}{\cos \varphi},$$

d. i.

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{X}{N_1 \cos \varphi} + \frac{1}{6} \frac{X^3}{N_1^3 \cos^3 \varphi}. \quad (23b)$$

Die Formelgruppe (23) gibt die Abbildung der Ebene auf das Ellipsoid durch einen Meridianstreifen.

c) Parallelstreifen.

Für einen Parallelstreifen werden die Abbildungsgleichungen in Funktion von m , p sowie die Ausdrücke für die Strecken- und Winkelverzerrung durch die Formelgruppe (3) gegeben. Durch den Übergang vom Äquatormaaß a als Einheit auf ein in der Praxis gebräuchliches Längenmaß bekommt man die Abbildungsgleichungen mit

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{N \cos \varphi}{N_0 \cos \varphi_0} p + \frac{1}{2} \frac{m^2 p}{\sigma^2} - \frac{1}{6} \tan^2 \varphi_0 \frac{p^3}{\sigma^2}, \\ y &= m + \frac{\tan \varphi_0}{2 N_0} p^2 - \frac{1}{6} \frac{m^3}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \tan^2 \varphi_0 \frac{m p^2}{\sigma^2} \end{aligned} \right\} (24)$$

und die Verzerrungsgrößen mit

$$\left. \begin{aligned} h &= 1 - \frac{1}{2} \frac{m^2}{\sigma^2}, & k &= 1 + \frac{1}{2} \frac{m^2}{\sigma^2}, \\ \sin \frac{1}{2} \delta &= -\frac{1}{2} \frac{m^2}{\sigma^2}. \end{aligned} \right\} (24a)$$

Werden die Formeln (10) und (11) in die zweite Gleichung (24) eingeführt, so folgt

$$y = \eta - \frac{1}{2} \frac{\xi^2}{N} \tan \varphi_0 + \frac{\tan \varphi_0}{2N_0} \frac{\xi^2}{\xi} \frac{N_0^2 \cos^2 \varphi_0}{N^2 \cos^2 \varphi} - \frac{1}{6} \frac{\eta^3}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \tan^2 \varphi_0 \frac{\xi^2 \eta}{\sigma^2} \frac{N_0^2 \cos^2 \varphi_0}{N^2 \cos^2 \varphi}.$$

Unter Anwendung der Entwicklungen (13) und (14) erhält man aus der voranstehenden Gleichung ohne Minderung der Genauigkeit

$$\begin{aligned} y &= \eta - \frac{1}{2} \frac{\xi^2}{N} \tan \varphi_0 - \frac{1}{2} \frac{\xi^2 \eta}{NQ_m} - \frac{1}{2} \frac{\xi^2 \eta}{NQ_m} \tan^2 \varphi_0 + \frac{\tan \varphi_0}{2N_0} \frac{\xi^2}{\xi} \frac{N_0^2}{N_2} + \\ &+ \frac{\tan \varphi_0}{2N_0} \frac{\xi^2}{\xi} \frac{2\eta}{Q_m} \tan \varphi_0 \frac{N_0^2}{N^2} - \frac{1}{6} \frac{\eta^3}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \tan^2 \varphi_0 \frac{\xi^2 \eta}{\sigma^2} \frac{N_0^2 \cos^2 \varphi_0}{N^2 \cos^2 \varphi} \end{aligned}$$

und daraus bei Anwendung der weiteren - oben angegebenen - zulässigen Vereinfachungen

$$y = \eta - \frac{1}{2} \frac{\xi^2 \eta}{R_0^2} - \frac{1}{6} \frac{\eta^3}{R_0^2}. \quad (25)$$

Aus der ersten Gleichung (24) wird

$$x = \frac{N \cos \varphi}{N_0 \cos \varphi_0} \frac{N_0 \cos \varphi_0}{N \cos \varphi} \frac{N \cos \varphi}{N_0 \cos \varphi_0} \frac{1}{\xi} \frac{\xi^3}{N_0^2} \tan^2 \varphi + \frac{1}{2} \frac{\xi \eta^2}{\sigma^2} \frac{N_0 \cos \varphi_0}{N \cos \varphi} - \frac{1}{6} \tan^2 \varphi_0 \frac{\xi^3}{\sigma^2} \frac{N_0^3 \cos^3 \varphi_0}{N^3 \cos^3 \varphi}$$

und hieraus ohne Verringerung der Genauigkeit

$$x = \xi + \frac{1}{2} \frac{\xi \eta^2}{R_0^2}. \quad (25a)$$

Die Streckenverzerrungen h und k und die Winkelverzerrung δ ergeben sich aus den Gleichungen (24a) mit

$$\left. \begin{aligned} h &= 1 - \frac{1}{2} \frac{\eta^2}{R_0^2}, & k &= 1 + \frac{1}{2} \frac{\eta^2}{R_0^2}, \\ \sin \frac{1}{2} \delta &= -\frac{1}{2} \frac{\eta^2}{R_0^2}. \end{aligned} \right\} (25b)$$

Die Gleichungsgruppe (25) enthält die Abbildungsgleichungen für einen Parallelstreifen in Funktion von ξ , η . Die Einführung der Formelgruppe (9) in die voranstehenden Gleichungen ergibt

$$y = Q_m (\varphi_1 - \varphi_0) - \frac{1}{2} \frac{Q_m (\varphi_1 - \varphi_0)}{R_0^2} (\lambda - \lambda_0)^2 N^2 \cos^2 \varphi - \frac{1}{6} \frac{Q_m^3 (\varphi_1 - \varphi_0)^3}{R_0^2}$$

und daraus mit gleicher Genauigkeit

$$y = Q_m (\varphi_1 - \varphi_0) \left[1 - \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0)^2 \cos^2 \varphi - \frac{1}{6} (\varphi_1 - \varphi_0)^2 \right]; \quad (26)$$

für x folgt

$$X = (\lambda - \lambda_0) N \cos \varphi - \frac{1}{6} (\lambda - \lambda_0)^3 N \cos \varphi \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} \frac{Q_m^2 (\varphi_1 - \varphi_0)^2}{R_0^2} (\lambda - \lambda_0) N \cos \varphi$$

und daraus

$$X = (\lambda - \lambda_0) N \cos \varphi \left[1 - \frac{1}{6} (\lambda - \lambda_0)^2 \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_0)^2 \right] \quad (26a)$$

bzw. zur Erprobung

$$X = (\lambda - \lambda_0) N_1 \cos \varphi_1 + \frac{1}{3} (\lambda - \lambda_0)^3 N_1 \sin^2 \varphi_1 \cos \varphi_1 + \frac{1}{2} \frac{Q_m^2 (\varphi_1 - \varphi_0)^2}{R_0^2} N_1 \cos \varphi_1 (\lambda - \lambda_0)$$

und daraus

$$X = (\lambda - \lambda_0) N_1 \cos \varphi_1 \left[1 + \frac{1}{3} (\lambda - \lambda_0)^2 \sin^2 \varphi_1 + \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_0)^2 \right]. \quad (26b)$$

Für die Strecken- und Winkelverzerrung hat man

$$\left. \begin{aligned} h &= 1 - \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_0)^2, \\ k &= 1 + \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_0)^2, \\ \sin \frac{1}{2} \delta &= -\frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_0)^2 \\ \delta &= -(\varphi_1 - \varphi_0)^2. \end{aligned} \right\} (26c)$$

bzw.

Wird hierzu noch die erste Formel (9)

$$\varphi_1 = \varphi + \frac{1}{2} \frac{N}{Q} (\lambda - \lambda_0)^2 \sin \varphi \cos \varphi \quad (26d)$$

angefügt, so ergibt die Formelgruppe (26) die Abbildung eines Parallelstreifens des Rotationsellipsoids in die Ebene mit Hilfe geographischer Koordinaten.

Die Abbildung der Ebene auf das Ellipsoid erfolgt nun durch Umkehrung der Formelgruppe (25) und ihre Eintragung in die Gleichungen (8). Es ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned} \eta &= Y + \frac{1}{2} \frac{\xi^2 \eta}{R_0^2} + \frac{1}{6} \frac{\eta^3}{R_0^2}, \\ \xi &= X - \frac{1}{2} \frac{\xi \eta^2}{R_0^2}. \end{aligned}$$

In erster Näherung ist $\eta = Y$, $\xi = X$, so daß bis Glieder dritter Ordnung einschließlich

$$\left. \begin{aligned} \eta &= Y + \frac{1}{2} \frac{X^2 Y}{R_0^2} + \frac{1}{6} \frac{Y^3}{R_0^2}, \\ \xi &= X - \frac{1}{2} \frac{X Y^2}{R_0^2} \end{aligned} \right\} (27)$$

folgt. Für die Strecken- und Winkelverzerrung erhält man

$$\left. \begin{aligned} h &= 1 - \frac{1}{2} \frac{Y^2}{R_0^2}, \quad k = 1 + \frac{1}{2} \frac{Y^2}{R_0^2}, \\ \sin \frac{1}{2} \delta &= -\frac{1}{2} \frac{Y^2}{R_0^2} \text{ bzw. } \delta = -\frac{Y^2}{R_0^2}. \end{aligned} \right\} (27a)$$

Die Eintragung der Gleichungen (27) in die Formelgruppe (8) führt zu

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0 + \frac{Y}{Q_m} + \frac{1}{2} \frac{X^2 Y}{R_0^3} + \frac{1}{6} \frac{Y^3}{R_0^3}, \\ \varphi &= \varphi_1 - \frac{1}{2} \frac{X^2}{N_1 Q_1} \tan \varphi_1 \end{aligned} \right\} (28)$$

und

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{X}{N_1 \cos \varphi_1} - \frac{1}{2} \frac{X Y^2}{R_0^2 N_1 \cos \varphi_1} - \frac{1}{3} \frac{X^3 \tan^2 \varphi_1}{N_1^3 \cos \varphi_1},$$

d. i.

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{X}{N_1 \cos \varphi_1} - \frac{1}{2} \frac{X Y^2}{N_1^3 \cos \varphi_1} - \frac{1}{3} \frac{X^3}{N_1^3 \cos \varphi_1} \tan^2 \varphi_1 \quad (28a)$$

bzw. zur Probe

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{X}{N_1 \cos \varphi} - \frac{1}{2} \frac{X Y^2}{R_0^2 N_1 \cos \varphi} + \frac{1}{6} \frac{X^3 \tan^2 \varphi}{N_1^3 \cos \varphi}$$

d. i.

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{X}{N_1 \cos \varphi} - \frac{1}{2} \frac{X Y^2}{N_1^3 \cos \varphi} + \frac{1}{6} \frac{X^3}{N_1^3 \cos \varphi} \tan^2 \varphi. \quad (28b)$$

Damit ist die Abbildung eines Parallelstreifens von der Ebene auf das Ellipsoid vollzogen.

5. Eine Verifikation: Direkte Herleitung der Abbildungsgleichungen.

Aus der Herleitung der voranstehenden Formelgruppen unter Verwendung sphäroidischer, rechtwinkliger Koordinaten ξ, η läßt sich ersehen, daß die Ursache für das Verschwinden der Glieder zweiter Ordnung und damit für die Vereinfachung in den Formeln für die Abbildung und Rückabbildung die Einführung der Fußpunktbreite φ_1 ist. Es liegt daher nahe, den Versuch zu unternehmen, die Gleichungen für die flächentreue Abbildung der Systeme geringster Streckenverzerrung vom Rotationsellipsoid in die Ebene und zurück mit Hilfe der Fußpunktbreite φ_1 auf direktem Wege, also unter Umgehung der Zwischendarstellung durch sphäroidische, rechtwinklige Koordinaten ξ, η herzuleiten.

Die Verbindung zwischen dem Meridianbogen m und dem Parallelbogen p einerseits und den geographischen Koordinaten φ, λ andererseits wird

durch die Gleichungen (6) und (7)

$$m = Q_m (\varphi - \varphi_0),$$

$$p = N_0 \cos \varphi_0 (\lambda - \lambda_0)$$

gegeben. Hierbei ist die Formel für die Länge des Parallelbogens vollständig streng bestimmt, der Ausdruck für die Meridianbogenlänge mit Vernachlässigung von Gliedern fünfter Ordnung gültig.

a) Sphäroidische Kalotte.

Die Abbildungsgleichungen für eine sphäroidische Kalotte in Funktion von m , p können der Gleichungsgruppe (12) entnommen werden.

Durch Eintragen der Formeln (6) und (7) in die Gleichung für y ergibt sich zunächst

$$y = Q_m (\varphi - \varphi_0) + \frac{\tan \varphi_0}{2 N_0} N_0^2 \cos^2 \varphi_0 (\lambda - \lambda_0)^2 - \frac{1}{12} \frac{Q_m^3}{Q^2} (\varphi - \varphi_0)^3 + \frac{1}{4} (1 - 2 \tan^2 \varphi_0) \frac{Q_m (\varphi - \varphi_0)}{Q^2} N_0^2 \cos^2 \varphi_0 (\lambda - \lambda_0)^2.$$

Die Einführung der durch die erste Gleichung (9) gegebenen Fußpunktbreite in das erste Glied rechter Hand für y gibt

$$Q_m (\varphi - \varphi_0) = Q_m (\varphi_1 - \varphi_0) - \frac{1}{2} Q_m \frac{N}{Q} (\lambda - \lambda_0)^2 \sin \varphi \cos \varphi.$$

Hierin läßt sich das Produkt $\sin \varphi \cos \varphi$ in Umgebung von φ_0 mit Hilfe des Ansatzes

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\eta}{Q_m},$$

der - wie aus der zweiten Gleichung (8) zu ersehen ist - mit Vernachlässigung von Gliedern zweiter Ordnung aus der ersten Gleichung (8) hervorgeht, in eine nach Potenzen der Abszisse η der sphäroidischen, rechtwinkligen Koordinaten fortschreitende Reihe entwickeln. Man erhält

$$\begin{aligned} \sin \varphi \cos \varphi &= \sin \left(\varphi_0 + \frac{\eta}{Q_m} \right) \cos \left(\varphi_0 + \frac{\eta}{Q_m} \right) \\ &= \left[\sin \varphi_0 + \frac{\eta}{Q_m} \cos \varphi_0 + \dots \right] \left[\cos \varphi_0 - \frac{\eta}{Q_m} \sin \varphi_0 + \dots \right], \end{aligned}$$

d. i.

$$\sin \varphi \cos \varphi = \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + \frac{\eta}{Q_m} \cos^2 \varphi_0 - \frac{\eta}{Q_m} \sin^2 \varphi_0 - \dots; \quad (29)$$

damit wird

$$\begin{aligned} y &= Q_m (\varphi_1 - \varphi_0) - \frac{1}{2} Q_m \frac{N}{Q} (\lambda - \lambda_0)^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 - \frac{1}{2} Q_m \frac{N}{Q} (\lambda - \lambda_0)^2 \frac{\eta}{Q_m} \cos^2 \varphi_0 + \\ &+ \frac{1}{2} Q_m \frac{N}{Q} (\lambda - \lambda_0)^2 \frac{\eta}{Q_m} \sin^2 \varphi_0 + \frac{\tan \varphi_0}{2 N_0} N_0^2 \cos^2 \varphi_0 (\lambda - \lambda_0)^2 - \frac{1}{12} \frac{Q_m^3}{Q^2} (\varphi - \varphi_0)^3 + \\ &+ \frac{1}{4} (1 - 2 \tan^2 \varphi_0) \frac{Q_m (\varphi - \varphi_0)}{Q^2} N_0^2 \cos^2 \varphi_0 (\lambda - \lambda_0)^2. \end{aligned}$$

Ohne Herabsetzung der Genauigkeit kann in den Gliedern zweiter Ordnung

$Q_m = Q$, $N = N_0$, in den Gliedern dritter Ordnung $\frac{N}{Q} = 1$, $N_0 = \sigma = Q_m$ und im Hinblick auf die zweite Gleichung (9) $\eta = Q_m (\varphi - \varphi_0)$ sowie für $\cos \varphi_0 = \cos \varphi$ gesetzt werden, so daß schließlich folgt:

$$y = Q_m (\varphi_1 - \varphi_0) \left[1 - \frac{1}{4} (\lambda - \lambda_0)^2 \cos^2 \varphi - \frac{1}{12} (\varphi_1 - \varphi_0)^2 \right]. \quad (30)$$

Die Einführung der Formeln (6) und (7) in die Gleichung für x führt zu

$$x = \frac{N \cos \varphi}{N_0 \cos \varphi_0} N_0 \cos \varphi_0 (\lambda - \lambda_0) + \frac{1}{4} \frac{Q_m^2 (\varphi - \varphi_0)^2}{Q^2} N_0 \cos \varphi_0 (\lambda - \lambda_0) - \frac{1}{12} (1 + 2 \tan^2 \varphi) \frac{N_0^3}{Q^2} \cos^3 \varphi_0 (\lambda - \lambda_0)^3.$$

Hierin kann ohne Verringerung der Genauigkeit in den Gliedern dritter Ordnung $Q_m = \sigma = N_0 = N$, $\cos \varphi_0 = \cos \varphi$ gesetzt werden. Das Quadrat der Differenz $\varphi - \varphi_0$ im ersten Gliede dritter Ordnung kann noch folgendermaßen transformiert werden. Es ist

$$(\varphi - \varphi_0)^2 = [(\varphi_1 - \varphi_0) + (\varphi - \varphi_1)]^2.$$

Dabei ist die Differenz $\varphi - \varphi_1$ klein von zweiter Ordnung, wenn der Unterschied $\varphi - \varphi_0$ bzw. $\varphi_1 - \varphi_0$ klein von erster Ordnung angenommen wird; man erhält also

$$(\varphi - \varphi_0)^2 = (\varphi_1 - \varphi_0)^2 + 2(\varphi_1 - \varphi_0)(\varphi - \varphi_1) + (\varphi - \varphi_1)^2.$$

Wird nun die rechte Gleichungsseite an Stelle der linken in das erste Glied dritter Ordnung für x eingeführt, so verursacht die Vernachlässigung des zweiten und dritten Gliedes nur Fehler vierter bzw. fünfter Ordnung, ist also zulässig. Damit ergibt sich als erste Form für x die Gleichung

$$x = (\lambda - \lambda_0) N \cos \varphi \left[1 - \frac{1}{12} (\lambda - \lambda_0)^2 (1 + \sin^2 \varphi) + \frac{1}{4} (\varphi_1 - \varphi_0)^2 \right]. \quad (30a)$$

Die zweite Form für x läßt sich ohne Schwierigkeit aus der ersten herleiten. Mit Hilfe der ersten Gleichung (9) erhält man

$$\cos \varphi = \cos \left[\varphi_1 - \frac{1}{2} \frac{N}{Q} (\lambda - \lambda_0)^2 \sin \varphi \cos \varphi \right]$$

und hieraus mit Vernachlässigung von Gliedern dritter Ordnung

$$\cos \varphi = \cos \varphi_1 + \frac{1}{2} \frac{N}{Q} (\lambda - \lambda_0)^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin \varphi_1.$$

Mit gleicher Genauigkeit kann im Gliede zweiter Ordnung noch $\frac{N}{Q} = 1$, $\varphi = \varphi_1$ gesetzt werden, so daß sich schließlich

$$\cos \varphi = \cos \varphi_1 + \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0)^2 \sin^2 \varphi_1 \cos \varphi_1 \quad (31)$$

ergibt. Durch die Einführung dieser Gleichung in diejenige für x hat man mit Vernachlässigung von Gliedern vierter Ordnung vorerst

$$x = (\lambda - \lambda_0) N \cos \varphi_1 \left[1 + \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0)^2 \sin^2 \varphi_1 - \frac{1}{12} (\lambda - \lambda_0)^2 (1 + \sin^2 \varphi) + \frac{1}{4} (\varphi_1 - \varphi_0)^2 \right].$$

Hierin kann noch $N = N_1$ und im zweiten Gliede dritter Ordnung $\varphi = \varphi_1$ gesetzt werden, so daß sich als zweite Form für x die Gleichung

$$x = (\lambda - \lambda_0) N_1 \cos \varphi_1 \left[1 - \frac{1}{12} (\lambda - \lambda_0)^2 (1 - 5 \sin^2 \varphi_1) + \frac{1}{4} (\varphi_1 - \varphi_0)^2 \right] \quad (30b)$$

ergibt.

Aus der Gleichungsgruppe (12) können nun auch die Verzerrungs-

größen direkt in Funktion von φ, λ dargestellt werden. Für

$$h = 1 - \frac{1}{4} \frac{m^2 - p^2}{Q^2}$$

folgt durch Einführung der Formeln (6) und (7) vorerst

$$h = 1 - \frac{1}{4} \frac{1}{Q^2} [Q_m^2 (\varphi - \varphi_0)^2 - N_0^2 \cos^2 \varphi_0 (\lambda - \lambda_0)^2]$$

und hieraus die Glieder zweiter Ordnung einschließlich

$$h = 1 - \frac{1}{4} [(\varphi_1 - \varphi_0)^2 - (\lambda - \lambda_0)^2 \cos^2 \varphi].$$

Ähnlich erhält man auch k und $\sin \frac{1}{2} \delta$ mit

$$k = 1 + \frac{1}{4} [(\varphi_1 - \varphi_0)^2 - (\lambda - \lambda_0)^2 \cos^2 \varphi],$$

$$\sin \frac{1}{2} \delta = \pm \frac{1}{4} [(\varphi_1 - \varphi_0)^2 - (\lambda - \lambda_0)^2 \cos^2 \varphi]$$

(30c)

bzw.

$$\delta = \pm \frac{1}{2} [(\varphi_1 - \varphi_0)^2 - (\lambda - \lambda_0)^2 \cos^2 \varphi].$$

Die Formelgruppe (30) gibt die Abbildung einer sphäroidischen Kaulotte vom Ellipsoid in die Ebene. Wie ein Vergleich zeigt, ist sie mit der Gruppe (16) identisch.

Die Abbildungsgleichungen der Ebene auf das Ellipsoid werden nun durch Umkehrung der Formelgruppe (30) erhalten. Aus Gleichung (30) folgt durch Auflösung

$$\frac{y}{Q_m} = \varphi_1 - \varphi_0 - \frac{1}{4} (\varphi_1 - \varphi_0) (\lambda - \lambda_0)^2 \cos^2 \varphi - \frac{1}{72} (\varphi_1 - \varphi_0)^3$$

und daraus

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{y}{Q_m} + \frac{1}{4} (\varphi_1 - \varphi_0) (\lambda - \lambda_0)^2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{72} (\varphi_1 - \varphi_0)^3.$$

Hierin kann das erste Glied dritter Ordnung mit $\frac{Q_m N^2}{R_0^3}$, das zweite Glied dritter Ordnung mit $\frac{Q_m^3}{R_0^3}$ multipliziert werden, ohne daß die Genauigkeit geändert wird. Es folgt

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{y}{Q_m} + \frac{1}{4} \frac{1}{R_0^3} Q_m (\varphi_1 - \varphi_0) (\lambda - \lambda_0)^2 N^2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{72} \frac{Q_m^3}{R_0^3} (\varphi_1 - \varphi_0)^3$$

und hieraus im Hinblick auf die Gleichungen (30) und (30a)

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{y}{Q_m} + \frac{1}{4} \frac{X^2 y}{R_0^3} + \frac{1}{72} \frac{y^3}{R_0^3}. \quad (32)$$

Aus der ersten Gleichung (9) ergibt sich vorerst

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{1}{2} \frac{N}{Q} (\lambda - \lambda_0)^2 \sin \varphi \cos \varphi.$$

Die Multiplikation des quadratischen Gliedes mit $\frac{N \cos \varphi}{N \cos \varphi} = 1$ führt zunächst auf

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{1}{2} \frac{N^2 (\lambda - \lambda_0)^2 \cos^2 \varphi}{N Q} \tan \varphi.$$

und im Hinblick auf die Gleichung (30a) sowie bei Vertauschung von N mit N_1 , Q mit Q_1 und $\tan \varphi$ mit $\tan \varphi_1$ mit gleicher Genauigkeit auf

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{1}{2} \frac{X^2}{N_1 Q_1} \tan \varphi_1. \quad (32a)$$

Aus der Gleichung (30a) wird

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{X}{N \cos \varphi} + \frac{1}{12} (\lambda - \lambda_0)^3 (1 + \sin^2 \varphi) - \frac{1}{4} (\varphi_1 - \varphi_0)^2 (\lambda - \lambda_0).$$

Das erste Glied dritter Ordnung kann durch $\frac{N^3 \cos^3 \varphi}{N^3 \cos^3 \varphi}$, das zweite Glied dritter Ordnung durch $\frac{Q_m^2 N \cos \varphi}{Q_m^2 N \cos \varphi}$ erweitert werden; niemit wird

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{X}{N \cos \varphi} + \frac{1}{12} \frac{(\lambda - \lambda_0)^3 N^3 \cos^3 \varphi}{N^3 \cos^3 \varphi} (1 + 2 \tan^2 \varphi) - \frac{1}{4} \frac{Q_m^2 (\varphi_1 - \varphi_0)^2 (\lambda - \lambda_0) N \cos \varphi}{Q_m^2 N \cos \varphi}$$

Mit Beachtung der Gleichungen (30) und (30a) und bei Vertauschung von N und Q_m mit N_1 im Nenner ergibt sich ohne Herabsetzung der Genauigkeit

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{X}{N_1 \cos \varphi} - \frac{1}{4} \frac{X Y^2}{N_1^3 \cos \varphi} + \frac{1}{12} \frac{X^3}{N_1^3 \cos \varphi} (1 + 2 \tan^2 \varphi). \quad (32b)$$

Aus Gleichung (31) folgt durch Umkehrung

$$\frac{1}{\cos \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi_1} - \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0)^2 \frac{\sin^2 \varphi_1}{\cos \varphi_1}. \quad (33)$$

Die Einführung dieser Gleichung in die Formel (32b) führt zu

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{X}{N_1 \cos \varphi_1} - \frac{1}{2} X (\lambda - \lambda_0)^2 \frac{\sin^2 \varphi_1}{N_1 \cos \varphi_1} - \frac{1}{4} \frac{X Y^2}{N_1^3 \cos \varphi_1} + \frac{1}{12} \frac{X^3}{N_1^3 \cos \varphi_1} (1 + 2 \tan^2 \varphi).$$

Das erste Glied dritter Ordnung kann mit $\frac{N_1^2 \cos^2 \varphi_1}{N_1^2 \cos^2 \varphi_1}$ multipliziert werden, womit sich im Hinblick auf Gleichung (30b)

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{X}{N_1 \cos \varphi_1} - \frac{1}{2} \frac{X^3}{N_1^3 \cos \varphi_1} \tan^2 \varphi_1 - \frac{1}{4} \frac{X Y^2}{N_1^3 \cos \varphi_1} + \frac{1}{12} \frac{X^3}{N_1^3 \cos \varphi_1} (1 + 2 \tan^2 \varphi)$$

ergibt. In den Gliedern dritter Ordnung darf ohne weiters φ mit φ_1 vertauscht werden, so daß schließlich folgt:

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{X}{N_1 \cos \varphi_1} - \frac{1}{4} \frac{X Y^2}{N_1^3 \cos \varphi_1} + \frac{1}{12} \frac{X^3}{N_1^3 \cos \varphi_1} (1 - 4 \tan^2 \varphi_1). \quad (32c)$$

Die Gleichung (32c) kann aber auch aus der Formel (30b) hergeleitet werden, ebenso wie die Gleichung (32b) aus der Formel (30a) entwickelt wurde. Es ist

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{X}{N_1 \cos \varphi_1} + \frac{1}{12} (\lambda - \lambda_0)^3 (1 - 5 \sin^2 \varphi_1) - \frac{1}{4} (\varphi_1 - \varphi_0)^2 (\lambda - \lambda_0).$$

Das erste Glied dritter Ordnung kann mit $\frac{N_1^3 \cos^3 \varphi_1}{N_1^3 \cos^3 \varphi_1}$, das zweite Glied dritter Ordnung mit $\frac{Q_m^2 N_1 \cos \varphi_1}{Q_m^2 N_1 \cos \varphi_1}$ erweitert werden. Unter Verwendung der Formeln (30) und (30b) sowie mit Vertauschung von Q_m mit N_1 im Nenner des zweiten Gliedes dritter Ordnung ergibt sich

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{X}{N_1 \cos \varphi_1} - \frac{1}{4} \frac{X Y^2}{N_1^3 \cos \varphi_1} + \frac{1}{12} \frac{X^3}{N_1^3 \cos \varphi_1} (1 - 4 \tan^2 \varphi_1) \quad (32c')$$

in voller Uebereinstimmung mit Gleichung (32c).

Für die Streckenverzerrung im Meridian folgt aus der ersten Gleichung (30c) durch Multiplikation des ersten Gliedes zweiter Ordnung mit $\frac{Q_m^2}{R_0^2}$ und des zweiten Gliedes zweiter Ordnung mit $\frac{N^2}{R_0^2}$ ohne Herabsetzung der Genauigkeit im Hinblick auf die Formeln (30) und (30a)

$$h = 1 - \frac{1}{4} \frac{Y^2 - X^2}{R_0^2} \quad (32d)$$

und analog für die Streckenverzerrung im Parallelkreis sowie für die Winkelverzerrung

$$\left. \begin{aligned} K &= 1 + \frac{1}{4} \frac{Y^2 - X^2}{R_0^2}, \\ \sin \frac{1}{2} \delta &= \pm \frac{1}{4} \frac{Y^2 - X^2}{R_0^2} \text{ bzw. } \delta = \pm \frac{1}{2} \frac{Y^2 - X^2}{R_0^2}. \end{aligned} \right\} (32e)$$

Damit ist durch die Gleichungsgruppe (32) die Abbildung der Ebene auf das Rotationsellipsoid durch eine sphäroidische Kalotte vollzogen. Die Gleichungsgruppe (32) stimmt mit der Gruppe (18) und den Formeln (17a) voll überein.

b) Meridianstreifen.

Bei der Herleitung der Gleichungsgruppen für die Abbildung eines Meridianstreifens bzw. Parallelstreifens vom Ellipsoid in die Ebene und zurück können jetzt die bei der Entwicklung für eine sphäroidische Kalotte gewonnenen Zwischenergebnisse mit Vorteil verwendet werden; die folgenden Ausführungen lassen sich im Hinweise darauf vielfach abkürzen, ohne daß dabei die Übersichtlichkeit der Entwicklungen beeinträchtigt wird. Wie immer, so werden auch im Folgenden die Entwicklungen so ausgeführt, daß alle Abbildungsgleichungen bis Glieder dritter Ordnung einschließlich, alle Verzerrungsgrößen bis Glieder zweiter Ordnung einschließlich gelten.

Aus der Gleichungsgruppe (19) können die Abbildungsgleichungen für einen Meridianstreifen in Funktion von m , p entnommen werden. Die Einführung der Formeln (6) und (7) in die Gleichung für y ergibt zunächst

$$y = Q_m (\varphi - \varphi_0) + \frac{\tan \varphi_0}{2N_0} N_0^2 \cos^2 \varphi_0 (\lambda - \lambda_0)^2 + \frac{1}{2} (1 - \tan^2 \varphi_0) \frac{Q_m (\varphi - \varphi_0)}{\sigma^2} (\lambda - \lambda_0)^2 N_0^2 \cos^2 \varphi_0.$$

Durch Eintragung der Fußpunktbreite φ_1 aus der ersten Formel (9) in das erste Glied rechter Hand unter Verwendung des Ergebnisses (29) folgt

$$\begin{aligned} y &= Q_m (\varphi_1 - \varphi_0) - \frac{1}{2} Q_m \frac{N}{Q} (\lambda - \lambda_0)^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 - \frac{1}{2} Q_m \frac{N}{Q} (\lambda - \lambda_0)^2 \frac{\eta}{Q_m} \cos^2 \varphi_0 + \\ &+ \frac{1}{2} Q_m \frac{N}{Q} (\lambda - \lambda_0)^2 \frac{\eta}{Q_m} \sin^2 \varphi_0 + \frac{\tan \varphi_0}{2N_0} (\lambda - \lambda_0)^2 N_0^2 \cos^2 \varphi_0 + \\ &+ \frac{1}{2} (1 - \tan^2 \varphi_0) \frac{Q_m (\varphi - \varphi_0)}{\sigma^2} (\lambda - \lambda_0)^2 N_0^2 \cos^2 \varphi_0 \end{aligned}$$

und hieraus bei Beachtung der vor Gleichung (30) ausgeführten Bemerkungen ohne Schwierigkeit das einfache Resultat

$$y = Q_m (\varphi_1 - \varphi_0). \quad (34)$$

Aus der Gleichung für x erhält man durch Eintragen der Formeln (6) und (7)

$$x = \frac{N \cos \varphi}{N_0 \cos \varphi_0} (\lambda - \lambda_0) N_0 \cos \varphi_0 - \frac{1}{6} (1 + \tan^2 \varphi_0) \frac{(\lambda - \lambda_0)^3 N_0^3 \cos^3 \varphi_0}{\sigma^2}$$

und unter teilweiser Anwendung der vor Gleichung (30a) angegebenen Vereinfachungen mit gleicher Schärfe als erste Form für x die Gleichung

$$x = (\lambda - \lambda_0) N \cos \varphi - \frac{1}{6} (\lambda - \lambda_0)^3 N \cos \varphi. \quad (34a)$$

Aus der Gleichung (34a) ergibt sich mit Hilfe der Formel (31) sofort die zweite Form für die Berechnung der Koordinate x mit

$$x = (\lambda - \lambda_0) N \cos \varphi_1 + \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0)^3 N \sin^2 \varphi_1 \cos \varphi_1 - \frac{1}{6} (\lambda - \lambda_0)^3 N \cos \varphi$$

und mit Hinzunahme der Bemerkungen vor Gleichung (30b)

$$x = (\lambda - \lambda_0) N_1 \cos \varphi_1 - \frac{1}{6} (\lambda - \lambda_0)^3 N_1 \cos \varphi_1 (1 - 3 \sin^2 \varphi_1). \quad (34b)$$

Für die Verzerrungsgrößen in Funktion von φ, λ bekommt man aus der Gleichungsgruppe (19) mit Hilfe der Gleichung (7) und der zulässigen Vereinfachungen

$$h = 1 + \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0)^2 \cos^2 \varphi,$$

$$k = 1 - \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0)^2 \cos^2 \varphi,$$

$$\sin \frac{1}{2} \delta = -\frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0)^2 \cos^2 \varphi$$

(34c)

bzw.

$$\delta = -(\lambda - \lambda_0)^2 \cos^2 \varphi.$$

Die Formelgruppe (34) gibt die Abbildung eines meridianstreifens vom Rotationsellipsoid in die Ebene mit Hilfe geographischer Koordinaten φ, λ ; sie stimmt mit der Gruppe (21) voll überein.

Die Rückabbildung von der Ebene auf das Ellipsoid ergibt sich durch Auflösung der Gleichungsgruppe (34). Aus Gleichung (34) folgt

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{y}{Q_m}. \quad (35)$$

Durch Hinzufügung der Formel (32a)

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{N_1 Q_1} \tan \varphi_1. \quad (35a)$$

ist bereits die Berechnung der geographischen Breite vollendet.

Aus der Gleichung (34a) erhält man

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{x}{N_1 \cos \varphi} + \frac{1}{6} (\lambda - \lambda_0)^3$$

und durch Erweiterung des Gliedes dritter Ordnung mit $\frac{N^2 \cos^3 \varphi}{N^2 \cos^3 \varphi}$ im Hinblick auf die Formel (34a) bei Vertauschung von N mit N_1 im Nenner

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{x}{N_1 \cos \varphi} + \frac{1}{6} \frac{x^3}{N_1^3 \cos^3 \varphi}. \quad (35b)$$

Die Anwendung der Formel (33) auf die Gleichung (35b) gibt zunächst

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{x}{N_1 \cos \varphi_1} - \frac{x}{N_1 \cos \varphi_1} \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0)^2 \sin^2 \varphi_1 + \frac{1}{6} \frac{x^3}{N_1^3 \cos^3 \varphi_1};$$

nach Erweiterung des ersten Gliedes dritter Ordnung mit $\frac{N_1^2 \cos^2 \varphi_1}{N_1^2 \cos^2 \varphi_1}$ bekommt

man im Hinblick auf die Gleichung (34b) und bei Vertauschung von $\cos \varphi$ mit $\cos \varphi_1$ im zweiten Gliede dritter Ordnung

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{X}{N_1 \cos \varphi_1} + \frac{1}{6} \frac{X^3}{N_1^3 \cos^3 \varphi_1} (1 - 2 \tan^2 \varphi_1). \quad (35c)$$

Die Gleichung (35c) läßt sich aber auch noch aus der Formel (34b) ebenso erhalten, wie Gleichung (35b) aus der Formel (34a). Man hat vorerst

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{X}{N_1 \cos \varphi_1} + \frac{1}{6} (\lambda - \lambda_0)^3 (1 - 3 \sin^2 \varphi_1);$$

durch Erweiterung mit $\frac{N_1^3 \cos^3 \varphi_1}{N_1^3 \cos^3 \varphi_1}$ im Gliede dritter Ordnung ergibt sich unter Verwendung von Gleichung (34b) die Formel

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{X}{N_1 \cos \varphi_1} + \frac{1}{6} \frac{X^3}{N_1^3 \cos^3 \varphi_1} (1 - 2 \tan^2 \varphi_1). \quad (35c)$$

Die Verzerrungsgrößen erhält man unmittelbar aus der Gleichungsgruppe (34c), wenn das jeweilige Glied zweiter Ordnung mit $\frac{N^2}{R_0^2}$ multipliziert und die Gleichung (34a) beachtet wird. Es folgt

$$\begin{aligned} h &= 1 + \frac{1}{2} \frac{X^2}{R_0^2}, & k &= 1 - \frac{1}{2} \frac{X^2}{R_0^2}, \\ \sin \frac{1}{2} \delta &= -\frac{1}{2} \frac{X^2}{R_0^2} \text{ bzw. } \delta &= -\frac{X^2}{R_0^2}. \end{aligned} \quad (35d)$$

Die Gleichungen (35) geben die Abbildung eines Meridianstreifens von der Ebene auf das Rotationsellipsoid und die zugehörigen Verzerrungsgrößen. Sie sind mit den Gleichungsgruppen (23) und (22b) ident.

c) Parallelstreifen.

Für einen Parallelstreifen dient die Gleichungsgruppe (24) als Ausgang. Mit Verwendung der Formeln (6) und (7) folgt für y

$$\begin{aligned} y &= Q_m (\varphi - \varphi_0) + \frac{\tan \varphi_0}{2 N_0} (\lambda - \lambda_0)^2 N_0^2 \cos^2 \varphi_0 - \frac{1}{6} \frac{Q_m^3 (\varphi - \varphi_0)^3}{\sigma^2} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \tan^2 \varphi_0 \frac{Q_m (\varphi - \varphi_0)}{\sigma^2} (\lambda - \lambda_0)^2 N_0^2 \cos^2 \varphi_0 \end{aligned}$$

und weiter bei Einführung der Fußpunktbreite nach der ersten Formel (9) unter Anwendung der Entwicklung (29)

$$\begin{aligned} y &= Q_m (\varphi_1 - \varphi_0) - \frac{1}{2} Q_m \frac{N}{Q} (\lambda - \lambda_0)^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 - \frac{1}{2} Q_m \frac{N}{Q} (\lambda - \lambda_0)^2 \frac{\eta}{Q_m} \cos^2 \varphi_0 + \\ &\quad + \frac{1}{2} Q_m \frac{N}{Q} (\lambda - \lambda_0)^2 \frac{\eta}{Q_m} \sin^2 \varphi_0 + \frac{\tan \varphi_0}{2 N_0} (\lambda - \lambda_0)^2 N_0^2 \cos^2 \varphi_0 - \\ &\quad - \frac{1}{6} \frac{Q_m^3 (\varphi - \varphi_0)^3}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \tan^2 \varphi_0 \frac{Q_m (\varphi - \varphi_0)}{\sigma^2} (\lambda - \lambda_0)^2 N_0^2 \cos^2 \varphi_0; \end{aligned}$$

daraus erhält man im Hinblick auf die Ausführungen von Gleichung (30) durch entsprechende Zusammenfassung

$$y = Q_m (\varphi_1 - \varphi_0) \left[1 - \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0)^2 \cos^2 \varphi - \frac{1}{6} (\varphi_1 - \varphi_0)^2 \right]. \quad (36)$$

Aus der Gleichung für x folgt bei Anwendung der Gleichungen (6) und (7)

$$x = \frac{N \cos \varphi}{N_0 \cos \varphi_0} N_0 \cos \varphi_0 (\lambda - \lambda_0) + \frac{1}{2} \frac{Q_m^2 (\varphi - \varphi_0)^2}{Q^2} N_0 \cos \varphi_0 (\lambda - \lambda_0) - \frac{1}{6} \tan^2 \varphi_0 \frac{N_0^3 \cos^3 \varphi_0 (\lambda - \lambda_0)^3}{Q^2}$$

und daraus bei Anwendung der vor Gleichung (36a) angegebenen Bemerkungen als erste Form für x die Gleichung

$$x = (\lambda - \lambda_0) N \cos \varphi \left[1 - \frac{1}{6} (\lambda - \lambda_0)^2 \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_0)^2 \right]. \quad (36a)$$

Eine zweite Form für die Berechnung der Koordinate x ergibt sich unter Anwendung der Gleichung (31) auf das Ergebnis (36a) mit

$$x = (\lambda - \lambda_0) N \cos \varphi_1 \left[1 + \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0)^2 \sin^2 \varphi_1 - \frac{1}{6} (\lambda - \lambda_0)^2 \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_0)^2 \right]$$

und hieraus mit Hilfe der Bemerkungen vor Gleichung (30b)

$$x = (\lambda - \lambda_0) N_1 \cos \varphi_1 \left[1 + \frac{1}{3} (\lambda - \lambda_0)^2 \sin^2 \varphi_1 + \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_0)^2 \right]. \quad (36b)$$

Weiters bekommt man noch aus der Gleichungsgruppe (24a) für die Verzerrungsgrößen bei Einführung der Formel (6) und der zulässigen Vereinfachungen

$$h = 1 - \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_0)^2,$$

$$k = 1 + \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_0)^2,$$

$$\sin \frac{1}{2} \delta = -\frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_0)^2$$

bzw.

$$\delta = -(\varphi_1 - \varphi_0)^2.$$

(36c)

Die Formelgruppe (36), die die Abbildung eines Parallelstreifens vom Rotationsellipsoid in die Ebene darstellt, stimmt somit völlig mit den Gleichungen (26) überein.

Die Abbildung von der Ebene auf das Ellipsoid erfolgt durch Umkehrung der Gleichungen (36). Aus der Formel für y ergibt sich

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{y}{Q_m} + \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0)^2 \cos^2 \varphi (\varphi_1 - \varphi_0) + \frac{1}{6} (\varphi_1 - \varphi_0)^3;$$

die Multiplikation des ersten Gliedes dritter Ordnung mit $\frac{Q_m N^2}{R_0^3}$, des zweiten Gliedes dritter Ordnung mit $\frac{Q_m^3}{R_0^3}$ führt im Hinblick auf die Formeln (36) und (36a) mit gleicher Genauigkeit zu

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{y}{Q_m} + \frac{1}{2} \frac{x^2 y}{R_0^3} + \frac{1}{6} \frac{y^3}{R_0^3}. \quad (37)$$

Mit Hinzunahme der Gleichung (32a)

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{N_1 Q_1} \tan \varphi_1 \quad (37a)$$

erhält man die geographische Breite φ des rückabzubildenden Punktes in Funktion der ebenen, rechtwinkligen Koordinaten x, y .

Aus der Formel (36a) folgt

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{X}{N \cos \varphi} + \frac{1}{6} (\lambda - \lambda_0)^3 \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} (\varphi - \varphi_0)^2 (\lambda - \lambda_0).$$

Wird wieder das erste Glied dritter Ordnung mit $\frac{N^3 \cos^3 \varphi}{N^3 \cos^3 \varphi}$, das zweite Glied dritter Ordnung mit $\frac{Q_m^2 N \cos \varphi}{Q_m^2 N \cos \varphi}$ erweitert, so bekommt man daraus in Hinblick auf die Formeln (34) und (34a) und bei Vertauschung von N und Q_m mit N_1 im Nenner

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{X}{N_1 \cos \varphi} + \frac{1}{6} \frac{X^3}{N_1^3 \cos^3 \varphi} \tan^2 \varphi - \frac{1}{2} \frac{XY^2}{N_1^3 \cos \varphi}. \quad (37b)$$

Aus Gleichung (37b) folgt mit Anwendung der Formel (33)

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{X}{N_1 \cos \varphi_1} - \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0)^2 \frac{X}{N_1 \cos \varphi_1} \sin^2 \varphi_1 + \frac{1}{6} \frac{X^3}{N_1^3 \cos^3 \varphi_1} \tan^2 \varphi - \frac{1}{2} \frac{XY^2}{N_1^3 \cos \varphi};$$

nach Erweiterung des ersten Gliedes dritter Ordnung mit $\frac{N_1^2 \cos^2 \varphi_1}{N_1^2 \cos^2 \varphi_1}$ ergibt sich bei Beachtung der Gleichung (36b) und bei Vertauschung von φ mit φ_1 in den Gliedern dritter Ordnung

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{X}{N_1 \cos \varphi_1} - \frac{1}{3} \frac{X^3}{N_1^3 \cos^3 \varphi_1} \tan^2 \varphi_1 - \frac{1}{2} \frac{XY^2}{N_1^3 \cos \varphi_1}. \quad (37c)$$

Dieses Ergebnis kann aber auch aus der Gleichung (36b) erhalten werden, so wie die Gleichung (37b) aus der Formel (36a) erhalten wurde. Es wird

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{X}{N_1 \cos \varphi_1} - \frac{1}{3} (\lambda - \lambda_0)^3 \sin^2 \varphi_1 - \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_0)^2 (\lambda - \lambda_0)$$

und daraus durch Multiplikation des ersten Gliedes dritter Ordnung mit $\frac{N_1^3 \cos^3 \varphi_1}{N_1^3 \cos^3 \varphi_1}$, des zweiten Gliedes dritter Ordnung mit $\frac{Q_m^2 N_1 \cos \varphi_1}{Q_m^2 N_1 \cos \varphi_1}$ unter Verwendung der Formeln (36) und (36b) und bei Vertauschung von Q_m mit N_1 im Nenner des zweiten Gliedes dritter Ordnung

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{X}{N_1 \cos \varphi_1} - \frac{1}{3} \frac{X^3}{N_1^3 \cos^3 \varphi_1} \tan^2 \varphi_1 - \frac{1}{2} \frac{XY^2}{N_1^3 \cos \varphi_1}. \quad (37c)$$

Aus der Gleichungsgruppe (36c) folgen schließlich noch die Verzerrungsgrößen, wenn das Glied zweiter Ordnung mit $\frac{Q_m^2}{R_0^2}$ multipliziert und die Gleichung (36) angewendet wird, mit

$$\begin{aligned} h &= 1 - \frac{1}{2} \frac{Y^2}{R_0^2}, \quad k = 1 + \frac{1}{2} \frac{Y^2}{R_0^2}, \\ \sin \frac{1}{2} \delta &= -\frac{1}{2} \frac{Y^2}{R_0^2} \text{ bzw. } \delta = -\frac{Y^2}{R_0^2}. \end{aligned} \quad (37d)$$

Die Formelgruppe (37) gibt die Abbildung von der Ebene auf das Ellipsoid durch einen Parallelstreifen sowie die zugehörigen Verzerrungsgrößen. Sie stimmt mit den Formelgruppen (28) und (27a) vollkommen überein.

Damit ist die Herleitung der Gleichungen für die flächentreue Abbildung der Systeme geringster Streckenverzerrung vom Rotationsellipsoid in die Ebene und umgekehrt auch auf direktem Wege vollzogen.

6) Formeln für die praktische Rechnung.

Im Folgenden sind nun die für die praktische Durchführung der Abbildungen vom Ellipsoid auf die Ebene und umgekehrt sowie die zur Berechnung der Strecken- und Winkelverzerrung geeigneten Formelgruppen zusammengestellt. Dabei wurde noch vom Bogenmaß auf das Winkelmaß übergegangen.

a) Sphäroidische Kalotte.

α) Abbildung vom Ellipsoid auf die Ebene.

$$\varphi_1 = \varphi + \frac{1}{2} \frac{N}{Q} (\lambda - \lambda_0)^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 T,$$

$$y = Q_m (\varphi_1 - \varphi_0) \sin^2 T \left[1 - \frac{1}{4} (\lambda - \lambda_0)^2 \cos^2 \varphi \sin^2 T - \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_0)^2 \sin^2 T \right],$$

$$\begin{aligned} x &= (\lambda - \lambda_0) N \cos \varphi \sin^2 T \left[1 - \frac{1}{12} (\lambda - \lambda_0)^2 (1 + \sin^2 \varphi) \sin^2 T + \frac{1}{4} (\varphi_1 - \varphi_0)^2 \sin^2 T \right] \\ &= (\lambda - \lambda_0) N_1 \cos \varphi_1 \sin^2 T \left[1 - \frac{1}{12} (\lambda - \lambda_0)^2 (1 - 5 \sin^2 \varphi_1) \sin^2 T + \frac{1}{4} (\varphi_1 - \varphi_0)^2 \sin^2 T \right], \end{aligned}$$

$$h = 1 - \frac{1}{4} \left[(\varphi_1 - \varphi_0)^2 \sin^2 T - (\lambda - \lambda_0)^2 \cos^2 \varphi \sin^2 T \right],$$

$$k = 1 + \frac{1}{4} \left[(\varphi_1 - \varphi_0)^2 \sin^2 T - (\lambda - \lambda_0)^2 \cos^2 \varphi \sin^2 T \right],$$

$$\delta = \pm \frac{1}{2} \left[(\varphi_1 - \varphi_0)^2 \sin^2 T - (\lambda - \lambda_0)^2 \cos^2 \varphi \sin^2 T \right].$$

β) Abbildung von der Ebene auf das Ellipsoid.

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{y}{Q_m \sin^2 T} + \frac{1}{4} \frac{x^2 y}{R_0^3 \sin^2 T} + \frac{1}{12} \frac{y^3}{R_0^3 \sin^2 T},$$

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{N_1 Q_1 \sin^2 T} \tan \varphi_1,$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + \frac{x}{N_1 \cos \varphi_1 \sin^2 T} - \frac{1}{4} \frac{x y^2}{N_1^3 \cos \varphi_1 \sin^2 T} + \frac{1}{12} \frac{x^3}{N_1^3 \cos \varphi_1 \sin^2 T} (1 - 4 \tan^2 \varphi_1) \\ &= \lambda_0 + \frac{x}{N_1 \cos \varphi \sin^2 T} - \frac{1}{4} \frac{x y^2}{N_1^3 \cos \varphi \sin^2 T} + \frac{1}{12} \frac{x^3}{N_1^3 \cos \varphi \sin^2 T} (1 + 2 \tan^2 \varphi), \end{aligned}$$

$$h = 1 - \frac{1}{4} \frac{y^2 - x^2}{R_0^2},$$

$$k = 1 + \frac{1}{4} \frac{y^2 - x^2}{R_0^2},$$

$$\delta = \pm \frac{1}{2} \frac{y^2 - x^2}{R_0^2 \sin^2 T}.$$

b) Meridianstreifen. α) Abbildung vom Ellipsoid auf die Ebene.

$$\varphi_1 = \varphi + \frac{1}{2} \frac{N}{Q} (\lambda - \lambda_0)^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 1',$$

$$y = Q_m (\varphi_1 - \varphi_0) \sin 1',$$

$$\begin{aligned} x &= (\lambda - \lambda_0) N \cos \varphi \sin 1' \left[1 - \frac{1}{6} (\lambda - \lambda_0)^2 \sin^2 1' \right] \\ &= (\lambda - \lambda_0) N_1 \cos \varphi_1 \sin 1' \left[1 - \frac{1}{6} (\lambda - \lambda_0)^2 (1 - 3 \sin^2 \varphi_1) \sin^2 1' \right], \end{aligned}$$

$$h = 1 + \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0)^2 \cos^2 \varphi \sin^2 1',$$

$$k = 1 - \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0)^2 \cos^2 \varphi \sin^2 1',$$

$$\delta = -(\lambda - \lambda_0)^2 \cos^2 \varphi \sin^2 1'.$$

 β) Abbildung von der Ebene auf das Ellipsoid.

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{y}{Q_m \sin 1'},$$

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{1}{2} \frac{X^2}{N_1 Q_1 \sin^2 1'} \tan \varphi_1,$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + \frac{X}{N_1 \cos \varphi_1 \sin 1'} + \frac{1}{6} \frac{X^3}{N_1^3 \cos^3 \varphi_1 \sin^3 1'} (1 - 2 \tan^2 \varphi_1) \\ &= \lambda_0 + \frac{X}{N_1 \cos \varphi \sin 1'} + \frac{1}{6} \frac{X^3}{N_1^3 \cos^3 \varphi \sin^3 1'}, \end{aligned}$$

$$h = 1 + \frac{1}{2} \frac{X^2}{R_0^2},$$

$$k = 1 - \frac{1}{2} \frac{X^2}{R_0^2},$$

$$\delta = -\frac{X^2}{R_0^2 \sin^2 1'}.$$

c) Parallelstreifen.α) Abbildung vom Ellipsoid auf die Ebene.

$$\varphi_1 = \varphi + \frac{1}{2} \frac{N}{Q} (\lambda - \lambda_0)^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \tau,$$

$$y = Q_m (\varphi_1 - \varphi_0) \sin \tau \left[1 - \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0)^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \tau - \frac{1}{6} (\varphi_1 - \varphi_0)^2 \sin^2 \tau \right],$$

$$\begin{aligned} x &= (\lambda - \lambda_0) N \cos \varphi \sin \tau \left[1 - \frac{1}{6} (\lambda - \lambda_0)^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \tau + \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_0)^2 \sin^2 \tau \right] \\ &= (\lambda - \lambda_0) N_1 \cos \varphi_1 \sin \tau \left[1 + \frac{1}{3} (\lambda - \lambda_0)^2 \sin^2 \varphi_1 \sin^2 \tau + \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_0)^2 \sin^2 \tau \right], \end{aligned}$$

$$h = 1 - \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_0)^2 \sin^2 \tau,$$

$$k = 1 + \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_0)^2 \sin^2 \tau,$$

$$\delta = -(\varphi_1 - \varphi_0)^2 \sin^2 \tau.$$

β) Abbildung von der Ebene auf das Ellipsoid.

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{y}{Q_m \sin \tau} + \frac{1}{2} \frac{x^2 y}{R_0^3 \sin^3 \tau} + \frac{1}{6} \frac{y^3}{R_0^3 \sin^3 \tau},$$

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{N_1 Q_1 \sin \tau} \tan^2 \varphi_1,$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + \frac{x}{N_1 \cos \varphi_1 \sin \tau} - \frac{1}{2} \frac{x y^2}{N_1^3 \cos^3 \varphi_1 \sin^3 \tau} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{N_1^3 \cos^3 \varphi_1 \sin^3 \tau} \tan^2 \varphi_1 \\ &= \lambda_0 + \frac{x}{N_1 \cos \varphi \sin \tau} - \frac{1}{2} \frac{x y^2}{N_1^3 \cos^3 \varphi \sin^3 \tau} + \frac{1}{6} \frac{x^3}{N_1^3 \cos^3 \varphi \sin^3 \tau} \tan^2 \varphi, \end{aligned}$$

$$h = 1 - \frac{1}{2} \frac{y^2}{R_0^2},$$

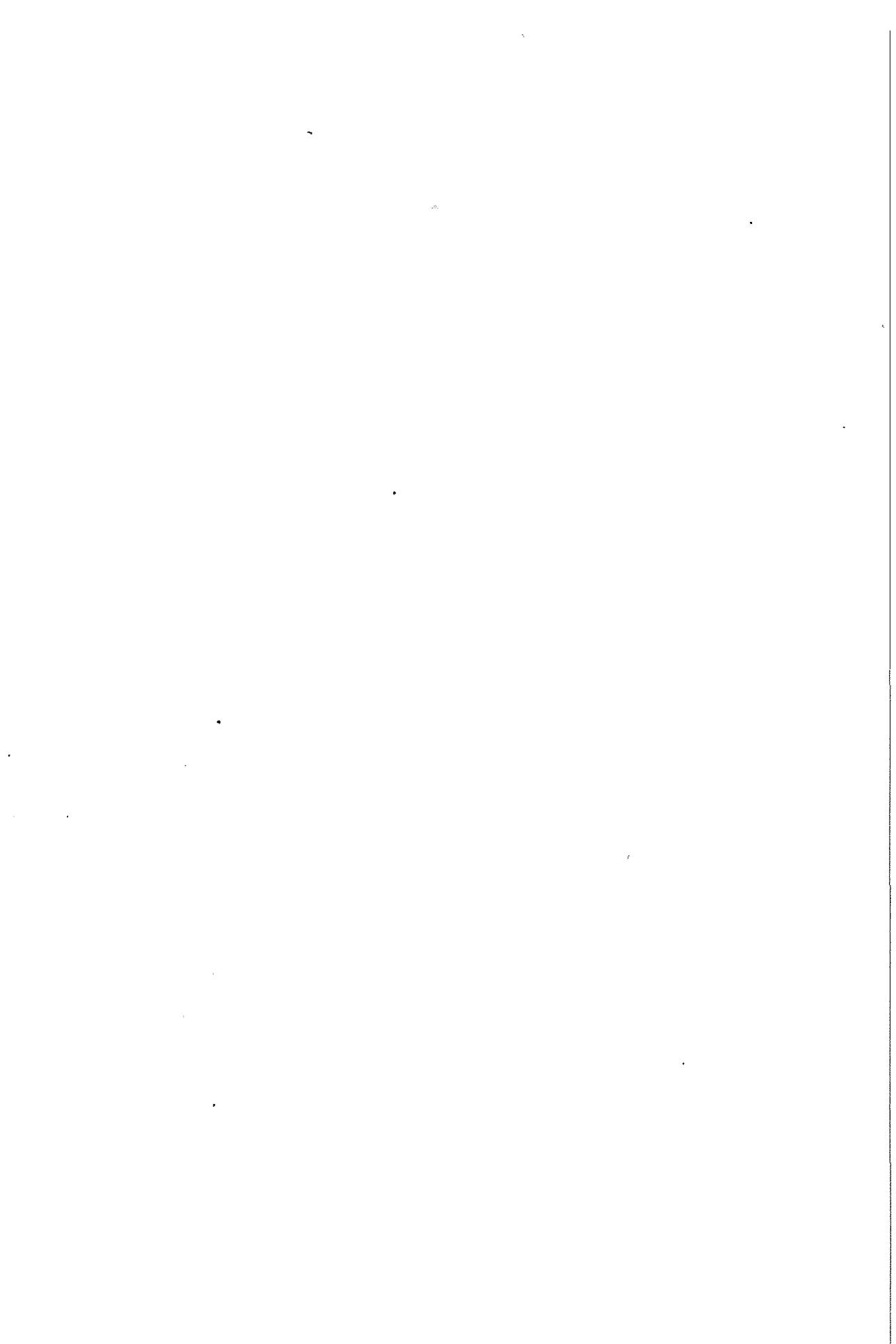
$$k = 1 + \frac{1}{2} \frac{y^2}{R_0^2},$$

$$\delta = -\frac{y^2}{R_0^2 \sin^2 \tau}.$$

Zur Durchführung der Rechnungen mit dem hier entwickelten Formelapparat kann noch bemerkt werden, daß sie ziemlich rasch vor sich gehen wird, da die Berechnung aller Glieder höherer Ordnung mit einer geringen Stellenanzahl möglich ist. Für Längenunterschiede $\lambda - \lambda_0$, die unter zwei Grad liegen, kann bei der Abbildung in der Formel für φ_1 der Quotient $\frac{N}{Q} = 1$

und bei der Rückabbildung in der Formel für φ der Ausdruck $\frac{1}{N_1 Q_1} = \frac{1}{R_0^2}$ gesetzt werden, ohne daß hiedurch - selbst bei siebenstelliger Rechnung - die Genauigkeit der Ergebnisse herabgesetzt würde. Wie ein Blick auf die zusammengestellten Formeln zeigt und wie dies auch schon früher⁵⁾ ausgeführt wurde, ist die Meridianstreifenabbildung die günstigste unter den Systemen geringster Streckenverzerrung, umso mehr als sich hier außer der Einfachheit des Formelapparates auch noch die kleinen Längenunterschiede in den Gliedern höherer Ordnung besonders vorteilhaft auswirken.

5) Österr. Zeitschr. f. Vermessungsw., 36. Jgg., S. 114-123, 1948; F. Hauer, Genauigkeitsuntersuchung zur flächentreuen Abbildung kleiner Bereiche des Rotationsellipsoids in die Ebene.



Weitere Publikationen:

- L Der Österreichische Grundkataster, 66 Seiten, 1948 Preis S 10.—
zu beziehen im Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen,
Wien, VIII., Krotenthallergasse 3

II. Behelf zur Prüfung für den höheren technischen Vermessungsdienst:

- Heft 1: Fortführung 1. Teil, 55 Seiten, 1949 Preis S 10.—
Heft 2: Fortführung 2. Teil, Bodenschätzung, 46 Seiten, 1949 Preis S 10.—
Heft 3: Höhere Geodäsie, 81 Seiten, 1949 Preis S 10.—
Heft 4: Triangulierung, 46 Seiten, 1949 Preis S 7.—
Heft 5: Neuvermessung, Nivellement und topographische Landesaufnahme,
104 Seiten, 1949 Preis S 16.—
Heft 6: Photogrammetrie und Kartographie Preis S 10.—

III. Dienstvorschriften des Bundesvermessungsdienstes:

- Heft 1: Benennungen, Zeichen und Abkürzungen im Österr. Vermessungs-
dienst, 38 Seiten, Prov. Ausg. 1947 Preis S 5.—
Heft 2: Allg. Bestimmungen über Dienstvorschriften, Rechentafeln, Muster
und sonstige Drucksorten, 50 Seiten, Prov. Ausg. 1947 Preis S 6.50
Heft 8: Die österreichischen Meridianstreifen, 62 Seiten, 3. Aufl. 1949
Preis S 8.—
Heft 14: Fehlergrenzen und Hilfstabellen für Neuvermessungen, 16 Seiten,
2. Aufl. 1937 Preis S 2.50
Heft 15: Hilfstabellen für Neuvermessungen, 36 Seiten, 1. Aufl. 1949
Preis S 5.—
Heft 48: Behelfe für die Anlage von Oleaten bei der Neuaufnahme und
Kartenrevision, 17 Seiten, 4. Aufl. 1948 Preis S 12.—

II. und III. zu beziehen in der Amtsbücherei des
Bundesamtes für Eich- u. Vermessungswesen, Wien, I., Hohenstaufengasse 17

